Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Τελική εξέταση 12ης Ιουνίου 2013 - Ακαδημ. έτος 2012-2013

Θέμα 1ο: (3 βαθμοί) Σε ένα διαδικτυακό ιστότοπο μιας επιχείρησης πληροφορικής καταφθάνουν αιτήσεις για αγορές, επισκευές και υποστήριξη προϊόντων με ρυθμούς 2, 3 και 5 αιτήσεων την ώρα αντίστοιχα συμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

(1) Η πιθανότητα σε μια ώρα να φθάσουν συνολικά 12 αιτήσεις εκ των οποίων οι 3 αφορούν αγορές.

(2) Η πιθανότητα σε μια ώρα να φθάσουν συνολικά 12 αιτήσεις εκ των οποίων οι 3 πρώτες αφορούν αγορές, οι 7 επόμενες αφορούν επισκευές ή υποστήριξη και οι 2 τελευταίες αφορούν αγορές.

(3) Η δεσμευμένη πιθανότητα σε μια ώρα να φθάσουν 4 αιτήσεις αγορών, δεδομένου ότι στην ίδια ώρα έφθασαν συνολικά 10 αιτήσεις.

(4) Ο δεσμευμένος μέσος αριθμός αιτήσεων σε μια ώρα, δεδομένου ότι στο πρώτο μισάωρο της ίδιας ώρας έφθασαν 4 αιτήσεις για αγορές.

(5) Ο μέσος αριθμός αιτήσεων για υποστήριξη προϊόντων μεταξύ δυο διαδοχικών αιτήσεων για αγορές.

(6) Ο δεσμευμένος μέσος χρόνος εμφάνισης της τρίτης αίτησης για αγορά σε μια ώρα, δεδομένου ότι στην ίδια ώρα έφθασαν συνολικά πέντε αιτήσεις για αγορές.

Θέμα 2ο: (4 βαθμοί) Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $G(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty$, $k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$, $n = 1, 2, \ldots$ $(S_0 = 0)$ η αντίστοιχη ανανεωτική ακολουθία και $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ η αντίστοιχη ανανεωτική διαδικασία. Ορίζουμε, επίσης, για κάθε $t \geq 0$, $B(t) = S_{N(t)+1} - t$ να είναι ο προδρομικός ή υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης.

(1) Να γράψετε μια ανανεωτική εξίσωση για την $P(t) = P(N(t)$ είναι πολλαπλάσιο του $3)$, να τη λύσετε και να βρείτε το όριο $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

(2) Να γράψετε μια ανανεωτική εξίσωση για την $H(t) = E[B(t)^2]$, να τη λύσετε και να βρείτε το όριο $\lim_{t\to\infty} H(t)$.

Σημείωση: Σε περίπτωση που χρησιμοποιήσετε το βασικό ανανεωτικό θεώρημα για την εύρεση των ορίων, δεν χρειάζεται να αποδείξετε ότι η σχετική συνάρτηση $D(t)$ της ανανεωτικής εξίσωσης γράφεται ως διαφορά δυο μονότονων, μη αρνητικών συναρτήσεων.

Θέμα 3ο: (3 βαθμοί) Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με 1 υπηρέτη, στο οποίο καταφθάνουν πελάτες δυο τύπων 1 και 2, σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Κάθε πελάτης, ανεξαρτήτως τύπου, έχει εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης με παράμετρο μ. Οι πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου 2, δηλαδή όταν υπάρχουν πελάτες τύπου 1 στο σύστημα ο υπηρέτης εξυπηρετεί αυτούς και αρχίζει να εξυπηρετεί πελάτες τύπου 2 μόνο όταν δεν υπάρχουν πελάτες τύπου 1. Επιπλέον, αν ένας πελάτης τύπου 2 εξυπηρετείται και αφιχθεί πελάτης τυπου 1, ο υπηρέτης διακόπτει την εξυπηρέτησή του και πηγαίνει να εξυπηρετήσει τον πελάτη τύπου 1.

(1) Να βρεθεί η πιθανότητα να μη διακοπεί η εξυπηρέτηση ενός πελάτη τύπου 2.

(2) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.

(3) Να βρεθούν οι μέσοι αριθμοί πελατών τύπου 1 και 2, $E[Q_1]$ και $E[Q_2]$ αντίστοιχα.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Τελική εξέταση 12ης Ιουνίου 2013, 2012-2013
Λύσεις των θεμάτων

Θέμα 1ο

Έστω $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$ και $\{N_3(t)\}$ οι στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ και $\lambda_3=5$ αντίστοιχα που αφορούν αγορές, επισκευές και υποστήριξη προϊόντων που φθάνουν στο διαδικτυακό ιστότοπο της επιχείρησης. Έστω $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους που αφορά το συνολικό αριθμό αιτήσεων. Έχουμε

(1) $P(N(1)=12,\ N_1(1)=3) = P(N_1(1)=3,\ N_2(1)+N_3(1)=9)$

$= P(N_1(1)=3)\,P(N_2(1)+N_3(1)=9)$ (λόγω ανεξ. των $\{N_i(t)\}$)

$= e^{-2\cdot 1}\dfrac{(2\cdot 1)^3}{3!}\,e^{-8\cdot 1}\dfrac{(8\cdot 1)^9}{9!}$ (λόγω του ότι $N_2(1)+N_3(1)\sim \text{Poisson}(3\cdot 1+5\cdot 1)$)

$= e^{-10}\dfrac{2^3\,8^9}{3!\,9!}$

(2) $P(N(1)=12,\ Z_1=Z_2=Z_3=A,\ Z_4=\dots=Z_{10}=\text{Ε ή Υ},\ Z_{11}=Z_{12}=A)$

τύποι γεγονότων

$= P(N(1)=12)\cdot P(Z_i=A)^5\,P(Z_i=\text{Ε ή Υ})^7$ (λόγω ιδιοτ. διάσπασης)

$= e^{-10\cdot 1}\cdot\dfrac{(10\cdot 1)^{12}}{12!}\cdot\left(\dfrac{2}{2+3+5}\right)^5\left(\dfrac{3+5}{2+3+5}\right)^7$ (λόγω ιδιοτ. διάσπασης)

$= e^{-10}\dfrac{\cancel{10^{12}}}{12!}\cdot\dfrac{2^5\,8^7}{\cancel{10^{12}}}$

$= e^{-10}\dfrac{2^5\,8^7}{12!}$

(3) $P(N_1(1)=4 \mid N(1)=10)$

$= \dfrac{P(N_1(1)=4,\ N(1)=10)}{P(N(1)=10)}$ (ορισμός δεσμ. πιθανότητας)

$= \dfrac{P(N_1(1)=4,\ N_2(1)+N_3(1)=6)}{P(N(1)=10)}$

$= \dfrac{P(N_1(1)=4)\,P(N_2(1)+N_3(1)=6)}{P(N(1)=10)}$ (λόγω ανεξ. των $\{N_i(t)\}$)

$= \dfrac{\cancel{e^{-2\cdot 1}}\dfrac{(2\cdot 1)^4}{4!}\,\cancel{e^{-8\cdot 1}}\dfrac{(8\cdot 1)^6}{6!}}{\cancel{e^{-10\cdot 1}}\dfrac{10^{10}}{10!}}$ ($N_2(1)+N_3(1)\sim\text{Poisson}(3\cdot 1+5\cdot 1)$, $N(t)\sim\text{Poisson}(2\cdot 1+3\cdot 1+5\cdot 1)$)

$$= \binom{10}{4}\left(\frac{2}{10}\right)^4\left(\frac{8}{10}\right)^6$$

(4) $E[N(1) \mid N_1(\tfrac{1}{2})=4] = E[N_1(1) \mid N_1(\tfrac{1}{2})=4] + E[N_2(1)+N_3(1) \mid N_1(\tfrac{1}{2})=4]$

$= E[N_1(\tfrac{1}{2}) \mid N_1(\tfrac{1}{2})=4] + E[N_1(1)-N_1(\tfrac{1}{2}) \mid N_1(\tfrac{1}{2})=4]$

$\quad + E[N_2(1)+N_3(1) \mid N_1(\tfrac{1}{2})=4]$

$= 4 + E[N_1(1)-N_1(\tfrac{1}{2})] + E[N_2(1)+N_3(1)]$

(λόγω ανεξ. προσαυξήσεων και ανεξ. των $\{N_i(t)\}$)

$= 4 + E[N_1(\tfrac{1}{2})] + E[N_2(1)] + E[N_3(1)]$

$= 4 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 1 + 5\cdot 1$

$= 13.$

(5) Έστω $Y \sim Exp(2)$ ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών αιτήσεων για αγορές. Ζητάμε την $E[N_3(Y)]$. Είναι

$$E[N_3(Y)] = \int_0^\infty E[N_3(y) \mid Y=y]\, 2e^{-2y}\, dy \quad \left(\begin{matrix}\text{Θεωρ. Διπλής}\\ \text{Μέσης Τιμής}\end{matrix}\right)$$

$$= \int_0^\infty 5y \cdot 2e^{-2y}\, dy$$

$$= \frac{5}{2}$$

(6) Έστω $S_i^{(1)}$ ο χρόνος εμφάνισης της τρίτης αίτησης για αγορά σε μια ώρα. Ζητάμε την $E[S_3^{(1)} \mid N_1(1)=5]$. Είναι

$$E[S_3^{(1)} \mid N_1(1)=5] = E[U_{3:5}],$$

όπου $U_{i:n}$ η i-οστή διατεταγμένη τ.μ. από δείγμα 5 ομοιόμορφων στο $[0,t]$ (εδώ $t=1$). Γενικά έχουμε $E[U_{i:n}] = \frac{it}{n+1}$, οπότε

$$E[S_3^{(1)} \mid N_1(1)=5] = \frac{3\cdot 1}{5+1} = \frac{1}{2}$$

Θέμα 2ο:

(1) Θεωρούμε την ανανεωτική διαδικασία που προκύπτει κάθε φορά που συμβαίνει γεγονός στην $\{N(t)\}$ με δείκτη πολ/σιο του 3 (δηλ. στο 3ο, 6ο, 9ο κλπ. γεγονός της $\{N(t)\}$). Οι ενδιάμεσοι χρόνοι αυτής της διαδικασίας έχουν κατανομή $F(x) = G^{*3}(x)$. Δεσμεύοντας στον πρώτο χρόνο αυτής της διαδικασίας $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ έχουμε

$$P(t) = P(N(t) \text{ πολ/σιο του } 3)$$

$$= \int_0^\infty P(N(t) \text{ πολ/σιο του } 3 \mid Y_1 = x)\, dF(x)$$

Όμως

$$P(N(t) \text{ πολ/σιο του } 3 \mid Y_1 = x) = \begin{cases} P(N(t)=0 \mid Y_1 = x), & \text{αν } t < x \\ P(t-x), & \text{αν } x \leq t \end{cases}$$

Όμως

$$P(N(t)=0 \mid Y_1 = x) = P(X_1 > t \mid X_1 + X_2 + X_3 = x)$$

οπότε

$$P(t) = \int_t^\infty P(X_1 > t \mid X_1 + X_2 + X_3 = x)\, \overset{dG^{*3}(x)}{\overset{\shortparallel}{dF(x)}} + \int_0^t P(t-x)\, dF(x)$$

$$= P(X_1 > t,\ X_1 + X_2 + X_3 > t) + \int_0^t P(t-x)\, dF(x)$$

$$= P(X_1 > t) + \int_0^t P(t-x)\, dF(x)$$

$$= \underbrace{(1 - G(t))}_{D(t)} + \int_0^t P(t-x)\, dF(x)$$

Η τελευταία είναι ανανεωτική εξίσωση για την $P(t)$ με λύση

$$P(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_F(x)$$

$$= (1 - G(t)) + \int_0^t (1 - G(t-x))\, dM_F(x).$$

όπου
$$M_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*3n}(x).$$
Για το όριο της $P(t)$ καθώς $t \to \infty$ εφαρμόζουμε το Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα. Είναι
$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\int_0^\infty (1-F(t))\,dt}$$
όπου
$$\int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty (1-G(t))\,dt = E[X_1] = \mu_1$$
$$\int_0^\infty (1-F(t))\,dt = E[Y_1] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 3\mu_1$$
Άρα
$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{\mu_1}{3\mu_1} = \frac{1}{3}.$$

(2) $H(t) = E[B(t)^2] = \int_0^\infty E[B(t)^2 \mid X_1 = x]\,dG(x)$

Όμως
$$E[B(t)^2 \mid X_1 = x] = \begin{cases} (x-t)^2, & \text{αν } t < x \\ E[B(t-x)^2], & \text{αν } x \le t \end{cases}$$
οπότε
$$H(t) = \underbrace{\int_t^\infty (x-t)^2\,dG(x)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-x)\,dG(x)$$
Η τελευταία είναι ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$ με λύση
$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\,dM_G(x)$$
με
$$M_G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(x).$$

Για το όριο της $H(t)$ καθώς $t \to \infty$ εφαρμόζουμε το Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα. Είναι

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)dt}{\int_0^\infty (1-G(t))dt}$$

όπου

$$\int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty \int_t^\infty (x-t)^2 dG(x)\,dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x (x-t)^2 dt\, dG(x)$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^3}{3} dG(x)$$

$$= \frac{\mu_3}{3}$$

$$\int_0^\infty (1-G(t))dt = \mu_1$$

Άρα

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\mu_3}{3\mu_1}$$

Θέμα 3ο:

(1) Για να εξυπηρετείται ένας πελάτης τύπου 2 σημαίνει ότι δεν υπάρχει στο σύστημα πελάτης τύπου 1 (διότι ο υπηρέτης θα εξυπηρετούσε αυτόν)

P(να μη διακοπεί η εξυπηρ. του πελ. τύπου 2)

$$= P(\underbrace{\text{χρόνος ως την άφιξη ενός πελ. τύπου 1}}_{=X} > \underbrace{\text{υπολ. χρόνος εξυπ.}}_{=Y}$$

$X \sim Exp(\lambda_1)$, $Y \sim Exp(\mu)$, λόγω αμνημ. ιδιότητας

$= P(X > Y)$

σ.π.π. $Exp(\mu)$

$$= \int_0^\infty P(X>y)\, f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda y} \mu e^{-\mu y} dy$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

(2) Έχουμε M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ.

Έστω Q το πλήθος πελατών στο σύστημα, Q^- το πλήθος πελατών στο σύστημα πριν από στιγμή άφιξης και S ο χρόνος παραμονής πελάτη.

Από το Νόμο του Little

$$E[Q] = (\lambda_1 + \lambda_2) E[S]$$

Δεσμεύοντας στο πλήθος των πελατών που βρίσκει ένας πελάτης κατά την άφιξή του

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n) E[S \mid Q^- = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n) \frac{n+1}{\mu}$$

$$= (E[Q^-] + 1) \cdot \frac{1}{\mu}$$

Λόγω Poisson διαδ. αφίξεων & ιδιότητας PASTA έχουμε

$$\underset{\text{ίδια κατανομή}}{Q \overset{d}{=} Q^-} \Rightarrow E[Q] = E[Q^-]$$

Άρα

$$E[Q] = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \frac{1}{\mu} (E[Q] + 1)$$

$$\Rightarrow E[Q] = \frac{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu}}{1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu}} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 - \rho_1 - \rho_2}$$

όπου

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}, \quad i = 1, 2.$$

Επίσης

$$E[S] = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} E[Q] = \frac{1}{\mu(1 - \rho_1 - \rho_2)}.$$

(3) Επειδή οι πελάτες τύπου 2 δεν επηρεάζουν τους πελάτες τύπου 1, το σύστημα των πελατών τύπου 1 συμπεριφέρεται επίσης ως M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων λ_1 και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Όπως στο (2) με λ_1 στη θέση του $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ παίρνουμε

$$E[Q_1] = \lambda_1 E[S_1], \quad E[S_1] = (E[Q_1]+1)\cdot\frac{1}{\mu}$$

οπότε

$$E[Q_1] = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}$$

Για τους πελάτες τύπου 2 δεν εφαρμόζεται η ίδια ιδέα γιατί επηρεάζονται από πελάτες τύπου 1.

Όμως

$$E[Q] = \frac{\rho_1+\rho_2}{1-\rho_1+\rho_2}, \quad E[Q_1]+E[Q_2]=E[Q]$$

και

$$E[Q_1] = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}$$

δίνουν

$$E[Q_2] = \frac{\rho_1+\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2} - \frac{\rho_1}{1-\rho_1}.$$