Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I
Τελική εξέταση, 13 Ιουνίου 2016

Θέμα 1ο (4 βαθμοί) Σε ένα εστιατόριο καταφθάνουν εσωτερικές παραγγελίες πελατών και εξωτερικές παραγγελίες για παράδοση κατ' οίκον (delivery) με ρυθμούς 5 και 15 παραγγελίες ανά ώρα αντίστοιχα, σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

(1) Η δεσμευμένη πιθανότητα στην πρώτη μισή ώρα λειτουργίας του εστιατορίου να έφθασαν 2 εσωτερικές παραγγελίες, δεδομένου ότι στην πρώτη ώρα λειτουργίας του εστιατορίου έφθασαν 7 εσωτερικές και 13 εξωτερικές παραγγελίες.

(2) Η πιθανότητα από 10 διαδοχικές παραγγελίες, η πρώτη και η τέταρτη μόνο να προέρχονται από εσωτερικούς πελάτες.

(3) Η δεσμευμένη πιθανότητα σε μια ώρα λειτουργίας να υπάρχουν k εσωτερικές παραγγελίες πελατών, δεδομένου ότι στην ίδια ώρα έχουν έρθει συνολικά 35 παραγγελίες.

(4) Ο δεσμευμένος μέσος χρόνος εμφάνισης της πρώτης εσωτερικής παραγγελίας, δεδομένου ότι στην πρώτη ώρα λειτουργίας του καταστήματος έφθασαν συνολικά 35 παραγγελίες.

Θέμα 2ο (3 βαθμοί): Μια μηχανή επεξεργασίας προϊόντων λειτουργεί με τον εξής τρόπο: Κάθε κύκλος λειτουργίας της διαιρείται σε δυο περιόδους. Η πρώτη περίοδος είναι η περίοδος παραλαβής παραγγελιών, της οποίας η χρονική διάρκεια ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και η δεύτερη περίοδος είναι η περίοδος διεκπεραίωσης παραγγελιών. Κατά την περίοδο παραλαβής, οι παραγγελίες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson ρυθμού μ, αλλά δεν γίνεται καμιά διεκπεραίωση παραγγελίας. Κατά την περίοδο της διεκπεραίωσης δεν φθάνουν νέες παραγγελίες, αλλά οι παραγγελίες που έχουν φθάσει κατά την περίοδο παραλαβής, αρχίζουν να εξυπηρετούνται μία-μία. Οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παράμετρο ν. Η περίοδος διεκπεραίωσης τελειώνει όταν διεκπεραιωθούν όλες οι παραγγελίες που έχουν συσσωρευθεί κατά την περίοδο παραλαβής. Το σύστημα έχει κέρδος k για κάθε παραγγελία που διεκπεραιώνει και κόστος h για κάθε χρονική μονάδα διεκπεραίωσης παραγγελιών.

(1) Υπολογίστε την πιθανότητα σε μια περίοδο παραλαβής ενός κύκλου λειτουργίας του συστήματος να φθάσουν n παραγγελίες.

(2) Υπολογίστε τη μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας του συστήματος.

(3) Υπολογίστε το μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος ανά χρονική μονάδα από τη λειτουργία αυτού του συστήματος.

Θέμα 3ο (2 βαθμοί): Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $G(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty$, $k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1, 2, \ldots$ ($S_0 = 0$) και $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ η αντίστοιχη ανανεωτική διαδικασία. Έστω $X(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ ο t-εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος τη στιγμή t (δηλαδή ο χρόνος από το αμέσως προηγούμενο γεγονός πριν από τη στιγμή t έως το αμέσως επόμενο γεγονός μετά τη χρονική στιγμή t). Να γραφεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $E[(X(t))^2]$, να λυθεί και να υπολογιστεί το $\lim_{t\to\infty} E[(X(t))^2]$.

Θέμα 4ο (2 βαθμοί): Θεωρούμε την $M/M/1/2$ ουρά, με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 1 υπηρέτη και χωρητικότητα 2 (δηλαδή το πολύ ένας πελάτης μπορεί να εξυπηρετείται και άλλος ένας να περιμένει στο χώρο αναμονής).

(1) Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (p_n), σε συνεχή χρόνο.

(2) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους πελάτες (οι πελάτες που αποχωρούν άμεσα λογίζονται με χρόνο παραμονής 0). Επίσης, να βρεθεί η μέση διάρκεια του κύκλου απασχόλησης του συστήματος.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα I

Τελική εξέταση, 13 Ιουνίου 2016, Ακαδ. έτος 2015-2016

Λύσεις

Θέμα 1ο:

Έστω $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ στοχαστικές διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = 15$ (t σε ώρες) που μετρούν τις εσωτερικές και εξωτερικές παραγγελίες αντίστοιχα. Οι $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ είναι ανεξάρτητες.

Έστω $\{N(t)\}$ η υπέρθεση των $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}$ και $I_1, I_2, \dots$ οι τύποι των γεγονότων της. Έστω τέλος $S_i^{(k)}$ ο χρόνος του k-οστού γεγονότος της $\{N_i(t)\}$, $i = 1, 2$ και $k = 1, 2, \dots$

(1) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(N_1(1/2) = 2 \mid N_1(1) = 7, N_2(1) = 13)$$

$$= \frac{P(N_1(\frac{1}{2}) = 2, N_1(1) = 7, N_2(1) = 13)}{P(N_1(1) = 7)\, P(N_2(1) = 13)}$$

$$\overset{\{N_1(t)\},\{N_2(t)\}\ \text{ανεξ.}}{=} \frac{P(N_1(\frac{1}{2}) = 2, N_1(1) = 7)\, P(\cancel{N_2(1) = 13})}{P(N_1(1) = 7)\, P(\cancel{N_2(1) = 13})}$$

$$= \frac{P(N_1(\frac{1}{2}) = 2, N_1(1) - N_1(\frac{1}{2}) = 5)}{P(N_1(1) = 7)}$$

$$\overset{\text{ανεξ. προσαυξ.}}{=} \frac{P(N_1(\frac{1}{2}) = 2)\, P(N_1(1) - N_1(\frac{1}{2}) = 5)}{P(N_1(1) = 7)}$$

$$\overset{\text{ομογ. προσαυξ.}}{=} \frac{e^{-5/2} \frac{(5/2)^2}{2!}\, e^{-5/2} \frac{(5/2)^5}{5!}}{e^{-5} \frac{5^7}{7!}}$$

$$= \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

(2) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(I_1 = 1, I_2 = I_3 = 2, I_4 = 1, I_5 = \dots = I_{10} = 2)$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} P(I_1 = 1)\, P(I_2 = 2)\, P(I_3 = 2)\, P(I_4 = 1)\, P(I_5 = 2) \cdots P(I_{10} = 2)$$

$$= \left(\frac{5}{5+15}\right)^2 \left(\frac{15}{5+15}\right)^8$$

$$= 5^2 \cdot 15^8 / 20^{10} = 3^8 / 4^{10}.$$

(3) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(N_1(1)=k \mid N(1)=35)$$
$$= \frac{P(N_1(1)=k,\ N(1)=35)}{P(N(1)=35)}$$
$$= \frac{P(N_1(1)=k,\ N_2(1)=35-k)}{P(N(1)=35)}$$
$$\overset{\{N_1(t)\},\{N_2(t)\}\ \text{ανεξ}}{=} \frac{P(N_1(1)=k)\,P(N_2(1)=35-k)}{P(N(1)=35)}$$
$$= \frac{e^{-5}\, 5^k/k!\ e^{-15}\cdot \frac{15^{35-k}}{(35-k)!}}{e^{-20}\,\frac{20^{35}}{35!}}$$
$$= \binom{35}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{35-k}, \quad 0 \le k \le 35.$$

(4) Ο ζητούμενος μέσος χρόνος είναι

$$E[S_1^{(1)} \mid N(1)=35]$$
$$= \sum_{k=0}^{35} E[S_1^{(1)} \mid N_1(1)=k,\ N(1)=35]\,P(N_1(1)=k \mid N(1)=35)$$
$$= \sum_{k=0}^{35} E[S_1^{(1)} \mid N_1(1)=k,\ N_2(1)=35-k]\,P(N_1(1)=k \mid N(1)=35)$$
$$\overset{\{N_1(t)\},\{N_2(t)\}\ \text{ανεξ}}{=} \sum_{k=0}^{35} E[S_1^{(1)} \mid N_1(1)=k]\,P(N_1(1)=k \mid N(1)=35)$$
$$\overset{\text{Θ. Campbell και (3)}}{=} \sum_{k=0}^{35} \frac{1\cdot 1}{k+1}\binom{35}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{35-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{35} \frac{35!}{(k+1)!\,(35-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{35-k}$$
$$= \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{35}\binom{36}{k+1}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{35-k}$$
$$= \frac{1}{36}\sum_{j=1}^{36}\binom{36}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^{j-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{36-j}$$
$$= \frac{4}{36}\sum_{j=1}^{36}\binom{36}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^{j}\left(\frac{3}{4}\right)^{36-j}$$
$$= \frac{4}{36}\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{36} - \binom{36}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{36}\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{36}\right).$$

Θέμα 2ο:

(1) Έστω $X \sim Exp(\lambda)$ μια περίοδος παραλαβής παραγγελιών και $N(t)$ η σ.δ. Poisson των αφίξεων παραγγελιών κατά τη διάρκεια της X.

Αν Y είναι το πλήθος των παραγγελιών που φθάνουν σε έναν κύκλο λειτουργίας τότε $Y = N(X)$ και άρα

$$P(Y=n) = P(N(X)=n) = \int_0^\infty P(N(t)=n \mid X=t)\, dF_X(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^n}{n!}\lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \frac{\lambda \mu^n}{n!}\int_0^\infty t^n e^{-(\lambda+\mu)t} dt$$

$$= \frac{\lambda\mu^n}{n!}\cdot\frac{n!}{(\lambda+\mu)^{n+1}} \underbrace{\int_0^\infty \underbrace{\frac{(\lambda+\mu)^{n+1}}{n!} t^n e^{-(\lambda+\mu)t}}_{\text{σ.π.π. } Erlang(n+1,\lambda+\mu)} dt}_{=1}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

(2) Η διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας με το συμβολισμό του (1) είναι

$$X + \sum_{i=1}^{N(X)} Z_i,$$

όπου $X \sim Exp(\lambda)$, $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού μ και $Z_i \sim Exp(\nu)$ ανεξάρτητες.

Άρα η μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας είναι

$$E\left[X + \sum_{i=1}^{N(X)} Z_i\right] = E[X] + E\left[\sum_{i=1}^{N(X)} Z_i\right]$$

$$= E[X] + E[N(X)]E[Z_i] = E[X] + E[E[N(X)\mid X]]E[Z_i]$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \mu\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\nu} = \frac{\nu+\mu}{\lambda\nu}.$$

(3) Το κέρδος σε ένα κύκλο λειτουργίας του συστήματος είναι $k \cdot N(X) + h \sum_{i=1}^{N(X)} Z_i$, οπότε όμοια με το (2):

$$E\left[kN(X) - h\sum_{i=1}^{N(X)} Z_i\right] = \frac{k\mu}{\lambda} - \frac{h\mu}{\lambda\nu} = \frac{k\mu\nu - h\mu}{\lambda\nu}$$

Από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με αμοιβές το μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος ανά χρονική μονάδα από τη λειτουργία αυτού του συστήματος είναι το μέσο κέρδος σε ένα κύκλο διά τη μέση διάρκεια του κύκλου, δηλαδή

$$\frac{\dfrac{k\mu\nu - h\mu}{\lambda\nu}}{\dfrac{\nu+\mu}{\lambda\nu}} = \frac{k\mu\nu - h\mu}{\nu+\mu}.$$

Θέμα 3ο:

Έχουμε για την $H(t) = E[(X(t))^2]$ ότι

$$H(t) = E[(X(t))^2] = \int_0^\infty E[(X(t))^2 \mid X_1 = x]\, dG(x)$$

Όμως

$$E[(X(t))^2 \mid X_1 = x] = \begin{cases} x^2, & \text{αν } t < x \\ E[(X(t-x))^2], & \text{αν } t \geq x. \end{cases}$$

Οπότε

$$H(t) = \int_t^\infty x^2\, dG(x) + \int_0^t H(t-x)\, dG(x).$$

Η λύση της είναι

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_G(x)$$

όπου

$$D(t) = \int_t^\infty x^2\, dG(x), \quad M_G(x) = \sum_{n=1}^\infty G^{*n}(x)$$

Η $D(t)$ είναι φθίνουσα, μη-αρνητική και $\int_0^\infty |D(t)|\, dt < \infty$.

Πράγματι

$$\int_0^\infty |D(t)|dt = \int_0^\infty \int_t^\infty x^2 \, dG(x)\, dt = \int_0^\infty x^2 \int_0^x dt\, dG(x)$$

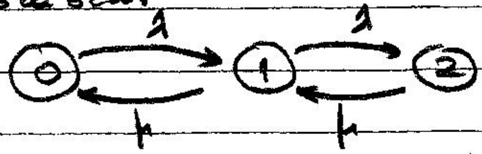
$$= \int_0^\infty x^3 dG(x) = \mu_3$$

Από Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

$$\lim_{t\to\infty} E[(X(t))^2] = \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)dt}{\mu_1} = \frac{\mu_3}{\mu_1}.$$

Θέμα 4ο:

(1) Το σύστημα παριστάνεται ως ένα σύστημα 3 καταστάσεων



Εφαρμόζοντας το Θ. Little βλέποντας ως σύστημα την κατάσταση i έχουμε

$$E[Q_i] = \lambda_i E[S_i]$$

που δίνει

$$p_0 = \mu p_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda p_0 = \mu p_1$$

$$p_1 = (\lambda p_0 + \mu p_2)\frac{1}{\lambda+\mu} \Rightarrow (\lambda+\mu)p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2$$

$$p_2 = \lambda p_1 \cdot \frac{1}{\mu} \Rightarrow \mu p_2 = \lambda p_1$$

οπότε

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda}{\mu} p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0.$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_0\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right) = 1$$

Τελικά:

$$p_i = \frac{\rho^i}{1+\rho+\rho^2}, \quad i = 0,1,2 \quad \text{με } \rho = \lambda/\mu.$$

(2) Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα δεσμεύοντας στον αριθμό των πελατών που βρίσκει φθάνοντας είναι

$$E[S] = \sum_{i=0}^2 r_i E[S|Q^- = i] \overset{PASTA}{=} \sum_{i=0}^2 p_i E[S|Q^- = i]$$

$$= p_0 \cdot \frac{1}{\mu} + p_1 \cdot \frac{2}{\mu} + p_2 \cdot 0 = \frac{1+2\rho}{\mu(1+\rho+\rho^2)}.$$

Έστω I η περίοδος αργίας του συστήματος και Z ο κύκλος απασχόλησης. Από Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με αμοιβές έχουμε

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{E[I]}{p_0} = \frac{1+\rho+\rho^2}{\lambda}.$$