Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Τελική εξέταση, 12 Ιουνίου 2018

Θέμα 1ο: Θεωρούμε δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ με ρυθμούς λ και μ αντίστοιχα. Έστω $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους.

(1) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός της $\{N_1(t)\}$ να είναι το n-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$.
(2) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\Pr[N_1(t) = 1|N(t) = n]$.
(3) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\Pr[N(t) = n|N_2(t/2) = n-1]$.
(4) (0.5 β.) Βρείτε ποιά κατανομή ακολουθεί η $N(t) - N_2(t/2)$.
(5) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $Cov(N_1(t), N(t))$.

Θέμα 2ο: Θεωρούμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ με κατανομή $F_X(x)$ και χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$. Δοθείσης μιας χρονικής στιγμής t, $S_{N(t)}$ και $S_{N(t)+1}$ είναι οι χρόνοι του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t (με $S_{N(t)} = 0$ αν $N(t) = 0$) και του πρώτου χρόνου γεγονότος μετά τη χρονική στιγμή t. Έστω

$$h(t) = \frac{E[S_{N(t)}] + E[S_{N(t)+1}]}{2}.$$

(1) (1.0 β.) Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$.
(2) (1.5 β.) Να βρεθεί η $h(t)$ σε κλειστή μορφή, όταν η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.

Θέμα 3ο: Θεωρούμε μια μηχανή επεξεργασίας προϊόντων που λειτουργεί με τον εξής τρόπο: Στην αρχή κάθε κύκλου λειτουργίας της φθάνει μια παρτίδα προϊόντων προς επεξεργασία, η οποία περιέχει 2, 3 ή 4 προϊόντα με πιθανότητες 1/2, 1/3 και 1/6 αντίστοιχα. Κατόπιν τα προϊόντα αυτά επεξεργάζονται από τη μηχανή ένα-ένα. Οι διαδοχικοί χρόνοι επεξεργασίας κάθε προϊόντος είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 2 χρονικές μονάδες. Κάθε προϊόν που διεκπεραιώνεται αναχωρεί άμεσα από το σύστημα. Μόλις ολοκληρωθεί η επεξεργασία όλων των προϊόντων μιας παρτίδας ο αντίστοιχος κύκλος λειτουργίας τελειώνει και αρχίζει ένας νέος με την άφιξη μιας νέας παρτίδας προϊόντων κ.ο.κ. Το σύστημα έχει κέρδος 10 χρηματικών μονάδων για κάθε προϊόν, ενώ σωρρεύει κόστος αποθήκευσης 1 χρηματικής μονάδας ανά προϊόν και χρονική μονάδα.

(1) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας του συστήματος.
(2) (1.5 β.) Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος.
(3) (0.5 β.) Αν μετά τη διεκπεραίωση όλων των προϊόντων μιας παρτίδας και πριν την αρχή του επόμενου κύκλου λειτουργίας, το σύστημα χρειάζεται ρύθμιση με πιθανότητα 1/3 και κάθε περίοδος ρύθμισης διαρκεί 3 χρονικές μονάδες, να υπολογιστούν η μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας και ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος. Υποθέστε ότι κάθε ρύθμιση κοστίζει 6 χρηματικές μονάδες και κατά τη διάρκειά της το σύστημα παραμένει κενό, οπότε δεν σωρεύει κόστος αποθήκευσης.

Θέμα 4ο: Θεωρούμε την $M/M/1$ ουρά, με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 1 υπηρέτη, άπειρη χωρητικότητα και πειθαρχία ουράς FCFS. Θεωρούμε ότι κάθε πελάτης που φθάνει στο σύστημα εισέρχεται σε αυτό με πιθανότητα q.

(1) (1 β.) Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (p_n), σε συνεχή χρόνο.
(2) (1 β.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός αφικνούμενου πελάτη στο σύστημα (λογίζοντας 0 το χρόνο παραμονής των πελατών που αναχωρούν αμέσως) καθώς και ο μέσος χρόνος παραμονής ενός εισερχόμενου πελάτη στο σύστημα.
(3) (0.5 β.) Να βρεθεί το μέσο πλήθος πελατών που φθάνουν στο σύστημα και αναχωρούν άμεσα μεταξύ δυο διαδοχικών εισόδων πελατών στο σύστημα.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι, 12/6/2018

Λύσεις:

Θέμα 1ο:

(1) Κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ προέρχεται από την $\{N_1(t)\}$ με πιθανότητα $\lambda/\lambda+\mu$ ή από την $\{N_2(t)\}$ με πιθανότητα $\mu/\lambda+\mu$. Επομένως

Pr[1ο γεγονός της $\{N_1(t)\}$ είναι το n-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$]

= Pr[τα γεγονότα $1, 2, \ldots, n-1$ της $\{N(t)\}$ προέρχονται από την $\{N_2(t)\}$ και το γεγονός n από την $N_1(t)$]

$$= \underbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu}{\lambda+\mu}}_{n-1 \text{ όροι}}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

(2) $\Pr[N_1(t)=1 \mid N(t)=n] = \Pr[N_1(t)=1, N(t)=n]/\Pr[N(t)=n]$

$= \Pr[N_1(t)=1, N(t)-N_1(t)=n-1]/\Pr[N(t)=n]$

$= \Pr[N_1(t)=1, N_2(t)=n-1]/\Pr[N(t)=n]$

$= \Pr[N_1(t)=1]\Pr[N_2(t)=n-1]/\Pr[N(t)=n]$

$$= \cancel{e^{-\lambda t}}\frac{(\lambda t)^1}{1!}\cdot\cancel{e^{-\mu t}}\frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big/\left\{\cancel{e^{-(\lambda+\mu)t}}\frac{[(\lambda+\mu)t]^n}{n!}\right\}$$

$$= \frac{n!}{1!(n-1)!}\cdot\frac{(\lambda t)^1(\mu t)^{n-1}}{[(\lambda+\mu)t]^n}$$

$$= n\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

(3) $\Pr[N(t)=n \mid N_2(\tfrac{t}{2})=n-1]$

$= \Pr[N_1(t)+N_2(t)=n \mid N_2(\tfrac{t}{2})=n-1]$

$= \Pr[N_1(t)+N_2(t)-N_2(\tfrac{t}{2}) = n-(n-1) \mid N_2(\tfrac{t}{2})=n-1]$

$= \Pr[N_1(t)+N_2(t)-N_2(\tfrac{t}{2})=1 \mid N_2(\tfrac{t}{2})=n-1]$

- Λόγω ανεξαρτησίας των $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$ και των ανεξ. προσαυξ. της $\{N_2(t)\}$ η πιθανότητα είναι ίση με

$\Pr[N_1(t)+N_2(t)-N_2(\tfrac{t}{2})=1]$

$= \Pr[N_1(t)=0, N_2(t)-N_2(\tfrac{t}{2})=1] + \Pr[N_1(t)=1, N_2(t)-N_2(\tfrac{t}{2})=0]$

$= \Pr[N_1(t)=0]\Pr[N_2(t)-N_2(\tfrac{t}{2})=1] + \Pr[N_1(t)=1]\Pr[N_2(t)-N_2(\tfrac{t}{2})=0]$

$= e^{-\lambda t}e^{-\mu t/2}\cdot\mu\frac{t}{2} + e^{-\lambda t}\cdot\lambda t\cdot e^{-\mu t/2}$

$= e^{-(\lambda+\frac{\mu}{2})t}(\lambda+\frac{\mu}{2})t.$

(4) $N(t)-N_2(\tfrac{t}{2}) = N_1(t)+N_2(t)-N_2(\tfrac{t}{2})$. Η $N_1(t)$ ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λt, ενώ η $N_2(t)-N_2(\tfrac{t}{2})$ κατανομή Poisson

με $\mu\frac{t}{2}$ και είναι ανεξάρτητες. Επομένως η $N(t) - N_2(\frac{t}{2})$ ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda t + \frac{\mu}{2}t$.

(5) Για τη συνδιακύμανση έχουμε:

$$\begin{aligned} Cov(N_1(t), N(t)) &= Cov(N_1(t), N_1(t)+N_2(t)) \\ &= Cov(N_1(t), N_1(t)) + \cancel{Cov(N_1(t), N_2(t))}^{\,0} \text{ (λόγω ανεξ.)} \\ &= Var(N_1(t)) \\ &= \lambda t, \text{ αφού } N_1(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t). \end{aligned}$$

Θέμα 2º:

(1) Χρησιμοποιώ ανανεωτικό συλλογισμό

$$h(t) = \frac{E[S_{N(t)}] + E[S_{N(t)+1}]}{2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{E[S_{N(t)} \mid S_1 = u] + E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]}{2} \, dF_X(u)$$

Όμως

$$E[S_{N(t)} \mid S_1 = u] = \begin{cases} 0, & u > t \\ u + E[S_{N(t-u)}], & u \le t \end{cases}$$

$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = \begin{cases} u, & u > t \\ u + E[S_{N(t-u)+1}], & u \le t \end{cases}$$

οπότε

$$h(t) = \int_t^\infty \frac{0+u}{2} \, dF_X(u) + \int_0^t \frac{u + E[S_{N(t-u)}] + u + E[S_{N(t-u)+1}]}{2} \, dF_X(u)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_t^\infty u \, dF_X(u) + \int_0^t u \, dF_X(u)}_{d(t)} + \int_0^t h(t-u) \, dF_X(u)$$

Αυτή είναι η ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$. Η $d(t)$ γράφεται και ως

$$d(t) = \frac{1}{2}\int_t^\infty u \, dF_X(u) + \int_0^t u \, dF_X(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u \, dF_X(u) + \frac{1}{2}\int_0^t u \, dF_X(u)$$

$$= \frac{1}{2}E[X] + \frac{1}{2}\int_0^t u \, dF_X(u)$$

(2) Στην περίπτωση που η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson ρυθμού λ έχουμε $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$, $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \ge 0$, $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ και $m_X(t) = E[N(t)] = \lambda t$. Τότε

$$d(t) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}\int_0^t \lambda u e^{-\lambda u}\,du$$

$$= \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda}\underbrace{\int_0^t \frac{\lambda^2}{(2-1)!}\,u^{2-1}e^{-\lambda u}\,du}_{\begin{array}{l}\Pr[S_2 \le t] \\ = \Pr[N(t) \ge 2] \\ = 1 - \Pr[N(t)=0] - \Pr[N(t)=1] \\ = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}\end{array}}$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda} - \frac{t\,e^{-\lambda t}}{2}.$$

Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης είναι

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\,dm_X(u) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\,\lambda du = d(t) + \lambda\int_0^t d(u)du$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda} - \frac{te^{-\lambda t}}{2} + \lambda\int_0^t\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda u}}{2\lambda} - \frac{ue^{-\lambda u}}{2}\right)du$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda} - \frac{te^{-\lambda t}}{2} + t - \int_0^t \frac{e^{-\lambda u}}{2}du - \int_0^t \frac{\lambda u e^{-\lambda u}}{2}du$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda} - \frac{te^{-\lambda t}}{2} + t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{2\lambda} - \frac{1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t}}{2\lambda}$$

$$= \cancel{\frac{1}{\lambda}} - \cancel{\frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}} - \frac{te^{-\lambda t}}{2} + t - \cancel{\frac{1}{2\lambda}} + \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda} - \cancel{\frac{1}{2\lambda}} + \cancel{\frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}} + \frac{te^{-\lambda t}}{2}$$

$$= t + \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}.$$

Εναλλακτικά, η $h(t)$ μπορεί να υπολογιστεί χωρίς τη λύση ανανεωτικής εξίσωσης, αλλά με το Θ Campbell:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Pr[N(t)=n]\;\frac{E[S_{N(t)}\,|\,N(t)=n] + E[S_{N(t)+1}\,|\,N(t)=n]}{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot\frac{\frac{nt}{n+1} + t + \frac{1}{\lambda}}{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\left(t + \frac{1}{2\lambda} - \frac{t}{2(n+1)}\right)$$

$$= t + \frac{1}{2\lambda} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n t}{2(n+1)!} = t + \frac{1}{2\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= t + \frac{1}{2\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}\left(e^{\lambda t} - 1\right) = t + \frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}.$$

Θέμα 3ο:

(1) Αν το μέγεθος της παρτίδας που φθάνει στην αρχή ενός κύκλου είναι k ($k=2,3$ ή 4) τότε η χρονική διάρκεια του κύκλου είναι $2k$ (αφού χρειάζονται 2 χρονικές μονάδες επεξεργ. για κάθε προϊόν). Επομένως αν K το μέγεθος της παρτίδας και X η χρονική διάρκεια ενός κύκλου έχουμε

$$E[X] = \sum_{k=2}^{4} Pr[K=k]\, E[X|K=k]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 4 = 2+2+\frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

(2) Αν C το κέρδος σε έναν κύκλο, έχουμε

$$E[C] = \sum_{k=2}^{4} Pr[K=k]\, E[C|K=k].$$

Εδώ έχουμε

$$E[C|K=2] = \underbrace{2\cdot 10}_{\text{κέρδος από τα δυό προϊόντα}} - 1\cdot\underbrace{(2\cdot 2 + 2\cdot 1)}_{\text{συνολικός χρόνος αποθήκευσης προϊόντων}} = 20-6=14$$

και ομοίως

$$E[C|K=3] = 3\cdot 10 - 1\cdot(2\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 1) = 30-12=18$$
$$E[C|K=4] = 4\cdot 10 - 1\cdot(2\cdot 4 + 2\cdot 3 + 2\cdot 2 + 2\cdot 1) = 40-20=20$$

Άρα

$$E[C] = \frac{1}{2}\cdot 14 + \frac{1}{3}\cdot 18 + \frac{1}{6}\cdot 20 = \frac{49}{3}.$$

Αν $C(t)$ το κέρδος ως τη χρονική στιγμή t και

X_n: η διάρκεια του n-οστού κύκλου

C_n: το κέρδος στον n-οστό κύκλο

είναι φανερό ότι τα $\{(X_n, C_n): n\geq 1\}$ είναι ανεξ. και ισόνομα αφού εξαρτώνται από το μέγεθος της παρτίδας και τους αντίστοιχους χρόνους επεξ. σε κάθε κύκλο. Επομένως το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη είναι εφαρμόσιμο και έχουμε

Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους συστήματος $= \lim_{t\to\infty} \dfrac{E[C(t)]}{t} = \dfrac{E[C]}{E[X]} = \dfrac{49/3}{16/3} = \dfrac{49}{16}.$

(3) Έστω X', C' η χρονική διάρκεια και το αντίστοιχο κέρδος στο τροποποιημένο μοντέλο. Τότε $E[X'] = E[X] + \frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{19}{3}$

$E[C'] = E[C] - \frac{1}{3}\cdot 6 = \frac{43}{3}$. Άρα $\lim_{t\to\infty} \dfrac{E[C'(t)]}{t} = \dfrac{E[C']}{E[X']} = \dfrac{43}{19}.$

-4-

Θέμα 4ο:

(1) Αφού κάθε πελάτης εισέρχεται στο σύστημα με πιθ. q από το θεώρημα διάσπασης της διαδικασίας Poisson έχουμε ότι η διαδικασία των εισερχόμενων πελατών είναι Poisson με ρυθμό λq. Άρα έχουμε M/M/1 ουρά με ρυθμό πραγματικών αφίξεων λq και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Ο αριθμός των πελατών είναι αλυσίδα γέννησης-θανάτου με διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda q"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda q"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda q"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Επομένως έχουμε

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda q)^n}{\mu^n} = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda q/\mu}, & \text{αν } \lambda q < \mu \\ \infty, & \text{αν } \lambda q \geq \mu \end{cases}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές αν $\lambda q < \mu$. Τότε

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} B = \left(1 - \frac{\lambda q}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda q}{\mu}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(2) Μπορούμε να βρούμε το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα από τη σχέση

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(1 - \frac{\lambda q}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda q}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda q}{\mu - \lambda q}$$

Από το νόμο του Little έχουμε

$$E[Q] = \underbrace{\lambda_{\alpha\varphi\iota\kappa\nu}}_{=\lambda} E[S_{\alpha\varphi\iota\kappa\nu}] \Rightarrow E[S_{\alpha\varphi\iota\kappa\nu}] = \frac{q}{\mu - \lambda q}$$

Για τους εισερχόμενους, επίσης από το νόμο του Little

$$E[Q] = \underbrace{\lambda_{\varepsilon\iota\sigma\varepsilon\rho\chi}}_{=\lambda q} E[S_{\varepsilon\iota\sigma\varepsilon\rho\chi}] \Rightarrow E[S_{\varepsilon\iota\sigma\varepsilon\rho\chi}] = \frac{1}{\mu - \lambda q}$$

(3) Από τη στιγμή που εισέρχεται πελάτης μέχρι την επόμενη που θα εισέλθει ο χρόνος είναι $Exp(\lambda q)$ (ενδιάμ. χρόνος γεγονότων σε διαδ. Poisson ρυθμού λq). Στο διάστημα αυτό οι πελάτες που φθάνουν και δεν εισέρχονται φθάνουν σύμφωνα με μια Poisson με ρυθμό $\lambda(1-q)$.

Άρα ζητάμε το $E[N(X)]$ όπου $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda(1-q)t)$

και $X \sim Exp(\lambda q)$. Είναι

$$E[N(X)] = \int_0^\infty E[N(x) \mid X = x]\, \lambda q e^{-\lambda q x} dx$$

$$= \int_0^\infty \lambda(1-q) x\, \lambda q e^{-\lambda q x} dx$$

$$= \lambda(1-q) E[X] = \lambda(1-q) \cdot \frac{1}{\lambda q} = \frac{1-q}{q}.$$

Εναλλακτικά, έστω ότι μόλις έχει εισέρθει πελάτης. Η πιθανότητα να μεσολαβήσουν k πελάτες μέχρι να έρθει ο επόμενος πελάτης που θα εισέλθει είναι

$$\Pr[N = k] = (1-q)^k q, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ζητάμε το $E[N]$. Είναι

$$E[N] = \sum_{k=0}^\infty k (1-q)^k q$$

Αλλά

$$\sum_{k=0}^\infty (1-q)^k = \frac{1}{1-(1-q)} = \frac{1}{q}$$

$$\overset{d/dq}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^\infty k (1-q)^{k-1} (-1) = -\frac{1}{q^2}$$

$$\overset{(-1)(1-q)q}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^\infty k (1-q)^k q = \frac{\cancel{q}(1-q)}{q^{\cancel{2}}} = \frac{1-q}{q}$$

Εναλλακτική για το (2) με Ανάλυση Μέσης Τιμής:

$$E[Q] = \lambda E[S_{αφικν}]$$

$$E[S_{αφικν}] = (1-q) \cdot 0 + q \sum_{n=0}^\infty \Pr[Q^- = n] \frac{n+1}{\mu}$$

$$= q \frac{E[Q^-] + 1}{\mu} \underset{\text{PASTA}}{=} q \frac{E[Q] + 1}{\mu}$$

Άρα

$$E[S_{αφικν}] = \frac{E[Q]}{\lambda} = \frac{q(E[Q]+1)}{\mu} \Longrightarrow E[Q] = \frac{\frac{\lambda q}{\mu}}{1 - \frac{\lambda q}{\mu}} = \frac{\lambda q}{\mu - \lambda q}$$

και μετά συνεχίζουμε όπως πριν.