Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα - Ιούνιος 2022

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ____ **Α.Μ:** ____________

ΟΔΗΓΙΕΣ

(1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

(2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί.

(3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας και στα θέματα. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.

(4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).

(5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 1 ώρα. **Καλή Επιτυχία!**

ΘΕΜΑ 1. Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο μιας τράπεζας φτάνουν κλήσεις σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 50 ανά ώρα. Μια κλήση είναι για θέματα τεχνικής υποστήριξης και ebanking με πιθανότητα 40%, για εργασίες τραπεζικού τύπου με πιθανότητα 50% και για φορολογικά θέματα με πιθανότητα 10%. Να υπολογιστούν:

(α) Η πιθανότητα την πρώτη ώρα να ήρθαν 25 τεχνικές κλήσεις, αν είναι γνωστό ότι στις δύο πρώτες ώρες ήρθαν 40 τεχνικές κλήσεις.

(β) Ο μέσος χρόνος άφιξης της κάθε κλήσης, αν είναι γνωστό ότι στα πρώτα 20 λεπτά ήρθαν 1 φορολογική και 2 τεχνικές κλήσεις.

(γ) Ο ελάχιστος αριθμός υπαλλήλων κάθε ειδικότητας που απαιτούνται έτσι ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές, αν είναι γνωστό ότι κάθε τεχνική κλήση απαιτεί κατά μέσο όρο 5 λεπτά εξυπηρέτησης, κάθε τραπεζική κλήση κατά μέσο όρο 4 λεπτά και κάθε φορολογική κλήση κατά μέσο όρο 4 λεπτά.

(Σημείωση) Κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί μόνο κλήσεις της ειδικότητάς του. Δεν απαιτείται να γίνουν αριθμητικοί υπολογισμοί στις τελικές εκφράσεις.

(Υπόδειξη) Για μια τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ ισχύει $E(X) = \int_0^\infty P(X > t)dt$.

ΘΕΜΑ 2.

(Μέρος Α) Έστω μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή N με συνάρτηση πιθανότητας $p_N(k) = P(N = k), k = 0, 1, \ldots$, μέση τιμή μ_N και διασπορά σ_N^2, και $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, ανεξάρτητες της N, με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2. Έστω $S = \sum_{i=1}^N X_i$.
Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της S συναρτήσει των μέσων τιμών και διασπορών των X και N.

(Μέρος Β) Ο αριθμός παραγγελιών που γίνονται σε ένα ηλεκτρονικό κατάστημα πωλήσεων στη διάρκεια μιας μέρας ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ. Οι αξίες $X_1, X_2, \ldots$ των παραγγελιών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες του N. Συγκεκριμένα, μια παραγγελία είναι με πιθανότητα p_1 μηδενικής αξίας λόγω έλλειψης προϊόντων, με πιθανότητα p_2 είναι για ένα συγκεκριμένο δημοφιλές προϊόν του οποίου η τιμή πώλησης είναι ίση με r, ενώ με πιθανότητα p_3 είναι για άλλα προϊόντα του καταστήματος και η αξία της είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ και μέση τιμή $r_1 = 1/\mu$, όπου $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

(Β1) Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, η μέση τιμή και η διασπορά της αξίας X μιας τυχαίας παραγγελίας.

(Β2) Έστω R η συνολική αξία των ημερήσιων παραγγελιών που λαμβάνει το κατάστημα. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της R.

Συνέχεια πίσω

ΘΕΜΑ 3. **(α)** Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Erlang(n, λ). Να αποδειχθεί ότι

$$E(X^k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda^k}.$$

(β) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \ldots$ που ακολουθούν κατανομή Erlang(n, λ) και χρόνους γεγονότων $S_n, n = 0, 1, \ldots$, $S_0 = 0$. Έστω επίσης

$$h(t) = E[(S_{N(t)+1} - S_{N(t)})^2].$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{(n+1)(n+2)}{\lambda^2}.$$

(Υπόδειξη) Διατυπώστε μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και εφαρμόστε το βασικό ανανεωτικό θεώρημα.

ΘΕΜΑ 4. Ένα μηχάνημα έχει χρόνο λειτουργίας που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Ένας τεχνικός κάνει διαδοχικές επιθεωρήσεις στο μηχάνημα και το αντικαθιστά αν είναι χαλασμένο. Οι επισκέψεις του τεχνικού γίνονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και η διαδικασία επιθεώρησης/αντικατάστασης είναι στιγμιαία. Το κόστος κάθε επίσκεψης του τεχνικού είναι ίσο με K (ανεξάρτητα αν γίνει ή όχι αντικατάσταση στο μηχάνημα). Αν το μηχάνημα χαλάσει πριν την επόμενη επιθεώρηση, τότε παραμένει εκτός λειτουργίας μέχρι να έρθει ο τεχνικός. Υπάρχει κόστος h ανά μονάδα χρόνου που το μηχάνημα βρίσκεται εκτός λειτουργίας, όπου $h > K\mu$.

(α) Να υπολογιστεί το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

(β) Να υπολογιστεί ο βέλτιστος ρυθμός επιθεωρήσεων λ που ελαχιστοποεί το μέσο κόστος του ερωτήματος (α).

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ η διαδικασία αφίξεων κλήσεων οποιουδήποτε τύπου, και $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$, $\{N_3(t)\}$ οι διαδικασίες αφίξεων κλήσεων τεχνικής υποστήριξης, τραπεζικών και φορολογικών, αντίστοιχα.

Η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 50$, ενώ από το Θεώρημα διάσπασης της διαδικασίας Poisson προκύπτει ότι οι $\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$, $\{N_3(t)\}$ είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_1 = 50 \times 0.4 = 20$, $\lambda_2 = 50 \times 0.5 = 25$ και $\lambda_3 = 50 \times 0.10 = 5$, αντίστοιχα.

(α) $P(N_1(1) = 25 \mid N_1(2) = 40) =$

$$\frac{P(N_1(1) = 25, N_1(2) = 40)}{P(N_1(2) = 40)} = \frac{P(N_1(1) = 25, N_1(2) - N_1(1) = 15)}{P(N_1(2) = 40)}$$

Οι $N_1(1)$, $N_1(2) - N_1(1)$ είναι ανεξάρτητες κ' ακολουθούν κατανομή Poisson (λ_1), επομένως

$$P(N_1(1)=25 \mid N_1(2)=40) = \frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{25}}{25!}\, e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{15}}{15!}}{e^{-2\lambda_1}\frac{(2\lambda_1)^{40}}{40!}}$$

$$= \frac{40!}{25!\,15!}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} = \binom{40}{25}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}.$$

(b) Έστω W_1^1, W_1^2 οι χρόνοι αφίξεων των δύο πρώτων τεχνικών κλήσεων. Σύμφωνα με τις ιδιότητες της διαδικασίας Poisson, δοθέντος ότι $N_1(1/3)=2$, οι W_1^1, W_1^2 ακολουθούν κατανομή δύο διατεταγμένων τμ $\sim \mathcal{U}(0,1/3)$ δηλαδή $W_1^1 = \min(U_1, U_2)$, $W_1^2 = \max(U_1, U_2)$, όπου U_1, U_2 ατμ $\sim \mathcal{U}(0,1/3)$

Για να βρούμε τις μέσες τιμές $E(W_1^1)$, $E(W_1^2)$ έχουμε

$$P(W_1^1 > t) = P(U_1 > t, U_2 > t) = P(U_1 > t)P(U_2 > t)$$

$$= \left(\frac{1/3 - t}{1/3}\right)^2 = (1-3t)^2, \quad 0 \le t \le 1/3$$

$$P(W_1^1 > t) = 0, \quad t > 1/3$$

Επομένως

$$E(W_1^1) = \int_0^\infty P(W_1^1 > t) = \int_0^{1/3} (1-3t)^2 dt$$

$$\overset{(s=1-3t)}{=} \int_0^1 \frac{1}{3} s^2 ds = \frac{1}{9} \Rightarrow E(W_1^1) = \frac{1}{9} hr = \frac{20}{3} min$$

Για την $W_1^2 = \max(U_1, U_2)$ έχουμε

$$P(W_1^2 \le t) = P(U_1 \le t) P(U_2 \le t) = \left(\frac{t}{1/3}\right)^2 = (3t)^2, \quad 0 \le t \le 1/3$$

$$\Rightarrow P(W_1^2 > t) = \begin{cases} 1-(3t)^2, & 0 \le t \le 1/3 \\ 0, & t > 1/3 \end{cases}$$

Επομένως $E(W_1^2) = \int_0^{1/3} [1-(3t)^2] dt = \frac{1}{3} - \int_0^{1/3} (3t)^2 dt$

$$= \frac{1}{3} - 9\int_0^{1/3} t^2 dt = \frac{1}{3} - 9 \cdot \frac{(1/3)^3}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow E(W_1^2) = \frac{2}{9} hr = \frac{40}{3} min$$

Επίσης έστω W_3' ο χρόνος άφιξης της πρώτης φορολογικής κλήσης στο διάστημα 20 λεπτών ($1/3$ hr)

Δεδομένου ότι $N_3(1/3) = 1$

η κατανομή της W_3' είναι ομοιόμορφη $U(0, 1/3)$

επομένως $E(W_3') = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ hr $= 10$ min.

(γ) Οι μέσοι χρόνοι εξυπηρέτησης ενός πελάτη κάθε κατηγορίας (σε ώρες) είναι

$b_1 = \frac{1}{12}$, $b_2 = \frac{1}{15}$, $b_3 = \frac{1}{15}$

Επειδή κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί μόνο κλήσεις της ειδικότητάς του, έχουμε 3 ανεξάρτητες ουρές αναμονής με $(\lambda_1=20,\ b_1=1/12)$, $(\lambda_2=25,\ b_2=\frac{1}{15})$, $(\lambda_3=10,\ b_3=1/15)$. Επομένως για να είναι κάθε μια από τις ουρές ευσταθής θα πρέπει

$$\rho_1=\frac{\lambda_1 b_1}{c_1}<1 \Rightarrow c_1>\lambda_1 b_1=\frac{20}{12} \Rightarrow \boxed{c_1\geq 2}$$

$$\rho_2=\frac{\lambda_2 b_2}{c_2}<1 \Rightarrow c_2>\lambda_2 b_2=\frac{25}{15} \Rightarrow \boxed{c_2\geq 2}$$

$$\rho_3=\frac{\lambda_3 b_3}{c_3}<1 \Rightarrow c_3>\lambda_3 b_3=\frac{10}{15} \Rightarrow \boxed{c_3\geq 1}$$

ΘΕΜΑ 2

(A) $S_N=X_1+\dots+X_N$

$$E(S_N)=\sum_{n=0}^{\infty}E(S_N|N=n)\,P(N=n)=\sum_{n=0}^{\infty}E(X_1+\dots+X_n|N=n)\,P(N=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}n\,E(X_1)\cdot P(N=n)=E(X)\cdot E(N)=\mu_x\cdot\mu_N$$

$$E(S_N^2)=\sum_{n=0}^{\infty}E\left(S_N^2|N=n\right)P(N=n)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}E(S_n^2)\,P(N=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[Var(S_n)+(ES_n)^2\right]P(N=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[n\sigma_x^2+n^2\mu_x^2\right]P(N=n)$$

$$= \sigma_X^2 \sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n) + \mu_X^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N=n)$$

$$= \sigma_X^2 \mu_N + \mu_X^2 E(N^2)$$

$$Var(S_N) = E(S_N^2) - (ES_N)^2 =$$

$$= \sigma_X^2 \mu_N + \mu_X^2 E(N^2) - \mu_X^2 \mu_N^2 =$$

$$= \sigma_X^2 \mu_N + \mu_X^2 (EN^2 - \mu_N^2) = \sigma_X^2 \mu_N + \mu_X^2 \sigma_N^2$$

B

B1

$$X = \begin{cases} Y_1, & \mu\pi\iota\vartheta. \quad p_1 \\ Y_2, & \mu\pi. \quad p_2 \\ Y_3, & \mu\pi \quad p_3 \end{cases}$$

όπου $Y_1 = 0$, $Y_2 = r$, $Y_3 \sim Exp(\mu)$

$$F_X(x) = P(X \le x) = p_1 P(Y_1 \le x) + p_2 P(Y_2 \le x) + p_3 P(Y_3 \le x)$$

όμως $P(Y_1 \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$

$$P(Y_3 \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$P(Y_2 \le x) = \begin{cases} 0, & x < r \\ 1, & x \ge r \end{cases}$$

Επομένως

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 , & x<0 \\ p_1 + p_3(1-e^{-\mu x}) , & 0 \le x < r \\ p_1 + p_2 + p_3(1-e^{-\mu x}) , & x \ge r \end{cases}$$

$$E(X) = p_1 E(Y_1) + p_2 E(Y_2) + p_3 E(Y_3)$$

$$= p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot r + p_3 \cdot \frac{1}{\mu} = p_2 r + \frac{p_3}{\mu}$$

$$E(X^2) = p_1 \cdot E(Y_1^2) + p_2 E(Y_2^2) + p_3 E(Y_3^2)$$

$$= p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot r^2 + p_3 \cdot \frac{2}{\mu^2} = p_2 r^2 + \frac{2p_3}{\mu^2} = \mu_x$$

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = p_2 r^2 + \frac{2p_3}{\mu^2} - \left(p_2 r + \frac{p_3}{\mu}\right)^2 = \sigma_X^2$$

B2 $R = X_1 + \dots + X_N$, όπου X όπως στο B_1

και $N \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \mu_N = \lambda, \ \sigma_N^2 = \lambda$.

Επομένως από το (A): $E(R) = \mu_N \mu_X = \lambda\left(p_2 r + \frac{p_3}{\mu}\right)$

$$Var(R) = \sigma_X^2 \mu_N + \mu_X^2 \sigma_N^2 = \lambda(\sigma_X^2 + \mu_X^2) = \lambda E(X^2) = \lambda\left(p_2 r^2 + \frac{2p_3}{\mu^2}\right)$$

ΘΕΜΑ 3 (α) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X

είναι $f_X(x) = \dfrac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, \quad x \geq 0$

Επομένως $E(X^k) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^k \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\, dx =$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n+k-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \frac{(n+k-1)!}{\lambda^{n+k}} \underbrace{\int \frac{\lambda^{n+k} x^{n+k-1} e^{-\lambda x}}{(n+k-1)!} dx}_{\text{σππ της } Erlang(n+k,\lambda)}$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{\lambda^k} \cdot 1 = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\, \lambda^k}$$

(β) $h(t) = E\left[\left(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}\right)^2\right]$

Δεσμεύοντας ως προς X_1 :

$$h(t) = \int_0^\infty E\left[\left[S_{N(t)+1} - S_{N(t)}\right]^2 \,\middle|\, X_1 = x\right] dF_X(x)$$

Για την $E\left[\left(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}\right)^2 \,\middle|\, X_1 = x\right]$ έχουμε:

i) Αν $X_1 = x < t \Rightarrow$ (επειδή η διαδικασία ανανεώνεται τη στιγμή x πριν το t)

$$E\left[\left(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}\right)^2 \mid X_1 = x\right] = h(t-x)$$

ii) Αν $X_1 > t$ τότε η πρώτη ανανέωση είναι για $x > t$

Επομένως $N(t) = 0$, $S_{N(t)} = S_0 = 0$, $S_{N(t)+1} = S_1 = X_1 = x$

$$\Rightarrow E\left[\left(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}\right)^2 \mid X_1 = x\right] = x^2$$

Επομένως $h(t) = \int_0^t h(t-x)\,dF_X(x) + \int_t^\infty x^2\,dF_X(x)$

δηλαδή η $h(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$h(t) = \delta(t) + \int_0^t h(t-x)\,dF_x(x)$$

όπου $\delta(t) = \int_t^\infty x^2\,dF_x(x)$

Έχουμε $\delta(t) = \delta_1(t) - \delta_2(t)$, $\quad \delta_1(t) = \delta(t)$, $\delta_2(t) = 0$,

και η $\delta_1(t) \geq 0$, φθίνουσα και φραγμένη

Επειδή $\quad \delta_1(t) \le \int_0^\infty x^2 dF_X(x) = E(X^2) < \infty$

Επίσης $\quad \int_0^\infty |\delta(t)| dt = \int_{t=0}^\infty \int_{x=t}^\infty x^2 dF_X(x) dt = \int_{x=0}^\infty x^2 \int_{t=0}^x dt \, dF_X(x)$

$$= \int_{x=0}^\infty x^2 x \, dF_X(x) = \int_0^\infty x^3 dF_X(x) = E(X^3) < \infty.$$

Επομένως ικανοποιούνται οι ικανές συνθήκες του Βασικού Ανανεωτικού Θεωρήματος και ισχύει

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty \delta(t) dt}{\mu},$$

όπου $\quad \int_0^\infty \delta(t) dt = E(X^3) = \frac{(n+3-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda^3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{\lambda^3}$

και $\quad \mu = E(X) = \frac{n}{\lambda}$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{\frac{n(n+1)(n+2)}{\lambda^3}}{\frac{n}{\lambda}} = \frac{(n+1)(n+2)}{\lambda^2}$$

ΘΕΜΑ 4 (α) Μετά από κάθε επίσκεψη του τεχνικού το μηχάνημα αρχίζει να λειτουργεί σαν καινούργιο (είτε λόγω αντικατάστασης, είτε επειδή βρέθηκε να λειτουργεί και λόγω της αμνήμονης ιδιότητας).

Επομένως οι χρονικές στιγμές επίσκεψης του τεχνικού είναι στιγμές αναγέννησης της διαδικασίας λειτουργίας του μηχανήματος.

Η διάρκεια του κύκλου αναγέννησης είναι $X \sim Exp(\lambda)$

Το κόστος C στη διάρκεια ενός κύκλου είναι

ίσο με $C = K + h(X-Y) \cdot 1(Y<X) = K + h\max(X-Y, 0)$,

όπου Y η διάρκεια λειτουργίας του μηχανήματος από την έναρξη του κύκλου και μετά.

Αν $Y>X$ τότε δεν υπάρχει κόστος χαλασμένου μηχανήματος, ενώ αν $Y<X$ τότε το κόστος είναι $h(X-Y)$.

Επομένως δεσμεύοντας ως προς αν $Y<X$ ή $Y>X$:

$$E(C) = P(Y<X) \cdot E(C \mid Y<X) + P(Y>X) \cdot E(C \mid Y>X)$$

Αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες, $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\mu)$

$$P(Y<X) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad P(Y>X) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Επίσης $E(C \mid Y>X) = K$

Ενώ $E(C \mid Y<X) = K + h \cdot E\left((X-Y)^+ \mid X>Y\right)$

Η ποσότητα $E\left((X-Y)^+ \mid X>Y\right)$ είναι ο υπολειπόμενος χρόνος από τη στιγμή της βλάβης μέχρι την επόμενη επίσκεψη του τεχνικού. Όμως επειδή ο χρόνος επίσκεψης $X \sim Exp(\lambda)$, από την ισχυρή αμνήμονη ιδιότητα προκύπτει ότι ο υπολειπόμενος χρόνος ακολουθεί $Exp(\lambda)$

Επομένως $E\left((X-Y)^+ \mid X>Y\right) = \frac{1}{\lambda}$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε:

$$E(C) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(K + \frac{h}{\lambda}\right) + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot K = K + \frac{h\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}$$

Επομένως το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα προκύπτει από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη:

$$v = \frac{E(C)}{E(X)} = \frac{K + \frac{h\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}}{\frac{1}{\lambda}} = K\lambda + \frac{h\mu}{\lambda+\mu}$$

(β) Θεωρώντας το v ως συνάρτηση του λ $(\lambda>0)$

έχουμε $v'(\lambda) = K - \frac{h\mu}{(\lambda+\mu)^2}$, $v''(\lambda) = \frac{2h\mu}{(\lambda+\mu)^3} > 0$

Επομένως η $v(\lambda)$ είναι κυρτή για $\lambda>0$

Επίσης $\lim_{\lambda\to 0} v'(\lambda) = K - \frac{h}{\mu} < 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} v'(\lambda) = K > 0$

Επομένως υπάρχει μοναδική τιμή του λ που ελαχιστοποιεί την $v(\lambda)$ για $\lambda\in(0,\infty)$ κ' προκύπτει

από $v'(\lambda)=0 \Rightarrow \frac{h\mu}{(\lambda+\mu)^2} = K \Rightarrow \lambda+\mu = \sqrt{\frac{h\mu}{K}}$

$$\Rightarrow \lambda^* = \sqrt{\frac{h\mu}{K}} - \mu$$