ΛΟΓΙΚΗ Ι — ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Ιούλιος 2014

Θέμα 1 [3,5 μονάδες].

Έστω Σ_1 και Σ_2 σύνολα προτάσεων τέτοια ώστε να μην υπάρχει κανένα μοντέλο αμφοτέρων των Σ_1 και Σ_2. Δείξτε ότι υπάρχει πρόταση τ τέτοια ώστε Mod $\Sigma_1 \subseteq$ Mod τ και Mod $\Sigma_2 \subseteq$ Mod $\neg\tau$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε Θεώρημα Συμπάγειας σε κατάλληλο σύνολο.

Απάντηση: Θεωρούμε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, το οποίο από την υπόθεση δεν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα από το Θεώρημα Συμπάγειας υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο, έστω P, του $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Έστω ότι $P = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_m\}$, όπου $\sigma_i \in \Sigma_1, i = 1, \ldots, n$ και $\tau_j \in \Sigma_2, j = 1, \ldots, m$. θεωρούμε την πρόταση τ:

$$(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n).$$

Επειδή $\sigma_i \in \Sigma_1, i = 1, \ldots, n$ έχουμε ότι $\Sigma_1 \models \tau$, άρα Mod $\Sigma_1 \subseteq$ Mod τ. Έστω τώρα ότι Mod $\Sigma_2 \not\subseteq$ Mod $\neg\tau$. Επομένως υπάρχει δομή $\mathfrak{A}$ τέτοια ώστε:

$$\models_{\mathfrak{A}} \Sigma_2 \text{ και } \not\models_{\mathfrak{A}} \neg\tau.$$

Επομένως

$$\models_{\mathfrak{A}} \Sigma_2 \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \tau.$$

οπότε

$$\models_{\mathfrak{A}} \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_m\},$$

άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι το P δεν είναι ικανοποιήσιμο.

Θέμα 2 [3,5 μονάδες]. Ένας από τους ισοδύναμους ορισμούς της αναδρομικής αριθμησιμότητας είναι ο εξής (ειδικά για υποσύνολα του $\mathbb{N}$): Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ καλείται αναδρομικά αριθμήσιμο αν υπάρχει αναδρομική διμελής σχέση R στο $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε:

$$a \in A \text{ ανν } \exists b \in \mathbb{N}\ R(a, b).$$

Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ καλείται ασθενώς αντιπροσωπεύσιμο στην Cn A_E αν υπάρχει τύπος ϕ με μία το πολύ ελεύθερη μεταβλητή τέτοιος ώστε:

$$a \in A \text{ ανν } \phi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0}) \in \text{Cn } A_E.$$

Να αποδείξετε πολύ προσεκτικά και με πλήρη δικαιολόγηση ότι κάθε αναδρομικά αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι ασθενώς αντιπροσωπεύσιμο στην Cn A_E. Χρησιμοποιήστε ότι κάθε αναδρομική σχέση στο $\mathbb{N}$ (οποιασδήποτε πλειαδικότητας (arity)) είναι αντιπροσωπεύσιμη στην Cn A_E, αφού προηγουμένως δώσετε τον ορισμό της αντιπροσωπεύσιμης σχέσης (οποιασδήποτε πλειαδικότητας) στην Cn A_E.

Απάντηση: Για τον ορισμό της έννοιας της «αντιπροσωπευσιμότητας» βλ. βιβλίο Enderton.

Επειδή η διμελής R είναι αναδρομική, θα είναι και αντιπροσωπεύσιμη. Άρα υπάρχει τύπος ψ με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των v_1, v_2 τέτοιος ώστε:

$$\text{Αν } R(a,b) \text{ τότε } A_E \vdash \psi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0}, \boldsymbol{S}^b\mathbf{0}). \tag{1}$$

$$\text{Αν δεν ισχύει ότι } R(a,b) \text{ τότε } A_E \vdash \neg\psi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0}, \boldsymbol{S}^b\mathbf{0}). \tag{2}$$

Παίρνουμε τώρα ως $\phi(v_1)$ τον τύπο $\exists v_2 \psi(v_1, v_2)$. Θα αποδείξουμε ότι ο τύπος ϕ αντιπροσωπεύει ασθενώς το αναδρομικά αριθμήσιμο A. Πράγματι, έστω ότι $a \in A$. Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $b \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $R(a,b)$. Τότε όμως από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $A_E \vdash \psi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0}, \boldsymbol{S}^b\mathbf{0})$. Επομένως $A_E \vdash \exists v_2 \psi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0}, v_2)$, άρα $A_E \vdash \phi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0})$, άρα αποδείχτηκε η μια κατεύθυνση της ασθενούς αντιπροσωπευσιμότητας.

Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι $a \notin A$. Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $b \in \mathbb{N}$, δεν ισχύει ότι $R(a,b)$. Άρα από τη σχέση (2) προκύπτει ότι για κάθε $b \in \mathbb{N}$, $A_E \vdash \neg\psi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0}, \boldsymbol{S}^b\mathbf{0})$. Άρα

$$\text{για κάθε } b \in \mathbb{N}, \quad \models_{\mathfrak{N}} \neg\psi[\![a, b]\!]. \tag{3}$$

Αν τώρα $\phi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0}) \in \text{Cn } A_E$, τότε $\models_{\mathfrak{N}} \phi[\![a]\!]$, άρα

$$\text{για κάποιο } b \in \mathbb{N}, \quad \models_{\mathfrak{N}} \psi[\![a, b]\!]. \tag{4}$$

Οι σχέσεις (3) και (4) αποτελούν άτοπο.

Θέμα 3 [3,5 μονάδες]. Δείξτε ότι δεν υπάρχει αναδρομικό σύνολο R τέτοιο ώστε $\sharp$ Cn $A_E \subseteq R$ και $\sharp\{\sigma \mid (\neg\sigma) \in \text{Cn } A_E\} \subseteq \overline{R}$, το συμπλήρωμα του R.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας ότι κάθε αναδρομικό σύνολο είναι αντιπροσωπεύσιμο στην Cn A_E και το Λήμμα του Σταθερού Σημείου, βρείτε πρόταση σ που να δηλώνει «Ο αριθμός Gödel μου δεν ανήκει στο R». Η απόδειξή σας να είναι ακριβής, σαφής, πλήρης και σύντομη.

Απάντηση: Έστω ότι υπάρχει αναδρομικό σύνολο όπως ανωτέρω. Έστω ότι ο τύπος ϕ αντιπροσωπεύει το R. Τότε:

$$\text{Αν } R(a) \text{ τότε } A_E \vdash \phi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0}). \tag{5}$$

$$\text{Αν δεν ισχύει ότι } R(a) \text{ τότε } A_E \vdash \neg\phi(\boldsymbol{S}^a\mathbf{0}). \tag{6}$$

εφαρμόζουμε το Λήμμα Σταθερού Σημείου στον τύπο $\neg\phi$ και έχουμε ότι υπάρχει πρόταση σ τέτοια ώστε

$$A_E \vdash [\sigma \leftrightarrow \neg\phi(\boldsymbol{S}^{\sharp\sigma}\mathbf{0})]. \tag{7}$$

Αν τώρα $R(\sharp\sigma)$, τότε από την (5) έχουμε $A_E \vdash \phi(\boldsymbol{S}^{\sharp\sigma}\mathbf{0})$, άρα από την (7) έχουμε $(\neg\sigma) \in \mathrm{Cn}\, A_E$, άρα από τη δεύτερη υπόθεση έχουμε $\sharp\sigma \in \overline{R}$, δηλαδή δεν ισχύει ότι $R(\sharp\sigma)$, άτοπο.

Αν αντιθέτως δεν ισχύει ότι $R(\sharp\sigma)$, τότε από την (6) έχουμε

$$A_E \vdash \neg\phi(\boldsymbol{S}^{\sharp\sigma}\mathbf{0}),$$

άρα από την (7) έχουμε $\sigma \in \mathrm{Cn}\, A_E$, άρα από το πρώτο μέρος της υπόθεσης έχουμε $R(\sharp\sigma)$, πάλι άτοπο και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.