**Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας. Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις.**

**Γράψτε το ΠΜΣ στο οποίο θα σταλεί ο βαθμός σας. Εάν προέρχεστε από ΠΜΣ όπου το μάθημα «Μαθηματική Λογική» δεν διδάσκεται, γράψτε ΚΑΙ το ΠΜΣ από το οποίο επιθυμείτε να σταλεί βαθμός (ΜΑΘ, ΜΠΛΑ, ΑΛΜΑ)**

**Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες.**

**Επώνυμο**:

**Όνομα**:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ΠΜΣ προέλευσης: | | | | | | | | | | |
| ΠΜΣ βαθμού: | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ΑΜ: | | | | | | | | | | | | | |

Βαθμοί

| 1 (3) | 2 (3) | 3α (2) | 3β (2) | Σύνολο |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Καλη Επιτυχια

**Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο**

**Θέμα 1. [3 μονάδες].** Έστω $\Sigma$ σύνολο προτάσεων πρωτοτάξιας γλώσσας. Με $\mathrm{Cn}\ \Sigma$ συμβολίζουμε το σύνολο των προτάσεων (θεωρία) οι οποίες είναι αληθείς σε κάθε δομή στην οποία είναι αληθείς όλες οι προτάσεις του $\Sigma$. Λέμε ότι μία θεωρία $T$ είναι πεπερασμένα αξιωματικοποιήσιμη αν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο προτάσεων $\Sigma$ τέτοιο ώστε $T = \mathrm{Cn}\ \Sigma$. Να αποδείξετε ότι αν $\mathrm{Cn}\ \Sigma$ είναι πεπερασμένα αξιωματικοποιήσιμη τότε υπάρχει πεπερασμένο $S \subseteq \Sigma$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Cn}\ \Sigma = \mathrm{Cn}\ S$.

**Απάντηση:** Βλ. Θεώρημα 26Η βιβλίου Enderton.

**Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο**

**Θέμα 2 [3 μονάδες].** Έστω $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$ σύνολα προτάσεων τέτοια ώστε να μην υπάρχει κανένα μοντέλο αμφοτέρων των $\Sigma_1$ και $\Sigma_2$. Δείξτε ότι υπάρχει πρόταση $\tau$ τέτοια ώστε $\text{Mod } \Sigma_1 \subseteq \text{Mod } \tau$ και $\text{Mod } \Sigma_2 \subseteq \text{Mod } \neg\tau$.

**Απάντηση:** Θεωρούμε το σύνολο $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, το οποίο από την υπόθεση δεν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα από το Θεώρημα Συμπάγειας υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο, έστω $P$, του $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Έστω τώρα ότι $P \cap \Sigma_1 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Θεωρούμε την πρόταση $\tau$:

$$(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n).$$

Επειδή $\sigma_i \in \Sigma_1, i = 1, \ldots, n$ έχουμε ότι $\Sigma_1 \models \tau$, άρα $\text{Mod } \Sigma_1 \subseteq \text{Mod } \tau$. Έστω τώρα ότι $\text{Mod } \Sigma_2 \not\subseteq \text{Mod } \neg\tau$. Επομένως υπάρχει δομή $\mathfrak{A}$ τέτοια ώστε:

$$\models_{\mathfrak{A}} \Sigma_2 \text{ και } \not\models_{\mathfrak{A}} \neg\tau.$$

Επομένως

$$\models_{\mathfrak{A}} \Sigma_2 \text{ και } \models_{\mathfrak{A}} \tau,$$

οπότε $\models_{\mathfrak{A}} \phi, \forall \phi \in P$ άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι το $P$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

**Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο**

**Θέμα 3.** Θεωρήστε την κλασική δομή των πραγματικών αριθμών $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, E \rangle$.

**Ερώτημα α [2 μονάδες].** Να αποδείξετε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο των φυσικών αριθμών είναι ορίσιμο στη δομή $\mathfrak{R}$.

**Απάντηση**: Έστω το πεπερασμένο σύνολο $A = \{n_1, \ldots, n_k\}$. Για κάθε $n_i$ θεωρούμε τον όρο:

$$t_i = \underbrace{(\cdots((1+1)+1)+\cdots+1)}_{n_i \text{ φορές}}.$$

Το σύνολο  ορίζεται από τον τύπο:

$$x = t_1 \vee \cdots \vee x = t_k.$$

**Ερώτημα β [2 μονάδες].** Αληθεύει ότι κάθε μονοσύνολο στη δομή $\mathfrak{R}$ είναι ορίσιμο; *Υπόδειξη:* Τι πληθάριθμο έχουν τα ορίσιμα μονοσύνολα;

**Απάντηση**: Τα μονοσύνολα με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς είναι όσα και οι πραγματικοί, δηλαδή υπεραριθμήσιμα. Τα υποσύνολα των πραγματικών που ορίζονται στη δομή $\mathfrak{R}$ είναι το πολύ όσοι και οι τύποι της γλώσσας, δηλαδή είναι αριθμήσιμο σύνολο. Επομένως υπάρχει μονοσύνολο που δεν ορίζεται στη γλώσσα της $\mathfrak{R}$.

**Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο**