15-5-2013

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

Αντιπροσωπεύσιμη.

$\phi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ Θεωρούμε k-άδα στο $\mathbb{N}$ $a_1, \dots, a_k$

$$A \vdash \forall x_{k+1} \left[\phi(S^{a_1}0, \dots, S^{a_k}0, x_{k+1}) \leftrightarrow x_{k+1} = S^{f(a_1, \dots, a_k)}0 \right]$$

$R \subseteq \mathbb{N}^k$

Λήμμα Σταθερού Σημείου.

Εύκολη μορφή

$\beta(v_1)$ τύπος με 1 ελεύθερη μεταβ

sentence

Τότε υπάρχει πρόταση/απόφανση τέτοια ώστε

$$\mathfrak{N} \models \sigma \longleftrightarrow \beta(\#\sigma)$$

αριθμός Gödel της σ.

Δύσκολη μορφή

$$AE \vdash \sigma \longleftrightarrow \beta(\#\sigma)$$

Απόδειξη

$$\Phi : (\#\alpha, n) \longrightarrow \# \underline{a(S^n 0)}$$

αρ. Gödel
τύπου με
μια μετ/α

Υπολογίσιμη συνάρτηση.

Φ ορίσιμη.

$$\exists_\phi(v_1, v_2, v_3)$$

$$\cancel{\exists_\phi(a_1, a_2, a_3)} \quad \text{avv} \quad a_3 = \phi(a_1, a_2)$$

$$\mathfrak{M} \models \exists_\phi(a_1, a_2, a_3)$$

Θεωρώ τον τύπο

$$\forall v_3 \left(\Theta_\phi(v_1, v_1, v_3) \rightarrow \beta(v_3) \right) \quad q$$

Θεωρώ την πρόταση σ

$$\forall v_3 \left[\Theta_\phi(S^q 0, S^q 0, v_3) \rightarrow \beta(v_3) \right] \quad \sigma$$

Θα αποδείξω

$$\sigma \longleftrightarrow \beta\left(S^{\#\sigma} 0 \right)$$

Αρκεί να δείξω

$$\Theta_\phi(S^q, S^q, \#\sigma)$$

$$\beta(\#\sigma)$$

Δέχομαι το σ.

Ανάποδα $\beta(\#\sigma)$ δέχομαι

ΤΡΙΑ ΒΑΡΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ.

A. Tarski (1933)

$\#Th\ulcorner\mathfrak{G}$ <u>δεν</u> είναι ορισιμο σύνολο.

Έστω ότι ήταν ορισιμο

από τον τύπο $\beta(v_1)$

Θεωρώ τον $\neg\beta$.

"Βρίσκω" το σταθερό σημείο σ

$$\sigma \longleftrightarrow \neg\beta(\#\sigma)$$

Β. $\#Th \mathbb{N}$ δεν είναι διαγνώσιμο.

Γ. Θεώρημα Gödel 1931

$A \subseteq Th \mathbb{N}$ $\quad$ $Cn A$ δεν είναι

A διαγνώσιμο $\quad$ πλήρης θεωρία

Απόδειξη: Έστω ότι $Cn A$ πλήρης

$Cn A \subseteq Th \mathbb{N}$ Άρα $Cn A = Th \mathbb{N}$.

Άρα από ιδιότητα $\quad$ $Cn A$ διαγνωσ. άτοπο.