19-4-13

$0, S, +, \cdot, <, E.$

$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \ldots \rangle$

$Th\mathfrak{N}$ δεν είναι αξιωματικοποιήσιμη.

Δεν είναι διαγνώσιμη

Για οποιοδήποτε (εύλογο) σύνολο αξιωμάτων $A \subseteq Th\mathfrak{N}$ υπάρχει απόφανση $\sigma$ που είναι αληθής στη $\mathfrak{N}$, & $A \nvdash \sigma$.

Προεπισκόπηση

$R \subseteq \mathbb{N}^k$

$R$ καλείται ορίσιμη στην $\mathfrak{N}$

αν υπάρχει τύπος $\phi(v_1, \ldots, v_n)$

$(a_1, \ldots, a_n) \in R$ ανν $\mathfrak{N} \models \phi(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$

$$\underline{a_1} \ldots, \underline{a_n}$$

Αριθμητικοποίηση Gödel.

$h$: Σύμβολα γλώσσας $\xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$

$\bar{h}$: ακολουθίες συμβόλων

Αν $n$ φυσικός, μπορούμε σε αποτελεσματικό χρόνο να αποφανθούμε αν υπάρχει έκφραση $e$ τέτοια ώστε $h(e)=n$, και το είδος της $e$.

$L \subseteq \Sigma^*$

σύνολο εκφράσεων

$\Sigma$ αλφάβητο της γλώσσας του $\mathfrak{N}$.

$L$ είναι διαγνώσιμο αν $h[L] \subseteq \mathbb{N}$

Είναι διαγνώσιμο.

Οι διαγνώσιμες σχέσεις στο $\mathbb{N}$ είναι ορίσιμες στο $\mathfrak{N}$.

Θεώρημα (30A)

$A \subseteq Th\,\mathfrak{N}$

$\underbrace{\{ h(\sigma) : \sigma \in A \}}_{\text{αριθμοί Gödel}}$ είναι ορίσιμο στην $\mathfrak{N}$.

«εύλογο»

Τότε υπάρχει $\sigma$

$$A \nvdash \sigma \ \& \ \mathfrak{N} \models \sigma.$$

Διαισθητικά:

$\sigma$ "λέει" δεν αποδεικνύεται από το $A$.

$(a,b,c) \in R$    $a$ αρ. G. κάποιου τύπου
& $c$ αρ. G. κάποιας απόδειξης στο $A$
του $a(S^b 0)$.

$\rho(v_1, v_2, v_3)$ τύπος με 3 μεταβ.

$(a,b,c) \in R$ αν $\mathfrak{N} \models \rho(S^a, S^b, S^c)$

$\forall v_3 \neg \rho(v_1, v_1, v_3) \rightarrow q$ αριθμός Gödel

$(a, b, c) \in R$ αν $\mathcal{N} \models \rho(S^a, S^b, S^c)$

$(a, b, c) \in R$ ανν $c$ απόδειξη στο $A$ του $a(S^b 0)$

$\forall v_3 \neg \rho(v_1, v_1, v_3)$ $q$ αρ. Gödel

$\sigma$. $\forall v_3 \neg \rho(S^q 0, S^q 0, v_3)$ δεν αποδεικνύεται.

$A \nvdash \sigma$. Έστω ότι $A \vdash \sigma$

& έστω $k$ ο αρ. Gödel της απόδειξης.

$\sigma \vdash \neg \rho(S^q 0, S^q 0, S^k 0)$, $\mathcal{N} \models \rho(S^q 0, S^q 0, S^k 0)$

σε ό,τι η $\mathcal{N}$. (Άρα $A \vdash \sigma$) Άτοπο.

Πρέπει να αποδείξω

$$\mathfrak{N} \models \sigma.$$

$$\mathfrak{N} \models \forall v_3 \neg P(S^9 0, S^9 0, v_3)$$

αληθές

αποφάνσεων.

Το σύνολο των αληθών προτάσεων στη $\mathfrak{N}$

ΔΕΝ είναι ~~διαγνω~~ ορίσιμο

Πράγματι, αλλιώς πάρε $A = Th\,\mathfrak{N}$.

# Διαγωνοποιητική Προσέγγιση.

$(a,b) \in P$ ανν $a$ αριθμός Gödel τύπου $\alpha(v_1)$ τέτοιος ώστε $\vdash \alpha(S^b 0)$

$\{P_a,\ a \in \mathbb{N}\}$ όλα τα ορίσιμα υποσύνολα των φυσικών.

$P_a = \{b \in \mathbb{N} : (a,b) \in P\}$ $H(b,b)$ δεν είναι ορίσιμο σύνολο.

$H(b)$ ανν $\neg P(b,b)$

$\#(b)$ αν όχι (ο b είναι αριθμός Gödel ενός τύπου $\alpha(v_1)$ & $\mathcal{N} \models \alpha(S^b 0)$)

αν ήταν ορίσιμο

Θεώρημα

$\{\#(\tau) \mid \mathcal{N} \models \tau\}$ δεν είναι ορίσιμη.

αριθ. Gödel