29-3-2013 Μετ. Λογική.

Σ αλφάβητο. (πεπ. ή αριθμ.)

Σ^* λέξεις από στοιχεία του Σ

$L \subseteq \Sigma^*$

αναδρομική αποτελεσματική αλγοριθμική

Recursive, effective, decidable (διαγνώσιμος)

Αναδρομική Αριθμησιμότητα.

Αριθμήσιμο: Μπορούν να στοιχεία του να γραφούν σε λίστα (πεπερασμένη ή απέραντη)

1.
2.
3.
4.
⋮

Αναδρομικά Αριθμήσιμο.

Αν υπάρχει αλγοριθμική λίστα

Πρωτοτάξια Λογική.

Parsing

Αλγόριθμος <u>Συντακτικής Ανάλυσης</u>

για όρους

$K : \text{Εκφράσεις} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$K\begin{pmatrix}\text{μεταβλητή}\\ \text{σταθερά}\end{pmatrix} = 1$$

$$K(s_1 \cdots s_n) = K(s_1) + \cdots + K(s_n).$$

$K(f) = 1 - n$ Όπου f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο.

<u>Θεώρημα:</u> Αν t όρος τότε

$$K(t) = 1.$$

Προφανές.

Αντίστροφο.

1) Αν α' αρχικό τμήμα ενός όρου τότε

$K(\alpha') < 1$.

Έστω $t = f t_1 \dots t_n$.

2) Αν α' τερματικό τμήμα ενός όρου τότε α' συναρμογή ενός ή περισσοτέρων όρων.

Απόδειξη με επαγωγή

Αλγόριθμος ελέγχου αν t

όρος.

1. Αν η συμβολοσειρά αποτελείται μόνο από ένα γράμμα και αυτό είναι μεταβλητή ή σταθερά αποδεχόμαστε.
2. Αν η συμβολοσειρά ξεκινά με ένα n-θέσιο f. Βρίσκουμε την πρώτη υπακ. t_1 μετά το f για την οποία $k(t_1)=1$. Ελέγχουμε αν t_1 όρος. Πρέπει να γίνει n φορές.

Με παραλλύσιμ χρόνο μπορούμε να φτιάξουμε αλγόριθμο να εξετάζει αν φ είναι ΚΣΤ.

Αλγόριθμος να εξετάζει αν φ λογικά αξίωμα.

Υπάρχει αλγόριθμος που να εξετάζει αν κάτι είναι λογικό θεώρημα;

~~ΝΑΙ~~.

ΟΧΙ

Τα τυπικά θεωρήματα αποτελούν
αναδρομικά αριθμήσιμο σύνολο.
Πράγματι καταγράφονται σε λίστα
με βάση το μήκος της απόδειξης
τους (άθροισμα μηκών των ΚΣΤ
που την αποτελούν)

Το σύνολο των έγκυρων τύπων είναι αναδρομικά αριθμήσιμο.

Πράγματι άμεσο συμπέρασμα Θ. Αξιοπιστίας & Πληρότητας.

Εισαγωγή στη Θεωρία Δομών (Model Theory)

Sentence: Formula without free var's

Απόφανση: Τύπος χωρίς ελεύθερες μετ/ς

(~~Πρόταση~~)

EC Στοιχειώδης Κλάση

$$\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\sigma.$$

Έστω γλώσσα με δια κατηγ. σύμβολο $<$.

Σ η απόφανση που αποτελείται από τη σύζευξη

1) Αξιώματα Γνήσιας Διάταξης
2) $\forall x \exists y \; x<y$

Τότε οποιαδήποτε δομή στην $Mod\,\bar{\Sigma}$ έχει άπειρα στοιχεία.
Υπάρχουν δομές άπειρες που δεν ανήκουν στο $Mod\,\Sigma$.

Θεώρημα. Εάν Σ σύνολο αποφάνσεων το οποίο έχει πεπερασμένα μοντέλα οσοδήποτε μεγάλα, τότε Σ έχει άπειρο μοντέλο.

Απόδειξη: Με Θ. Συμπαγείας.

Θεωρώ Σ' που αποτελείται από

1) Σ

2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

$\lambda_1 \quad \exists x \; x = x$

$\lambda_2 : \exists x_1 \exists x_2 \; x_1 \neq x_2$

$\lambda_3 : \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \; x_1 \neq x_2 \ldots$

Είναι Σ' ικανοποιήσιμη;

Ένα πεπερ. υποσύνολο του Σ'

Είναι υποσύνολο $\Sigma \cup \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ για κάποιο k.

Αλλά από την υπόθεση $\Sigma \cup \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ ικανοποιήσιμο. Άρα, Θ.Σ., Σ' ικανοποιήσιμο. Άρα υπάρχει μοντέλο του Σ με άπειρο πληθ.

Άσκηση. Η κλάση των δομών με άπειρο σύμπαντα ΔΕΝ είναι EC.

Δηλαδή $\nexists$ απόφανση τ έτσι ώστε

$$\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\,\tau$$

$\mathcal{A}$

η κλάση δομών

με άπειρο σύμπαν.

Έστω ότι $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}\,\tau$.

Τότε $\mathrm{Mod}(\neg\tau)$ = κλάση των πεπ. δομών.

Άτοπο με βάση το προηγούμενο.

$\mathfrak{a}$ είναι δομή

$$\mathrm{Th}\,\mathfrak{a} = \{\sigma \mid \sigma \text{ απόφανση } \& \ \mathfrak{a} \models \sigma\}$$

$\mathfrak{a}$ $\quad \mathfrak{b}$ καλούνται στοιχειωδώς ισοδύναμες αν $\mathrm{Th}\,\mathfrak{a} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{b}$.

$\mathcal{T}$

$\mathcal{T}^*$

Έστω Σ' το σύνολο των αποφάσεων

που αποτελείται (c νέο σύμβολο σταθεράς)

1) $Th(\mathfrak{N})$

2) $c > 0$, $c > 0'$, $c > 0''$, ...

$S(0)$

διάδοχος

$Th(\mathfrak{N}^*) = Th(\mathfrak{N})$.

$c^{\mathfrak{N}^*} > 0$

$c^{\mathfrak{N}^*} > 1$

$c^{\mathfrak{N}^*} > 2$

$\vdots$

Πρόοδος

13-4-2013 Σάββατο