Αν φ είναι $(\neg\psi)$ τότε:

$\mathfrak{A} \models (\neg\psi)[s]$ ανν $\mathfrak{A} \not\models \psi[s]$

Αν φ είναι $(\psi \to \chi)$ τότε:

$\mathfrak{A} \models (\psi \to \chi)[s]$ ανν $(\mathfrak{A} \models \psi[s] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \chi[s])$

Αν φ είναι $\forall v \psi$ τότε:

$\mathfrak{A} \models \forall v \psi[s]$ ανν $\mathfrak{A} \models \psi[s(v|a)]$, $\forall a \in |\mathfrak{A}|$

Να αποδειχθεί ότι: $\mathfrak{A} \models \exists v \psi[s]$ ανν $\exists a \in |\mathfrak{A}|$ τ.ω. $\mathfrak{A} \models \psi[s(v|a)]$. Έχουμε:

$\mathfrak{A} \models \exists v \psi[s] \iff$ ~~[illegible]~~ $\iff$
$\mathfrak{A} \models (\neg \forall v (\neg\psi))[s] \iff \mathfrak{A} \not\models \forall v (\neg\psi)[s] \iff$ δεν ισχύει ότι $\forall a \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \neg\psi[s|a] \iff \exists a \in |\mathfrak{A}|$ τ.ω. $\mathfrak{A} \not\models \neg\psi[s(v|a)] \iff \exists a \in |\mathfrak{A}|$ τ.ω. $\mathfrak{A} \models \psi[s(v|a)]$ ο.ε.δ.

$\forall v \phi$
$\exists v \phi$

$$\big(\forall x\, R(x,y) \to (P(z) \wedge \exists y\, Q(y))\big)$$

δεσμ. ελεύθερη ελεύθερη δεσμ.

Θεώρημα

Άτυπη γραφή: Η αλήθεια ή το ψέμα στην $\mathfrak{A}$ ενός φ για την αποτίμηση s, εξαρτάται μόνον από τις τιμές της s για τις μεταβλητές που έχουν ελεύθερη εμφάνιση στον φ.

Μαθηματική γραφή: Enderton.

Αν φ έχει ελεύθερες τις $v_1, \ldots, v_n$ γράφουμε $\phi(v_1, \ldots, v_n)$

$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$ τα $v_1, \ldots, v_n$ τα έχω αποτιμήσει $a_1, \ldots, a_n$

Ένας ΚΣΤ λέγεται <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> αν δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές. Άρα η αλήθεια δεν εξαρτάται από κάποια αποτίμηση.

Γλώσσα Θεωρίας Αριθμών

$=$	$\mathfrak{N}$ → επιδιωκόμενη ερμηνεία
$<$ κατηγορηματικό	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ σύμπαν
$+, \cdot$ συναρτ. διθέσιες	$<^{\mathfrak{N}}$
$/$ (s) συναρτ. μονοθέσιο	$+^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, s^{\mathfrak{N}}, 0^{\mathfrak{N}}$
0 σταθερά	

$\left.\begin{matrix}\neg, \to \\ \forall\end{matrix}\right\}$ π.χ. $\forall x \exists y\, (y = s(x))$ ⇝ Πρόταση ϕ

Αυστηρά $\forall v_1 \exists v_2 = s\, v_1 v_2$

Ισχύει $\mathfrak{N} \models \phi$

x πρώτος αριθμός: $\left.\begin{matrix} x > s(0) \\ \forall y \forall z\, (x = y \cdot z \to y = s(0) \vee z = s(0))\end{matrix}\right\} \phi_1(x)$

$\mathfrak{N} \models \phi_1[n]$ ανν n πρώτος

υπάρχουν άπειροι πρώτοι: $\forall x \exists y\, (y > x \wedge \phi_1(x))$ (πρόταση ϕ)

Άρα $\mathfrak{N} \models \phi$ ανν υπάρχουν άπειροι πρώτοι

υπάρχουν άπειροι διαδοχικοί πρώτοι:

$\forall x \exists u\, (u > x \wedge \phi_1(u) \wedge \phi_1(u + s(s(0))))$ (πρόταση ψ)

$\mathfrak{N} \models \psi$; (εικασία άλυτη)

$\mathfrak{N}^-$

$|\mathfrak{N}^-| = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

$x +^{\mathfrak{N}^-} y = x +^{\mathfrak{N}} y$

$x \cdot^{\mathfrak{N}^-} y = -|x| \cdot |y|$

Μπορώ να ορίσω ότι θέλω, π.χ. $x \cdot^{\mathfrak{N}} y = -x^2 y^2$

Άσκηση: $\mathfrak{N}_2$ με $|\mathfrak{N}_2| = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

Να οριστεί το ϕ_1 τ.ω. $\mathfrak{N}_2 \models \phi_1(x)$ ανν $x/2$ πρώτος

Ορίζω: $x +^{\mathfrak{N}_2} y = x + y$

$x \cdot^{\mathfrak{N}_2} y = x \cdot y / 2$

$s^{\mathfrak{N}_2}(x) = x + 2$ και ορίζω την ϕ_1

Γλώσσα Θεωρίας Συνόλων

$\in$, ϕ

Μη standard ερμηνείες

$\pi^{\theta\sigma}$, N σύμπαν

$\in^{\pi^{\theta\sigma}} \leadsto <$

$\phi^{\pi^{\theta\sigma}} \leadsto 0$

Εκτατικότητα: Δύο σύνολα είναι ίσα ανν έχουν τα ίδια στοιχεία

$\forall x \forall y \, (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$ E

$\pi^{\theta\sigma} \models E$

Αξίωμα Ζεύγους: $\forall x \forall y \exists z \forall w \, (w \in z \leftrightarrow w = x \vee x = y)$ Z

$\pi^{\theta\sigma} \not\models Z$ π.χ. $x = 3$, $y = 5$

Αξίωμα Επαγωγής (Peano): Έστω $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$ τύπος

$\forall x_1 \dots \forall x_n \left(\phi(0, \bar{x}) \wedge \forall u (\phi(u, \bar{x}) \to \phi(u+1, \bar{x})) \to \forall u \, \phi(u, \bar{x}) \right)$

Άρα Αξίωμα Επαγωγής είναι Ομάδα Προτάσεων (για τα διάφορα ϕ

L πρωτοτάξια γλώσσα

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ δύο ερμηνείες. $h : A \to B$ καλείται μορφισμός αν διατηρούνται σχέσεις, συναρτήσεις και σταθερές. Δηλαδή:

$R^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, a_3) \iff R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), h(a_2), h(a_3))$ για σχέση R κτλ.

π.χ. για π και π_2, $h(x) = 2x$ (ομο)μορφισμός

L πρωτοτάξια γλώσσα

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ δομές

$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$

s απονομή τιμών στην $\mathfrak{A}$

$\left.\begin{array}{l} t \text{ όρος} \to t^{\mathfrak{A}}[s] \\ \bar{s}(t) \text{ επέκταση} \end{array}\right\} s(t)$

s απονομή στην $\mathfrak{A}$

h (ομο)μορφισμός

$h \circ s$ απονομή στη δομή $\mathfrak{B}$ με $h \circ s(v) = h(s(v))$

Πρόταση

$h(t^{\mathfrak{A}}[s]) = t^{\mathfrak{B}}[h\circ s]$

Το ίδιο με συμβολισμό Enderton: $h(\bar{s}(t)) = \overline{h\circ s}\,(t)$ $\Big\}$ $h(s(t)) = h\circ s(t)$

Απόδειξη

Επαγωγικά, π.χ. $t = f t_1 t_2$

$h(t^{\mathfrak{A}}[s]) = h(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], t_2^{\mathfrak{A}}[s])) = f^{\mathfrak{B}}(h(t_1^{\mathfrak{A}}[s]), h(t_2^{\mathfrak{A}}[s]))$ Επαγ. Υπόθεση ......

Πρόταση

Αν ϕ ατομικός τύπος: $\mathfrak{A} \models \phi[s] \iff \mathfrak{B} \models \phi[h\circ s]$ εφ' όσον h είναι 1-1 (γιατί $x = y \iff h(x) = h(y)$ ανν h 1-1)

Άσκηση

Να δοθούν $L, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, h, \phi, s$ τ.ω. $\mathfrak{A} \not\models \phi[s]$ αλλά $\mathfrak{B} \models \phi[h\circ s]$

μορφισμός · Α.Τ. · απονομή

Λύση

$L = \{=\}$

$\mathfrak{A} = \langle \{1,2\} \rangle$

$\mathfrak{B} = \langle \{1\} \rangle$

$h : \{1,2\} \to \{1\}$ με $h(1) = h(2) = 1$

s απονομή τ.ω. $s(v_1) = 1$ και $s(v_2) = 2$

Α.Τ. ϕ: $= v_1 v_2$

$\mathfrak{A} \models \phi[s]$; ΟΧΙ

$\mathfrak{B} \models \phi[h\circ s]$; ΝΑΙ γιατί $h\circ s[v_1] = h\circ s[v_2] = 1$

Πρόταση

ϕ ΚΣΤ: $\mathfrak{A} \models \phi[s] \iff \mathfrak{B} \models \phi[h\circ s]$ εφ' όσον h 1-1 και επί.

ΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

$\mathfrak{A}$

R n-θέσια σχέση στη δομή $\mathfrak{A}$, $R \subseteq |\mathfrak{A}|^n$

R καλείται οριστή ανν υπάρχει τύπος με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $U_1, \ldots, U_n$ τ.ω. : $R(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$

Παράδειγμα
1) Δομή $\mathfrak{N}$ (Θεωρίας Αριθμών)
$R(x)$ ανν x ζυγός
$\phi(U_1) : \exists U_2 (U_1 = SS(0) \cdot U_2)$
$R(x)$ ανν x πρώτος

$$R = \begin{cases} \{0\} & \text{αν ισχύει Α.Ε. της Αρ.} \\ \{1\} & \text{αν δεν ισχύει} \end{cases}$$

οριστό (από τον τύπο $x=0$ αν είναι το μονοσύνολο $\{0\}$ και από το τύπο $x=1$ αν είναι το μονοσύνολο $\{1\}$)

Πως αποδεικνύουμε τη μη οριστότητα;
Εργαλείο Α: Μέσω αυτομορφισμών
Αυτομορφισμός: $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 1-1, επί
Δομή $\mathfrak{A}$, h αυτομορφισμός, R σχέση που ΔΕΝ διατηρείται από τον h, δηλαδή $R(x)$ αλλά $\neg R(h(x))$ ή $R(h(x))$ αλλά $\neg R$
Τότε R ΔΕΝ είναι οριστή

2) Δομή : $\mathbb{R}, <$
$h(x) = x^3$
Τότε η σχέση της «ρητότητας» δεν διατηρείται για τον
Γνωστό: $\sqrt[3]{2}$ ΔΕΝ είναι ρητός
Άρα $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$. Όμως $h(\sqrt[3]{2}) \in \mathbb{Q}$.
Δηλαδή $\neg Q(\sqrt[3]{2})$ ενώ $Q(h(\sqrt[3]{2}))$
Έστω Q οριστή. $Q(x)$ ανν $\mathcal{R} \models \phi[|x|]$.
Τότε $\mathcal{R} \models \phi[|x|] \Leftrightarrow \mathcal{R} \models \phi[|h(x)|]$
Άρα $Q(x) \Leftrightarrow Q(h(x))$, άτοπο.

Οριστικότητα Συνόλου από Δομές

K σύνολο δομών

K καλείται <u>στοιχειωδώς</u> ορίσιμο (στην πρωτ. λογική) EC (elementary class) αν υπάρχει τ πρόταση τ.ω.

$\mathfrak{A} \in K$ ανν $\mathfrak{A} \models \tau$

$L = \{=\}$

Δομές: απλώς σύνολα

Θεωρώ παρακάτω δομές που είναι υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

$K = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ είναι στοιχειωδώς ορίσιμη.

Κλάση K δομών που αποτελούν σύνολα με το πολύ 3 στοιχεία: $\exists x \exists y \exists z \forall t (t = x \vee t = y \vee t = z)$

Κλάση δομών που αποτελούνται από όλα τα πεπερασμένα σύνολα ΔΕΝ είναι στοιχειωδώς ορίσιμη.