11/4/2013

Μη συμβατική Ανάλυση

$\mathbb{R}$

Θεωρήσαμε τη δομή $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, \text{σύμβολα} \rangle$

$Th\mathcal{R}$

${}^*\mathcal{R}$

$\mathcal{R}$ υποδομή της $\mathcal{R}^*$

$|{}^*\mathcal{R}|^* = {}^*\mathbb{R}$

${}^*\mathbb{R}$ περιέχει στοιχεία που είναι άπειρα σε μέγεθος

περιέχει απειροστά

Πεπερασμένοι

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to a} F(x) = b$

Ορισμός

Αν $x \approx a$ & $x \neq a$ τότε $F(x) \simeq b$

Άσκηση

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με

Λύση

A. Έστω ότι $\lim_{x \to a} F(x) = b$ με τη συνήθη έννοια.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$0 < |x - a| < \delta$ τότε $|F(x) - b| < \varepsilon$

Θεωρούμε < διαδένια σύνολο κατηγ. ϕ
σύζευξη των εξής
Αξιώματα Γνήσιας διάταξης $\&$ $\forall x \exists y$
Αν $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$
$\mathfrak{A} \models \phi$
Αλλά $\mathfrak{A}' \not\models \phi$ για οποιαδήποτε πεπερ. υποδομή
Ισχύει ότι αν κάθε πεπ. $\mathfrak{A}'$
$\mathfrak{A}' \models \phi$ τότε $\mathfrak{A} \models \phi$
ϕ $\exists y \forall x (y > x$ ή $y = x)$

Έστω ότι ϕ έχει μόνο καθολικούς ποσοδείκτες & είναι σε Π.Κ.Μ.
1) $\mathfrak{A} \models \phi$ τότε $\mathfrak{A}' \models \phi$ για κάθε πεπερ. υποδομή $\mathfrak{A}'$ του $\mathfrak{A}$
Θα αποδείξω ότι
$\mathfrak{A} \models \phi[|a_1, \dots, a_n|]$ τότε
$\mathfrak{A}' \models \phi\{|a_1, \dots, a_n|\}$

$a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}'|$

Έστω ϕ ατομικός τύπος.
εύκολο.
Έστω ότι ϕ $\forall x_1, \dots, x_n$ ψ
$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n$ $\psi[a_1, \dots, a_n]$

απόφανση διότι έχω θεωρήσει $\varepsilon > 0$ κ' $\delta > 0$ σταθερές

$$\boxed{\forall x \left(0 < |x-a| < \delta \text{ τότε } |F(x)-b| < \varepsilon \right)}$$

ϕ

$^{*}R \vDash \phi$

Η ϕ αληθεύει στη μη συμβατική δομή.

Συμπεραίνω ότι $x \approx a$ & $x \neq a$

τότε $0 < |x-a| < \delta$

(διότι δ θετικός συμβατικός)

άρα $|F(x)-b| < \varepsilon$

Άρα, $F(x) \approx b$

B. Έστω $\lim_{x \to a} F(x) = b$ με το μη συμβατικό ορισμό

Πρέπει να αποδείξω $\forall \varepsilon > 0$

$$\boxed{\exists \delta \ \forall x \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |F(x)-b| < \varepsilon}$$

ϕ.

Πρέπει να δείξω ότι $^{*}R \vDash \phi$

Για να αποδείξω ότι $^{*}R \vDash \phi$ θεωρώ ως δ ένα απειροστό.

Παράδειγμα

$F(x) = x^2$

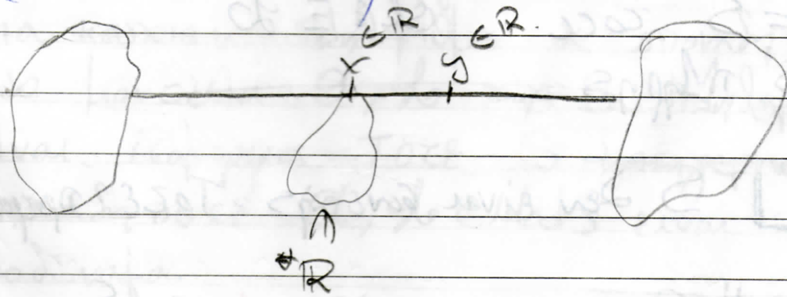
$a = 1/2$ $\qquad b = 1/4$

$\varepsilon = 1/8$

$|x^2 - 1/4| < \frac{1}{8}$ ... $\exists \delta$

Κάθε φραγμένο σύνολο έχει sup.
Πρωτοτάξια λογική
ΔΕΝ είναι απόφανση
Ο παραπάνω ισχυρισμός δεν ισχύει στο $^*\mathbb{R}$
Θα βρω $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ φραγμένο και χωρίς sup.
Θεωρούμε $A = \mathbb{R}$ θετική
Πράγματι αν $M \in {}^*\mathbb{R}$ & M ↓ άπειρο,
τότε M φράγμα του $\mathbb{R}$.
Έστω M' ένα sup
Τότε M' άπειρο
Αλλά $M'-100$ επίσης άπειρο
Τότε $M'-100$ επίσης άνω φράγμα.

$(\forall x \quad x-100 \neq x)$



Θεώρημα Κατηγορικότητας Łos-Vaught
Categoricity test

(1) S, T θεωρίες.
$S \subseteq T$ & T συνεπής. & S πλήρης
τότε $S = T$.

Απόδ.
Θα αποδείξω ότι $T \subseteq S$
Έστω $\tau \in T$ θα δ.ο. $\tau \in S$
Έστω $\tau \notin S$. Τότε $\neg\tau \in S$
Άρα $\neg\tau \in T$
Άρα, T ασυνεπής. Άτοπο.

(2) Έστω S θεωρία & έστω ότι αν
$\alpha, \beta \models S$ τότε $\alpha \equiv \beta$
Τότε S πλήρης

Απόδ
1η περιπτ. | S δεν είναι συνεπής. Τότε προφανώς πλήρης
2η περιπτ | S συνεπής. Έστω $\sigma \notin S$
πρέπει να δείξω ότι $\neg\sigma \in S$.
Αρκεί $S \models \neg\sigma$.
Επειδή $\sigma \notin S$, συμπεραίνω ότι
$S \not\models \sigma$

Άρα, $\exists\, \mathfrak{A}$ $\mathfrak{A} \models S$ & $\mathfrak{A} \not\models \sigma$

Άρα, $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$.

Για να δείξω όμως $S \models \neg\sigma$

Θεωρώ $\mathfrak{B} \models S$

Με βάση την υπόθεση $\mathfrak{B} \models \neg\sigma$

Περιληπτικά

$S \subseteq T \leftarrow$ συνεπής

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$$

Θεώρημα Łoś-Vaught

Έστω S μια θεωρία χωρίς πεπερασμένα μοντέλα, & S συνεπής. & έστω ότι για κάποιον πληθάριθμο κ οποιαδήποτε δύο μοντέλα $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ της S πληθαρίθμου κ είναι ισόμορφα. Τότε S ~~κατηγορική δηλ.~~ οποιαδήποτε $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}\, S$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμα.

Σκιαγράφηση Απόδ.

Έστω $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ μοντέλα της S

$\exists\, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ τ.ω. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$ και $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}'$ & $|\mathfrak{A}'| = |\mathfrak{B}'| = \kappa$ (Θ. Löwenheim Skolem)

$\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{B}'$ άρα $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Να θυμόμαστε
Αν S θεωρία
1) Χωρίς πεπερ. μοντέλα
2) ∃ κ άπειρος ώστε αν $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ μοντέλα της S πληθαρ. κ τότε $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$
Τότε οποιαδήποτε δύο μοντέλα της S είναι στοιχειωδώς ισοδύναμα

Λίγη "Φιλοσοφία"
Έγκυρες = Αποδείξιμες   Gödel
$\mathfrak{A}$ Μπορώ να βρω αξιώματα ώστε οι αληθείς στην $\mathfrak{A}$ προτάσεις να είναι οι αποδείξιμες; ΟΧΙ

12-4-2013

Ασκήσεις
Α Μέρος Σύνταξη
Προπτυχιακές Σημειώσεις Ζάχος - Καρβέλας

Άσκηση 3.5.5
$\forall z \phi_z^y \vdash \forall y \phi$

αν y αντικαταστάσιμη για z

Απόδειξη (λανθασμένη).

Διόρθωση: Η z δεν εμφανίζεται στη ϕ.

$\forall z \phi_z^y \vdash \forall y \phi$

$\forall z \phi_z^y \to \underbrace{(\phi_z^y)_y^z}_{\phi}$ Α.Σ αντικατάστασης

σωστό.

$\forall z \phi_z^y \vdash \phi$

Μεταθεώρημα Γενίκευσης

$\forall z \phi_z^y \vdash \forall y \phi$ ΟΕΔ.

Αντιπαράδειγμα για την προηγούμενη απόδειξη

$\phi \quad z = y$

$\forall z \phi_z^y \quad , \quad \forall z (z=z)$ (Γενίκευση)

$\forall y \phi \quad \forall y (y=z)$

Άσκηση 3.5.6

$\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y\, f(x_1, \dots, x_n) = y$, όπου f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο

Απάντηση

Από το μεταθεώρημα Γενίκευσης αρκεί να αποδείξω ότι

$\vdash \exists y\, f(x_1, \dots, x_n) = y$

Από ορισμό του $\exists$ & Μεταθ. Απαγωγής σε Άτοπο αρκεί να αποδείξω ότι

$\forall y\, f(x_1, \dots, x_n) \neq y$ ασυνεπές.

Αλλά από το Αξίωμα Αντικατάστασης

Προκύπτει

$\forall y\, f(x_1,\dots,x_n) \neq y \vdash f(x_1,\dots,x_n) \neq f(x_1,\dots,x_n)$

Άρα, πράγματι $\forall y\, f(x_1,\dots,x_n) \neq y$ ασυνεπές

Β. Μέρος

Θέμα 1.1 Πρόοδος Μαίος 2012.

Σ_i, $i=1,\dots$, ~~Σι σχέση~~ ακολουθία από σύνολα τύπων

Τα Σ_i είναι συντακτικά ανεξάρτητα

Δηλαδή $\forall \phi \in \Sigma_i$, $\Sigma_i \setminus \{\phi\} \nvdash \phi$.

Να αποδειχθεί ότι συντακτικά ανεξάρτητο είναι το $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$

Απόδ.

Έστω ότι Σ όχι Συντακτικά ανεξάρτητο.

Έστω $\phi \in \Sigma$

$\Sigma \setminus \{\phi\} \vdash \phi$

(Τότε $\phi \in \Sigma_i$ για κάποιο i

Άρα $\Sigma_i - \{\phi\} \nvdash \phi$)

Επειδή οι τυπικές αποδείξεις είναι πεπερασμένες

$\exists\, \phi_1,\dots,\phi_n \in \Sigma \setminus \{\phi\}$ έτσι ώστε

$\{\phi_1,\dots,\phi_n\} \vdash \phi$

$\exists k$ $\phi_1,\dots,\phi_n, \phi \in \Sigma_k$

Άρα, $\Sigma_k - \{\phi\} \vdash \phi$ Άτοπο

Θέμα 1.2

Σημασιολογική Ανεξαρτησία

$\Sigma \setminus \{\phi\} \not\models \phi$.

Να αποδείξετε ότι αν Σ_i είναι σημασ. ανεξάρτητα, το ίδιο ισχύει για το Σ (χωρίς Εγκυρότητας - Πληρότητας αλλά με συμπάγεια)

Μη συμβατική Ανάλυση

Θέμα 2 Σεπτ. 12

$A \subseteq \mathbb{R}$. Τότε το A έχει μέγιστο στοιχείο αν το A ως υποσύνολο του ${}^*\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. ~~τότε το A έχει μέγιστο~~

Απόδ

Έστω m το $\sup_{\mathbb{R}} A$

Αν $m \in A$ τελειώσαμε

Θεωρώ το $st(m)$

1. Θα αποδείξω ότι $\forall x \in A$ $st(m) \geq x$.

Έστω $x_0 > st(m)$ Τότε $-st(m) + x_0 > 0$ & $-st(m) + x_0 \in \mathbb{R}$

Άρα, $dm < x_0 - st(m)$

Άρα $dm + st(m) < x_0$ Άτοπο.

2. Θα αποδείξω ότι $st(m) \in A$

~~Έστω ότι~~ $\forall x \in A$ $st(m) > x$

$\overbrace{St(m)}^{sup.} + \cancel{dm - \varepsilon}$ είναι άνω φράγμα του A
για κάποιο απειροστό $\varepsilon > 0$
Για να πετύχουμε το παραπάνω
$$St(m) + dm - \varepsilon > St(m)$$

Θεωρώ θετικό απειροστό ε τω.
$$\frac{\varepsilon}{2} > -dm$$

Τότε $\forall x \in A$
$$St(m) - x > \varepsilon$$

Έστω ε <u>θετικό</u> απειροστό
Τότε $m - \varepsilon$ ΔΕΝ είναι άνω φράγμα
Άρα, υπάρχει $x \in A$
$$m \geq x > m - \varepsilon$$
Άρα, $x \approx m$ Άρα, από μοναδικότητα του $st(m)$, $x = Stm$ <u>οεδ</u>

Θέμα Σεπτ-12

L χωρίς σύμβολα συναρτήσεων
(Πρωτοτάξια πεπερασμένη γλώσσα)
φ: τύπος
$\mathfrak{A} \models \varphi$ και έστω $\mathfrak{A}'$ πεπερασμένη υποδομή της $\mathfrak{A}$. Αληθεύει πάντα ότι $\mathfrak{A}' \models \varphi$.

$\forall a \in |\mathcal{A}|$, $\mathcal{A} \models \forall x_2 \cdots \forall x_n \; \psi[a, a_1, \dots, a_n]$
Με επαγωγή
$\forall a \in |\mathcal{A}'|$ $\mathcal{A} \models \forall x_2 \cdots \forall x_n \; \psi[a, a_1, \dots, a_n]$

- Έστω ότι $\mathcal{A}' \models \phi$ για κάθε πεπερασμένη υποδομή $\mathcal{A}'$ της $\mathcal{A}$

Υπόδειξη
Εμπλουτίζουμε τη γλώσσα περιλαμβάνοντας ένα σύμβολο σταθεράς c_a , $\forall a \in |\mathcal{A}|$

Σ σύνολο προτάσεων που περιλαμβάνει ϕ κ' όλες τις ατομικές αποφάνσεις στην εμπλουτισμένη γλώσσα που επαληθεύονται στην $\mathcal{A}$