Οριστότητα Συνόλου από Δομές

$\mathcal{K}$ σύνολο δομών

$\mathcal{K}$ καλείται <u>στοιχειωδώς</u> ορίσιμο (στην πρωτ. λογική)
EC (elementary class) αν υπάρχει τ πρόταση τ.ω.
$\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ ανν $\mathfrak{A} \models \tau$

$L = \{=\}$

Δομές: απλώς σύνολα

Θεωρώ παρακάτω δομές που είναι υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

$\mathcal{K} = \{A / A \subseteq \mathbb{N}\}$ είναι στοιχειωδώς ορίσιμη.

Κλάση $\mathcal{K}$ δομών που αποτελούν σύνολα με το πολύ 3 στοιχεία: $\exists x \exists y \exists z \forall t (t = x \vee t = y \vee t = z)$

Κλάση δομών που αποτελούνται από όλα τα πεπερασμένα σύνολα ΔΕΝ είναι στοιχειωδώς ορίσιμη.

Παραδείγματα Στοιχειωδών Κλάσεων

1) Κλάση Γραφημάτων

Γλώσσα:

E διθέσιο κατηγορηματικό σύμβολο

$\forall x (\neg E(x,x))$

$\forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow E(y,x))$

$$\left.\begin{array}{c} \forall x (\neg E(x,x)) \wedge \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow E(y,x)) \\ \Downarrow \text{ μεταγλωσσικό "έπεται"} \\ \text{Κλάση Γραφημάτων Στοιχειώδης} \end{array}\right\} \text{Λάθος}$$

Σωστό: Έστω $\mathcal{K}$ κλάση που αποτελείται από τα γραφήματα. Έστω τ η παραπάνω πρόταση.

$\mathcal{K} = \mathrm{mod}\,\tau$

Ορισμός

Στοιχειώδης καλείται μία K αν $\exists$ πρόταση $\tau : K = mod\,\tau$

Αβελιανές

2) Οι ομάδες αποτελούν ΣΚ

Γλώσσα : Διθέσιο Συναρ. Σύμβολο $+$

$$\left.\begin{array}{l} \exists e\, \forall x\, (x+e=x) \\ \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z+x+y=z) \\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x+y)+z = x+(y+z)) \\ \forall x\, \forall y\, (x+y=y+x) \end{array}\right\} \tau$$

Ορισμός

$\Sigma \models \phi$ ← τύπος : Σ έχει ως λογική συνέπεια τον ϕ (αν

↑ σύνολο τύπων — για κάθε δομή και αποτίμηση που ικανοποιεί / επαληθεύει όλα τα στοιχεία του Σ, επίσης ικανοποιεί / επαληθεύει τον ϕ)

$\mathfrak{A} \models \phi[s]$ ← απονομή

↑ δομή, ↑ τύπος

Συντακτικό Πρωτοτάξιας Λογικής

Τυπικές Αποδείξεις } Deductions / Formal Proofs

Συναγωγές

Αξιωματικό Σύστημα

Ενα Αξιωματικό Σύστημα σε μία Πρωτοτάξια Γλώσσα αποτελείται από:

1) Λογικά Αξιώματα (θα δούμε ποια είναι)
2) Μη Λογικά Αξιώματα (ποικίλλουν)
3) Κανόνες συμπερασμού

Κανόνες συμπερασμού : $\dfrac{\overbrace{u_1, \dots, u_n}^{\text{υποθέσεις}}}{\sigma \text{ συμπέρασμα}}$

Modus Ponens : $\dfrac{a,\ a \to \beta}{\beta}$

Λογικά Αξιώματα: Αξιωματικά Σχήματα

1) Ταυτολογίες π.χ. $(\phi \vee \neg\phi)$ (στην αποφαντική ταυτολογία $(A_1 \vee \neg A_1)$ αντικαθιστώ το A_1 με τον τύπο ϕ)

2) $\forall x \phi \rightarrow \phi^x_t$ x μεταβλητή, t όρος

Όμως αν π.χ. $\phi \equiv \exists y (\neg x = y)$ τότε:

$\forall x \phi \rightarrow \phi^x_y$

$\forall x \phi \rightarrow \exists y (\neg y = y)$

$\forall x \exists y (\neg x = y) \rightarrow \exists y (\neg y = y)$

$\forall x \exists y (\neg x = y) \rightarrow \exists y (y \neq y)$ άτοπο

Άρα πρέπει και t αντικαταστάσιμος

3) $\forall x (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \phi \rightarrow \forall x \psi)$

4) $\phi \rightarrow \forall x \phi$, x ΟΧΙ ελεύθερο στον ϕ

5) $x = x$

6) $x = y \rightarrow (\phi \rightarrow \phi')$, ϕ' προκύπτει από τον ϕ με αντικατάσταση κάποιων ελεύθερων εμφανίσεων του x με y

Τέλος, αν ϕ τύπος, τότε $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \phi$: Γενίκευση του ϕ

Οι γενικεύσεις των προηγουμένων αξιωμάτων είναι επίσης αξιώματα.

Τυπική Απόδειξη καλούμε μια ακολουθία τύπων $\phi_1, \dots, \phi_n$ τ.ω. κάθε όρος είτε είναι αξίωμα είτε προκύπτει από MP δυο προηγουμένων όρων

$\mathcal{A} \vdash \phi$, $\phi_1, \dots, \phi_n \equiv \phi$

αξιωμ. σύστημα

Τυπικές Αποδείξεις

Μεταθεωρήματα: Πράγματα που μας επιτρέπουν να δείχνουμε τυπικά θεωρήματα.

$\mathcal{A} \vdash \phi$

$\mathcal{A}_0$: μόνο λογικά αξιώματα

$\mathcal{A}_0 \vdash \phi$, ισοδύναμα $\vdash \phi$, ϕ είναι τυπικό θεώρημα του Αξ. Συσ. $\mathcal{A}_0$

$\Sigma \vdash \phi$

σύνολο τύπων

Μεταθεώρημα Γενίκευσης

Αν $\Sigma \vdash \phi$ & x ΔΕΝ εμφανίζεται ελεύθερα σε στοιχείο του Σ τότε $\Sigma \vdash \forall x \phi$

Απόδειξη

Επαγωγικά στον ϕ ή επαγωγικά στο μήκος της τυπικής απόδειξης.

Επαγωγή στο μήκος της απόδειξης:

Έστω $\phi_1, \dots, \phi_n$ τυπική απόδειξη στο Σ. Έστω ότι $\forall j < i$ $\Sigma \vdash \forall x \phi_j$, τότε $\Sigma \vdash \forall x \phi_i$.

Θα εξετάσω τι είναι το ϕ_i:

1) ϕ_i Λογικό Αξίωμα. Τότε $\forall x \phi_i$ επίσης Λ.Α. Άρα $\Sigma \vdash \forall x \phi_i$

2) $\phi_i \in \Sigma$

Όμως x δεν είναι ελεύθερο στο Σ άρα και στο ϕ_i $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Α.Σ. (4) + MP $\Rightarrow \Sigma \vdash \forall x \phi_i$.

3) $\dfrac{\phi_j, \ \phi_j \to \phi_i}{\phi_i}$. Από Ε.Υ. $\dfrac{\forall x \phi_j, \ \forall x(\phi_j \to \phi_i)}{\forall \phi_i}$ χρησιμοποιώντας το ΑΣ.(3) + MP

Συνέχεια Τυπικών Αποδείξεων

ϕ τύπος

~~$A \vdash \phi$~~ $\Sigma \vdash \phi$

~~$A_0 \vdash \phi$~~ $\vdash \phi$

ϕ ταυτολογική συνέπεια των $\phi_1, \dots, \phi_n$ αν

$(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \to \phi$ ταυτολογία

Ισοδύναμα: $\phi_1 \to (\phi_2 \to (\dots (\phi_n \to \phi) \dots))$ ταυτολογία

Μεταθεώρημα Γενίκευσης

$\Sigma \vdash \phi$ & x όχι ελεύθερη στο Σ, τότε $\Sigma \vdash \forall x \phi$

Μεταθεώρημα Απαγωγής

$\Sigma, \phi \vdash \psi$ ανν $\Sigma \vdash \phi \to \psi$

Απόδειξη

Αντίστροφο (ικανό): $\left.\begin{array}{l} x_1 \\ \vdots \\ x_n = \phi \to \psi \end{array}\right\} \Sigma$

Τότε $x_1, \dots, x_n, \phi$ + MP μας αποδεικνύει το ψ

Ευθύ (αναγκαίο): $\Sigma, \phi \vdash \psi$ τότε $\Sigma \vdash \phi \to \psi$

Έστω $x_1, \dots, x_n$ απόδειξη στο Σ, ϕ. Θα αποδείξουμε ότι $\phi \to x_1, \dots, \phi \to x_n$ είναι απόδειξη στο Σ. Με επαγωγή:

Α) x_i είναι στοιχείο του Σ

Τότε $x_i \to (\phi \to x_i)$ ταυτολογία. Επειδή $x_i \in \Sigma$ από MP: $\Sigma \vdash \phi \to x_i$

Β) το x_i είναι το ϕ.

Από ταυτολογία $\phi \to \phi$, τέλος.

Γ) Το x_i προέκυψε ως $\frac{x_k, x_k \to x_i}{x_i}$. Άρα επαγωγικά $\Sigma \vdash \phi \to x_k$ & $\Sigma \vdash \phi \to (x_k \to x_i)$.

Όμως $(\phi \to (x_k \to x_i)) \to ((\phi \to x_k) \to (\phi \to x_i))$ ταυτολογία

Άρα με δυο MP, τέλος.

Πρόταση

$\Sigma \vdash a_1$ & $\Sigma \vdash a_2$ ανν $\Sigma \vdash a_1 \land a_2$

Απόδειξη

$\Leftarrow$: Χρησιμοποιώντας τις δυο εξής ταυτολογίες: $a_1 \land a_2 \to a_1$, $a_1 \land a_2 \to a_2$ και MP.

$\Rightarrow$: Χρησιμοποιώντας την ταυτολογία: $a_1 \to (a_2 \to a_1 \land a_2)$ και MP.

Παρατήρηση

Δεν ισχύει ότι: $\Sigma \vdash a_1 \lor a_2$ ανν $\Sigma \vdash a_1$ ή $\Sigma \vdash a_2$

π.χ. $\Sigma \vdash p \lor \neg p$ αλλά μπορεί $\Sigma \nvdash p$ και $\Sigma \nvdash \neg p$

Άσκηση: 1) $\Sigma, a_1 \vee a_2 \vdash \phi$ ανν $\Sigma, a_1 \vdash \phi$ & $\Sigma, a_2 \vdash \phi$

2) $\Sigma \vdash \phi$ ανν $\Sigma \vdash \neg\neg\phi$ (<u>Μεταθεώρημα Διπλής Άρνησης</u>)

3) $\Sigma, \phi \vdash \psi$ ανν $\Sigma, \neg\psi \vdash \neg\phi$ (<u>Μεταθεώρημα Αντιθετοαντιστροφής</u>)

Λύση: $\Sigma, \phi \vdash \psi$ ανν (Μεταθ. Απαγ.) $\Sigma \vdash \phi \to \psi$ ανν $\Sigma \vdash \neg\psi \to \neg\phi$ ανν (Μεταθ. Απαγ.) $\Sigma, \neg\psi \vdash \neg\phi$.

4) Αν ϕ ταυτολογική συνέπεια των $\phi_1, \ldots, \phi_n$ & $\Sigma \vdash \phi_1$ & & $\Sigma \vdash \phi_2$ & ..... & $\Sigma \vdash \phi_n$ τότε $\Sigma \vdash \phi$

(<u>Μεταθεώρημα Ταυτολογικής Συνέπειας</u>)

Απαγωγή σε Άτοπο

Σ καλείται <u>ασυνεπές</u> αν υπάρχει ψ τ.ω. $\Sigma \vdash \psi \wedge \neg\psi$

<u>Μεταθεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο</u>: $\Sigma \vdash \phi$ ανν $\Sigma, \neg\phi$ ασυνεπές.

$\Rightarrow$: Έστω $\Sigma \vdash \phi$. Τότε $\Sigma, \neg\phi \vdash \neg\phi$ και $\Sigma, \neg\phi \vdash \phi$

Άρα $\Sigma, \neg\phi \vdash \phi \wedge \neg\phi$, άρα $\Sigma, \neg\phi$ ασυνεπές.

$\Leftarrow$: Έστω $\Sigma, \neg\phi$ ασυνεπές. Τότε $\Sigma, \neg\phi \vdash \psi \wedge \neg\psi$.

Τότε $\Sigma, \neg(\psi \wedge \neg\psi) \vdash \neg\neg\phi$. Από Μεταθεώρημα Διπλής Άρνησης $\Sigma, \neg(\psi \wedge \neg\psi) \vdash \phi$. Αλλά $\neg(\psi \wedge \neg\psi)$ ταυτολογία, άρα $\Sigma \vdash \phi$.

<u>Παραδείγματα</u>

1) $\vdash \exists x \forall y \phi \to \forall y \exists x \phi$

Αρκεί ν.δ.ο.: $\exists x \forall y \phi \vdash \forall y \exists x \phi$

Από Μ. Γενίκευσης, αρκεί ν.δ.ο: $\exists x \forall y \phi \vdash \exists x \phi$

Άρα αρκεί ν.δ.ο. $\forall x \neg\phi \vdash \forall x (\neg \forall y \phi)$.

Πάλι από Μ. Γενίκευσης, αρκεί ν.δ.ο: $\forall x \neg\phi \vdash \neg\forall y \phi$

Τέλος, αρκεί ν.δ.ο. $\{\forall x \neg\phi, \forall y \phi\}$ ασυνεπές.

Χρησιμοποιώντας το αξίωμα $\forall x \neg\phi \to \neg\phi$ έχουμε $\{\forall x \neg\phi, \forall y \phi\} \vdash \neg\phi$.

Με τον ίδιο τρόπο: $\{\forall x \neg\phi, \forall y \phi\} \vdash \phi$.

Άρα $\{\forall x \neg\phi, \forall y \phi\} \vdash \phi \wedge \neg\phi$.

<u>Στρατηγική:</u> $\vdash \phi \to \psi$: ΜεταΘεώρημα απαγωγής

$\vdash \forall x \phi$: ΜεταΘεώρημα Γενίκευσης

$\vdash \neg \psi$: Αν $\vdash \neg(\chi \to \psi)$ τότε $\vdash \chi$ & $\vdash \neg\psi$

Αν $\vdash \neg\neg\phi$ τότε $\vdash \phi$

Αν $\vdash \neg\forall x \phi$ τότε βρίσκουμε t τ.ω. $\vdash \neg\phi^x_t$

<u>ΜεταΘεώρημα Γενίκευσης Σταθερών</u>

Αν $\Sigma \vdash \phi$ & c σταθερά που δεν εμφανίζεται στο Σ, τότε $\Sigma \vdash \forall y \phi^c_y$ για κάποια μεταβλητή y.

<u>ΜεταΘεώρημα Ύπαρξης:</u> $\Sigma, \phi^x_c \vdash \psi$, c δεν εμφανίζεται στο $\Sigma \cup \{\phi, \psi\}$ τότε $\Sigma, \exists x \phi \vdash \psi$.