16/5/2013.

Συμμάζεμα
1) Πρωτοτάξια γλώσσα για την αριθμητική
2) Δομή $\mathbb{N}$
3) Αξιωματικό σύστημα A_E

Αντιπροσωπευσιμότητα.
Ορισιμότητα

$R \subseteq \mathbb{N}^k$
$\phi(x_1, \ldots, x_k)$
Αριθμ. προσδιορισμός

Θεώρημα
R αντιπρος. μέσω φ αν
1) φ αρ. προσδ.
2) R ορίσιμη μέσω φ

Αντιπροσωπεύσιμες σχέσεις.
Τελικά, θα αποδείξω ότι οποιαδήποτε σχέση
είναι διαγνώσιμες _, είναι αντιπρ.
τ απόφανση και χωρίς ποσοδείκτες
αληθής στη $\mathbb{N}$, τότε $A_E \vdash \tau$

α) Οι ατομικοί τύποι προσδιορίζονται (καθορίζονται) αριθμητικά.

β) ϕ, ψ αριθμ. προσδιορισμένοι τότε
$\neg\phi$, $\phi \to \psi$ επίσης αρ. προσδ.

γ) ϕ αριθμ. προσδ. τότε επίσης
αριθμ. προσδ. $(\forall x)(x<y \to \phi)$
$(\exists x)(x<y \wedge \phi)$.

(b) ϕ, ψ αρ. προσδ. , $\phi \to \psi$ αρ. προσδ.
$\phi \to \psi \; (x_1, \dots, x_k)$
Θεωρούμε κ φυσικούς αριθμούς
$(a_1, \dots, a_k)$.
Έστω

$$\left.\begin{array}{l} A_E \vdash \neg\phi(a_1, \dots, a_k) \\ A_E \vdash \psi(a_1, \dots, a_k) \end{array}\right\} A_E \vdash (\phi \to \psi)$$

(c) $(\exists x)(x<y \,\&\, \phi)$
αριθμ. προσδιορ.
$\phi(x, y, z)$.
Έστω $a_2, a_3 \in \mathbb{N}$
Θεωρούμε τις $(0, a_2, a_3), \dots, (a_2 - 1, a_2, a_3)$
Για την κάθε μία ξέρω

$A_E \vdash \phi$(τριάδα) ή

$A_E \vdash \neg\phi$(τριάδα).

<u>1η περίπτωση.</u>
Έστω ότι για μία τουλάχιστον τριάδα
$A_E \vdash \phi$(τριάδα).
Άρα, υπάρχει κάποιος φυσικός $a \in [0, a_2)$

έτσι ώστε $A_E \vdash \phi(a_1, a_2, a_3)$.
Άρα, $A_E \vdash \exists x (x<y \wedge \phi(x,y,z)) (a_2 a_3)$

2η περίπτωση.
Έστω ότι για όλες τις τριάδες $\neg\phi$(τριάδα)
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι
$$A_E \vdash \neg\exists x (x<y \wedge \phi) (a_2, a_3)$$
Αρκεί, $A_E \vdash \forall x (x<a_2 \rightarrow \neg\phi(x, a_2, a_3))$
Ξέρουμε ότι,
$$A_E \vdash \forall x (x<S^a \leftrightarrow x=0 \vee \dots \vee x=a-1)$$
Αρκεί να αποδείξουμε
$$A_E \vdash \neg\phi \text{ (τριάδα) που είναι φθδ.}$$

Σχέσεις αναπαραστάσιμες
Σχέσεις ορίσιμες από αριθμητικά προσδιορισμένους τύπους.

Θέση του Church
Διαγνώσιμο
Αποτελ. Αριθμήσιμο
Πολλοί ορισμοί.

Αριθμητικοποίηση σύνταξης
$$< a_0, \dots, a_m > = p_0^{a_0+1} \cdots p_m^{a_m+1}$$
$$<2, 3> = 2^3 \times 3^4 = 8 \times 81 = 648$$

κώδικας κενής ακολουθίας = 1.

Σύμβολο	Κώδικας
$\forall$	0
0	2
S	4
$<$	6
$+$	8
$\cdot$	10
E	12
(	1
)	3
$\neg$	5
$\rightarrow$	7
$=$	9
v_1	11
v_i	$9+2i$

Άρα, οποιαδήποτε μεταγλωσσική δήλωση για όρους, τύπους, αποφάνσεις αντιστοιχεί σε σχέσεις φυσικών αριθμών. Ορίσιμες σχέσεις.

17/5/2013

$f: N^k \to N$

Πότε θα λέγεται αντιπροσωπεύσιμη;

$\phi(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$. Θεωρούμε k-άδα στο N $a_1, \dots, a_k$.

$$AE \vdash \forall x_{k+1} [\phi(S^{a_1} 0, \dots, S^{a_k}, x_{k+1}) \leftrightarrow x_{k+1} = S^{f(a_1, \dots, a_k)} 0]$$

$R \subseteq N^k$

Λήμμα Σταθερού Σημείου

Εύκολη μορφή

$\beta(v_1)$ τύπος με 1 ελεύθερη μεταβλητή

Τότε υπάρχει πρόταση/απόφανση (sentence)

τέτοια ώστε

$$\mathfrak{N} \models \sigma \longleftrightarrow \beta(\#\sigma)$$

αριθμός Gödel της σ

Δύσκολη μορφή

$$AE \vdash \sigma \leftrightarrow \beta(\#\sigma)$$

Απόδειξη

$$\Phi : (\#\alpha, n) \longrightarrow \#\alpha(S^n 0)$$

αριθμός Gödel τύπου με μία μεταβ.

Υπολογίσιμη συνάρτηση

Άρα, Φ ορίσιμη

$\Theta\phi(v_1, v_2, v_3)$

$\Theta\phi(\cancel{v_1, v_2}, v_3)$ <u>αν</u> $a_3 = \phi(a_1, a_2)$

$\mathfrak{N} \models \Theta\phi(a_1, a_2, a_3)$

Θεωρώ τον τύπο

$\forall v_3 (\Theta\phi(v_1, v_1, v_3) \to b(v_3))$ q

Θεωρώ την πρόταση σ

$\boxed{\forall v_3 [\Theta\phi(S^q 0, S^q 0, v_3) \to b(v_3)]}$ $\bar{\sigma}$

Θα αποδείξω

$\sigma \leftrightarrow \beta(S^{\#\sigma} 0)$

$\boxed{b(\#\sigma)}$

Δέχομαι το σ

Αρκεί να δείξω $\Theta\phi(S^q, S^q, \#\sigma)$

<u>Ανάποδα</u> "

Τρία βασικά Θεωρήματα

A. <u>Θεώρημα Tarski (1933)</u>

#Thm <u>δεν</u> είναι ορίσιμο σύνολο

Έστω ότι ήταν ορίσιμο από τον τύπο $\beta(v_1)$

Θεωρώ τον $\neg b$

"Βρίσκω" το σταθερό σημείο σ

$\sigma \leftrightarrow \neg b(\#\sigma)$.

B $\# Th \mathbb{N}$ δεν είναι διαγνώσιμο

Γ. Θεώρημα Gödel 1931

$A \subseteq Th\mathbb{N}$, A διαγνώσιμο

CnA δεν είναι πλήρης θεωρία.

Απόδ.

Έστω ότι CnA πλήρης θεωρία.

$CnA \subseteq Th\mathbb{N}$

Άρα $CnA = Th\mathbb{N}$

Άρα, από πληρότητα CnA διαγνώσιμο. Άτοπο.