28/3/2013

Θεώρημα Αξιοπιστίας και Πληρότητας

Αποδείξαμε Θ. Αξιοπιστίας
Θα αποδείξουμε ότι οι έγκυροι τύποι έχουν τυπικές αποδείξεις.
Θεώρημα Συμπάγειας στην Αποφαντική Λογική (να το θυμηθούμε)
Κάθε συνεπές σύνολο Σ είναι ικανοποιήσιμο (είναι ισοδύναμο με το θεώρ. Πληρότητας)
Θ. Πληρότητας $\Sigma \models \phi$ τότε $\Sigma \vdash \phi$

$\neg\forall x\phi \to \neg\phi_c^x \in \Delta \supseteq \Sigma$

Τυπική Απόδειξη
↳ προσεκτική

Υποθέτω ότι η γλώσσα είναι αριθμήσιμη (Απλοποιητική Παραδοχή)
Προσθέτω νέες σταθερές $c_1, c_2, \ldots$
A. Το Σ παραμένει συνεπές. Πράγματι αν
$\Sigma \vdash \phi \wedge \neg\phi$
Χρησιμοποιώ Θ. Γενίκευσης Σταθερών. Για να καταλήξω Σ ασυνεπές στην αρχική γλώσσα. Άτοπο.
Θεωρώ τα $(\phi_1, x_1), (\phi_2, x_2), \ldots$ για όλους τους τύπους και για όλες τις μεταβλητές
Θεωρώ στην αρχή τους τύπους

$\neg\forall x_1\phi_1 \to \neg\phi_{1\,c_1}^{x_1}$ όπου c_1 νέα σταθερά την προσθέτω στο Σ

Θεώρημα Πληρότητας

$\Sigma \models \phi$ τότε $\Sigma \vdash \phi$

Αρκεί να αποδείξουμε:

Αν Σ συνεπές τότε είναι ικανοποιήσιμο

<u>Δύο βασικές ιδέες</u>

A. Απόδ. Θ. Συμπάγειας στην Αποφ. λογική

B. $\neg\forall x \phi$ να έχουν μάρτυρα (Henkin witness) στην υπό κατασκευή δομή.

<u>Προσεκτική Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι η γλώσσα του Σ είναι αριθμήσιμη

$c_1, c_2, \ldots$ ΝΕΕΣ σταθερές

Παρατηρούμε ότι το Σ παραμένει συνεπές.

Θεωρούμε μια αριθμήσιμη $(\phi_1, x_1), (\phi_2, x_2), \ldots$ τύπων και μεταβλητών

Στο Σ προσθέτω διαδοχικά τις

$$\neg\forall x_1 \phi_1 \rightarrow \neg \phi_{1\,c_1}^{x_1}$$

c_1 η πρώτη <u>νέα</u> σταθερά που δεν εμφανίζεται στον ϕ_1

c_2 η επόμενη σταθερά που δεν ανήκει στον $\neg\forall x_1 \phi_1 \rightarrow \neg\phi_{1\,c_1}^{x_1}$ και ούτε στην ϕ_2 κ.ο.κ

προσθέτω $\neg \forall x_2 \phi_2 \rightarrow \neg \phi_{2\,c_2}^{x_2}$.
Έστω Σ' το σύνολο που προκύπτει. Ισχυρισμός Σ' συνεπές.
θ_i $\neg \forall x_i \phi_i \rightarrow \neg \phi_{i\,c_i}^{x_i}$

Ας υποθέσουμε ότι n είναι ο πρώτος θετικός ακέραιος για τον οποίο
$\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ ασυνεπές.
Μεταθεώρημα Απαγωγής
$\Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_n\} \vdash \neg \theta_m$

$\neg\theta_m$:
$\neg(\neg \forall x \phi_m \rightarrow \neg \phi_{m\,c_m}^{x_m})$
Άρα,
$\left.\begin{array}{l} \Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_{m-1}\} \vdash \neg \forall x_m \phi_m \\ \Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_{m-1}\} \vdash \phi_{m\,c_m}^{x_m} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma \cup \{\theta_1, \dots, \theta_{m-1}\}$ ασυνεπές. Επομένως
$\Sigma \cup \{\theta_1, \dots\}$ συνεπές
Βρίσκουμε (όπως στο Θ. Συμπαγ. Αναφανικής λογικής) ένα
$\Delta \supseteq \Sigma \cup \{\theta_1, \dots\}$ έτσι ώστε Δ συνεπές
και για κάθε τύπο ϕ, $\phi \in \Delta$ ή $\neg\phi \in \Delta$.

Στοχεύουμε να αποδείξουμε ότι Σ ικανοποιήσιμο
Πρέπει να βρούμε δομή
$\mathcal{A} = \langle A$, ερμηνεία συμβόλων $\rangle$.

$A = \{ t \mid t$ όρος της γλώσσας (επιτυχη…) $\}$

Έστω f συναρτησιακό σύμβολο της γλώσσας

$$f^{\alpha}(t_1, \ldots, t_n) = f t_1 \ldots t_n$$

$$\uparrow$$

$$A$$

$$c^{\alpha} = c$$

$R^{\alpha}(t_1, \ldots, t_n)$ αν $R t_1 \ldots t_n \in \Delta$.

Πρόβλημα με ισότητα

Ερμηνεία σύμβολο $=$ είναι πάντα ισότητα

Ενδέχεται να υπάρχουν δύο δια. σύμβ σταθερών c, c' έτσι ώστε $c = c' \in \Delta$

Αγνοούμε προς στιγμήν το πρόβλημα με την ισότητα.

Για ένα ~~τύπο~~ πρόταση ϕ

$$\phi \in \Delta \text{ ανν } \alpha \models \phi.$$

Το πρόβλημα της ισότητας αντιμετωπίζεται εισάγοντας σχέση ισοδυναμίας στο α

// Τέλος απόδ.

$\Sigma \vdash \phi$ ανν $\Sigma \models \phi$.

Θεώρημα Συμπάγειας

Σ ικανοποιήσιμο ανν κάθε πεπερ. υποσύνολο του Σ ικανοποιήσιμο

Β. Μορφή Θ. Αξιοπιστίας Πληρότητας

Σ ικανοπ. ανν Σ συνεπές

Απόδ. Θ. Συμπ.

Σ ικανο. ανν Σ συνεπές (Β' μορφή Αξ. Πληρ.)

Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ συνεπές.

Κάθε πεπερασμένο " " ικανοπ. (Β' μορφή)

Σύμπτωση

Πρωτοτάξιες Γλώσσες

Δομές - Ερμηνείες

$\Sigma \models \phi$

Τυπικές αποδείξεις

$\Sigma \vdash \phi$

Α' μορφή : $\Sigma \models \phi$ ανν $\Sigma \vdash \phi$

Β' μορφή : Σ ικανοπ. ανν Σ συνεπές.

Θ. Συμπαγ.

Σ ικανοπ. ανν κάθε πεπερασμ. υποσ. του Σ ικανοπ.

Προσοχή!

Σ συνεπές ανν κάθε πεπ. υποσ. του Σ συνεπές

είναι προφανές (δεν είναι το Θ. Συμπάγειας)

Όλα τα μαθηματικά (συμπεριλαμβ. της Μαθημ. Λογικής).
Εκφράζονται στην πρωτοτάξια γλώσσα της θεωρίας Συνόλων.