Σημειώσεις Λογικής Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2011-2012

Καθηγητής: Λ. Κυρούσης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η Μαθηματική Λογική με λίγα λόγια είναι η μαθηματική θεώρηση της μαθηματικής προσέγγισης. Στην Μαθηματική Λογική εξετάζουμε την μαθηματική γλώσσα, δηλαδή την γλώσσα που μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε για να αποδεικνύουμε θεωρήματα, μέσα σε ένα εντελώς αυστηρό (μαθηματικό) πλαίσιο.

Η μαθηματική γλώσσα λοιπόν είναι το αντικείμενο του μαθήματος. Ο πρακτικός στόχος αυτού του μαθήματος είναι η καλύτερη κατανόηση της μαθηματικής προσέγγισης. Ο μη πρακτικός στόχος του (και ο σημαντικότερος) είναι να καταλάβουμε τι σημαίνει μαθηματική απόδειξη και μαθηματική αλήθεια, να εξετάσουμε αν αυτά τα δύο ταυτίζονται και τέλος να κατανοήσουμε τι σημαίνει αλγοριθμικότητα των μαθηματικών.

Στο μάθημα θα γίνεται χρήση δύο γλωσσών: της γλώσσας αντικείμενο, δηλαδή της γλώσσας υπό μελέτη, και της Μεταγλώσσας, δηλαδή της γλώσσας με την οποία θα μιλάμε εμείς για την γλώσσα αντικείμενο (π.χ Ελληνικά, Αγγλικά κλπ.). Η διάκριση πρέπει να είναι απολύτως σαφής για να μπορέσει κάποιος να παρακολουθήσει το μάθημα.

Σε αυτό το μάθημα πολύ συχνά θα συγχέουμε το όνομα του αντικειμένου με το ίδιο το αντικείμενο, π.χ. πολλές φορές θα λέμε ο τύπος ϕ, θα επικαλούμαστε δηλαδή το όνομα του τύπου, και θα εννοούμε την συντακτική μορφή του τύπου.

Τέλος, όπως έχουμε συνηθίσει στα μαθηματικά να χρησιμοποιούμε μεταβλητές x, y, z , οι οποίες μπορούν εν δυνάμει να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μέσα από ένα σύνολο, σε αυτό το μάθημα θα χρησιμοποιούμε συντακτικές μεταβλητές, δηλαδή μεταβλητές ϕ, ψ, χ που θα παίρνουν εν δυνάμει οποιαδήποτε μορφή μπορεί να πάρει ένας σωστός συντακτικά τύπος.

Κεφάλαιο 2

Προτασιακή Λογική

Ορισμός 2.0.1. Με Γ_0 συμβολίζουμε την γλώσσα του προτασιακού λογισμού η οποία θα περιέχει:

- Μία αριθμήσιμη ακολουθία από προτασιακές (λογικές) μεταβλητές $p_0, p_1, \ldots$.
- Τους λογικούς συνδέσμους $\neg$ (άρνηση), $\wedge$ (σύζευξη), $\vee$ (διάζευξη), $\rightarrow$ (συνεπαγωγή), $\leftrightarrow$ (διπλή συνεπαγωγή).
- Τις παρενθέσεις (,).

Παρατήρηση. Στον παραπάνω ορισμό χρησιμοποιήσαμε ορισμένα στοιχεία της μεταγλώσσας, συγκεκριμένα τα σύμβολα , και . . ..

2.1 Αναδρομικοί Ορισμοί - Επαγωγικές Αποδείξεις

Ορισμός 2.1.1. Έκφραση είναι μία πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα της Γ_0 (π.χ. $\neg p_0()$. Θα συμβολίζουμε με $E(\Gamma_0)$ το σύνολο των εκφράσεων.

Ορισμός 2.1.2. Μία έκφραση θα ονομάζεται προτασιακός τύπος αν και μόνον αν:

- είναι προτασιακή μεταβλητή,
- είναι της μορφής $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$ $(\phi \wedge \psi)$ $(\phi \rightarrow \psi)$ $(\phi \leftrightarrow \psi)$ όπου ϕ και ψ προτασιακοί τύποι[1].

Παρατήρηση. Για λόγους ευκολίας γραφής θα κάνουμε την ακόλουθη σύμβαση: το $\neg$ θα είναι ισχυρότερο όλων, τα $\wedge, \vee$ θα είναι ισχυρότερα από τα $\rightarrow, \leftrightarrow$,τα $\wedge, \vee$ θα είναι το ίδιο ισχυρά, και τέλος τα $\rightarrow, \leftrightarrow$ θα είναι το ίδιο ισχυρά. Δηλαδή π.χ. θα γράφουμε $\neg p_0 \wedge p_1 \rightarrow p_3 \wedge p_4$ αντί για $(((\neg p_0) \wedge p_1) \rightarrow (p_3 \vee p_4))$.

Ορισμός 2.1.3 (Επαγωγική απόδειξη)**.** Για να δείξουμε ότι μία ιδιότητα ισχύει για κάθε προτασιακό τύπο πρέπει να δείξουμε:

1. Βάση επαγωγής: Την αποδεικνύουμε για τις προτασιακές μεταβλητές
2. Δεχόμενοι ότι η ιδιότητα ισχύει για τους προτασιακούς τύπους ϕ, ψ, την αποδεικνύουμε για τους $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

[1] Ας σημειώσουμε ότι οι εκφράσεις ϕ και ψ του προηγούμενου ορισμού είναι συντακτικές μεταβλητές.

Πρόταση 2.1.1. *Κάθε τύπος έχει το ίδιο πλήθος αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.*

Απόδειξη. Εύκολη με επαγωγή στη δομή του τύπου. □

Πρόταση 2.1.2. *Κάθε γνήσιο μη κενό αρχικό τμήμα ενός τύπου έχει περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις.*

Απόδειξη. Εύκολη με επαγωγή στη δομή του τύπου, χρησιμοποιώντας και την πρόταση 2.1.1. □

Πρόταση 2.1.3. *Κάθε προτασικός τύπος εμπίπτει σε μία ακριβώς από τις περιπτώσεις του ορισμού 2.1.2.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ένας τύπος ϕ εμπίπτει σε 2 περιπτώσεις του ορισμού 2.1.2. Για παράδειγμα έστω ότι $\phi \equiv (\psi_1 \wedge \psi_2)$ και $\phi \equiv (\psi_1' \vee \psi_2')$ για κάποιους τύπους $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_1',\ \psi_2'$. Τότε εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είτε ο ψ_1 είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του ψ_1' είτε το αντίστροφο. Αυτό όμως είναι άτοπο από την πρόταση 2.1.2. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται ανάλογα. □

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και
επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας
στο σχετικό topic του μαθήματος.

2.2 Σημασιολογία της Γ_0

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε το συντακτικό της Γ_0, δηλαδή πως συντάσσονται οι προτασιακοί τύποι. Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε πως αποκτούν νόημα.

Ορισμός 2.2.1. Αποτίμηση (ή απονομή αληθείας) είναι μια συνάρτηση $a : M(\Gamma_0) \to \{\mathrm{A}, \Psi\}$ (ή $\{0, 1\}$). Η αποτίμηση μπορεί να επεκταθεί σε μία συνάρτηση $\bar{a} : T(\Gamma_0) \to \{\mathrm{A}, \Psi\}$ αναδρομικά σύμφωνα με τους ακόλουθους πίνακες αληθείας:

$\bar{a}(\phi)$	$\bar{a}(\psi)$	$\bar{a}(\neg\phi)$	$\bar{a}(\phi \wedge \psi)$	$\bar{a}(\phi \vee \psi)$	$\bar{a}(\phi \to \psi)$	$\bar{a}(\phi \leftrightarrow \psi)$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

Παρατήρηση. Στα επόμενα (καταχρηστικά) θα χρησιμοποιούμε πολλές φορές τον συμβολισμό a αντί του $\bar{a}$ για λόγους ευκολίας γραφής. Ωστόσο πρέπει να είναι σαφές ότι στην πραγματικότητα αυτό είναι μία σύμβαση, αφού η συνάρτηση $\bar{a}$ είναι επέκταση της a.

Ορισμός 2.2.2. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$. Θα λέμε ότι:

1. ο προτασιακός τύπος ϕ είναι ικανοποιήσιμος αν υπάρχει τουλάχιστον μία αποτίμηση a με $\bar{a}(\phi) = \mathrm{A}$. Σε αυτήν την περίπτωση θα λέμε επίσης ότι η a ικανοποιεί τον ϕ.
2. η αποτίμηση a ικανοποιεί το T, αν και μόνον αν η a ικανοποιεί κάθε στοιχείο του T.
3. το T είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν υπάρχει μία αποτίμηση που το ικανοποιεί[2]
4. ο ϕ είναι ταυτολογία αν και μόνον αν κάθε αποτίμηση ικανοποιεί τον ϕ.
5. ο ϕ είναι αντίφαση αν και μόνον αν ο $\neg\phi$ είναι ταυτολογία.
6. το T συνεπάγεται ταυτολογικά το ϕ, και θα γράφουμε $T \vDash \phi$ αν και μόνον αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και το ϕ.

Παρατήρηση. Στον παραπάνω ορισμό, αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του $\bar{a}(\phi)$ εξαρτάται μόνον από τιμή που δίνει η a στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον ϕ.

Παρατήρηση. Εύκολα συμπεραίνουμε ότι $\emptyset \vDash \phi$ αν και μόνο αν ο ϕ είναι ταυτολογία[3].

Θεώρημα 2.2.1. $T \vDash \phi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\phi\}$ *δεν είναι ικανοποιήσιμο*

Απόδειξη. **(⇒)** Υποθέτουμε ότι το $T \cup \{\neg\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Άρα υπάρχει αποτίμηση a που ικανοποιεί όλους τους τύπους του $T \cup \{\neg\phi\}$. Άρα υπάρχει a που δίνει την τιμή Α σε όλα τα στοιχεία του T και την τιμή Ψ στο ϕ. Άτοπο.[4]

[2] Γιατί είναι λάθος να πούμε ότι το σύνολο T είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του T είναι ικανοποιήσιμο;

[3] Θεωρούμε ότι όλες οι αποτιμήσεις ικανοποιούν το κενό σύνολο.

[4] Στην παραπάνω απόδειξη, χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο της είς άτοπον απαγωγής για να αποδείξουμε την είς άτοπον απαγωγή. Κάτι τέτοιο μπορούμε να το κάνουμε, γιατί χρησιμοποιήσαμε την είς άτοπον απαγωγή στη μεταγλώσσα.

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

(⇐) Υποθέτουμε ότι το $T \cup \{\neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο και θα δείξουμε ότι $T \vDash \phi$. Έστω a αποτίμηση που ικανοποιεί τα στοιχεία του T. Αφού το $T \cup \{\neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο αναγκαστικά η a θα δώσει τιμή Ψ στο $\neg\phi$, και συνεπώς τιμή Αστο ϕ, άρα η a θα ικανοποιεί και το ϕ.

□

Παρατήρηση. Έστω T μη ικανοποιήσιμο και ϕ τυχών προτασιακός τύπος. Τότε $T \vDash \phi$, αφού η μη ικανοποιησιμότητα του T μας λέει ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί όλους τους προτασιακούς τύπους του T.

Θεώρημα 2.2.2. *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ταυτολογίες:*

$$
\begin{array}{rr}
\phi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \phi & \text{(Αντιμεταθετικότητα)} \\
\phi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \phi & \\
\phi \wedge (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \wedge \chi & \text{(Προσεταιριστικότητα)} \\
\phi \vee (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\phi \vee \psi) \vee \chi & \\
\phi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) & \text{(Επιμεριστικότητα)} \\
\phi \vee (\psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) & \\
\neg\neg\phi \leftrightarrow \phi & \text{(Διπλή άρνηση)} \\
\neg(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \phi \wedge \neg\psi & \text{(Άρνηση συνεπαγωγής)} \\
\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\phi \vee \neg\psi & \text{(Νόμοι De Morgan)} \\
\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi & \\
\phi \vee \neg\phi & \text{(Νόμος απόκλεισης του τρίτου)} \\
(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi) & \text{(Νόμος αντιθετοαναστροφής)} \\
(\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg\phi \vee \psi & \text{(Νόμοι αντικατάστασης)} \\
(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) & \\
(\phi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) & \\
(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) &
\end{array}
$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Παρατήρηση. Λέμε ότι οι ϕ, ψ είναι λογικά ισοδύναμοι όταν ο τύπος $\phi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε και $\phi \equiv \psi$.

2.3 Επάρκεια (Πληρότητα) προτασιακών συνδέσμων

Ορισμός 2.3.1. Ένα σύνολο προτασιακών συνδέσμων C θα λέγεται επαρκές (ή πλήρες), αν κάθε προτασιακός τύπος είναι ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο, στον οποίο εμφανίζονται σύνδεσμοι μόνον από το C

Θεώρημα 2.3.1. *Το σύνολο $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι επαρκές.*

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή: Για τις προτασιακές μεταβλητές το θεώρημα ισχύει (αφού οι προτασιακές μεταβλητές δεν έχουν συνδέσμους). Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για τους προτασιακούς τύπους ϕ και ψ. Έστω ϕ', ψ' δύο προτασιακοί τύποι με συνδέσμους από το υπό εξέταση σύνολο, ώστε $\phi \equiv \phi'$ και $\psi \equiv \psi'$. Τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\neg\phi &\equiv \neg\phi' \\
\phi \wedge \psi &\equiv \phi' \wedge \psi' \\
\phi \vee \psi &\equiv \phi' \vee \psi' \\
\phi \rightarrow \psi &\equiv \neg\phi' \vee \psi' \\
\phi \leftrightarrow \psi &\equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)
\end{aligned}$$

□

2.3.1 Μονομελή επαρκή σύνολα συνδέσμων

Στα όσα έχουμε δει μέχρι τώρα, έχουμε συναντήσει μόνο έναν μονοθέσιο προτασιακό σύνδεσμο, το $\neg$[5]. Αποδεικνύεται πως κανένα σύνολο συνδέσμων που αποτελείται μόνο από έναν μονοθέσιο σύνδεσμο δεν είναι επαρκές.

Θα παρουσιάζουμε δύο ακόμη διθέσιους συνδέσμους και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε ένας από αυτούς αποτελεί και επαρκές σύνολο προτασιακών συνδέσμων. Οι δύο σύνδεσμοι που μας απασχολούν είναι ο $NAND$ (| ή $\uparrow$) και ο NOR ($\downarrow$), των οποίων τους πίνακες αληθείας παρουσιάζουμε παρακάτω:

$\bar{a}(\phi)$	$\bar{a}(\psi)$	$\bar{a}(\phi\|\psi)$	$\bar{a}(\phi \downarrow \psi)$
Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Θεώρημα 2.3.2. *Τα σύνολα προτασιακών συνδέσμων $\{|\}$ και $\{\downarrow\}$ είναι επαρκή*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα (άσκηση) ότι το σύνολο $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τους δύο αυτούς προτασιακούς συνδέσμους μόνο με τον $|$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
\neg\phi &\equiv \phi|\phi \\
\phi \vee \psi &\equiv (\phi|\psi)|(\phi|\psi)
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα δουλεύουμε και για τον $\downarrow$. □

[5] Υπάρχουν άλλοι μονοθέσιοι προτασιακοί σύνδεσμοι; Και αν ναι, τότε ποιοι είναι οι πίνακες αληθείας τους; Υπάρχουν μηδενοθέσιοι προτασιακοί σύνδεσμοι; Και αν ναι, τότε ποιοι είναι;

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

2.3.2 Μη επαρκή σύνολα συνδέσμων

Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο προτασιακών συνδέσμων δεν είναι επαρκές, αρκεί να βρούμε μία ιδιότητα που έχουν οι προτασιακοί τύποι που χρησιμοποιούν στοιχεία μόνον από αυτό το σύνολο, την οποία δεν έχουν όλοι οι προτασιακοί τύποι. Παραδείγματα θα δούμε ευθύς αμέσως.

Πρόταση 2.3.1. *Το* $\{\wedge\}$ *δεν είναι επαρκές.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ένας προτασιακός τύπος ϕ που περιέχει μόνο τον σύνδεσμο $\wedge$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$P = \textit{Για κάθε αποτίμηση } a \textit{ που δίνει στις μεταβλητή του } \phi \textit{ τιμή } \mathrm{A} \textit{ ισχύει ότι } \bar{a}(\phi) = \mathrm{A}.$$

Θα αποδείξουμε με επαγωγή τον παραπάνω ισχυρισμό. Για την βάση της επαγωγής, θεωρούμε ότι ο ϕ είναι μία προτασιακή μεταβλητή[6], και επομένως προφανώς ο ϕ έχει την P.

Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε ότι ο ϕ έχει την μορφή $\psi \wedge \chi$ όπου για τους ψ, χ ισχύει P. Αφού από την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $\bar{a}(\psi) = \mathrm{A}$ και $\bar{a}(\chi) = \mathrm{A}$, από τον πίνακα αληθείας του $\wedge$ προκύπτει ότι $\bar{a}(\phi) = \mathrm{A}$.

Παρατηρούμε ότι ο $\neg p$ δεν έχει την P, άρα το $\{\wedge\}$ δεν είναι επαρκές. □

Πρόταση 2.3.2. *Το* $\{\neg, \oplus\}$ *δεν είναι επαρκές*

Απόδειξη. Άσκηση.

Ορισμός 2.3.2. Ορίζουμε τον τριθέσιο προτασιακό σύνδεσμο $\pi(\phi, \psi, \chi)$ που ορίζεται ως η πλειοψηφία των τιμών των ϕ, ψ, χ [7].

2.4 Το Θεώρημα της Συμπάγειας

Ορισμός 2.4.1. Ένα σύνολο τύπων Σ λέγεται πεπερασμένα ικανοποιήσιμο (π.ι.) αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο.

Θεώρημα 2.4.1 (Συμπάγειας)**.** *Έστω σύνολο τύπων* Σ*. Το* Σ *είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν είναι π.ι.*

Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο όλα τα πεπερασμένα υποσύνολά του είναι ικανοποιήσιμα (προφανώς). Άρα η μία κατεύθυνση προκύπτει εύκολα.

Για να δείξουμε την άλλη κατεύθυνση βλέπουμε ότι πρέπει να ορίσουμε μία αποτίμηση, η οποία θα κάνει αληθείς όλους τους τύπους που είναι στο Σ. Ένας τέτοιος ορισμός μοιάζει δύσκολος εκ πρώτης όψεως. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να ορίσουμε την αποτίμηση να κάνει αληθείς τις μεταβλητές που εμφανίζονται στο Σ χωρίς άρνηση και ψευδείς τις μεταβλητές που εμφανίζονται στο Σ με άρνηση. Τι κάνουμε όμως αν μια μεταβλητή δεν εμφανίζεται καθόλου στο Σ; Μετά από άλλες παρόμοιες σκέψεις οδηγούμαστε στο ότι πρέπει να επεκτείνουμε το σύνολο Σ.

[6] Μηδέν εμφανίσεις του $\wedge$.

[7] Ποιος είναι ο πίνακας αληθείας του π;

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52. Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση. Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots$ μία απαρίθμηση των τύπων (το $E(\Gamma_0)$ είναι αριθμήσιμο, ως ένωση αριθμήσιμων συνόλων, άρα και το σύνολο των τύπων είναι αριθμήσιμο, βλ. και θεώρημα 2.5.1). Ορίζουμε την παρακάτω ακολουθία συνόλων:

$$\Delta_0 = \Sigma$$
$$\Delta_{i+1} = \left\{ \begin{array}{ll} \Delta_i \cup \{\phi_{i+1}\} & \text{αν } \Delta_i \cup \{\phi_{i+1}\} \text{ π.ι.} \\ \Delta_i \cup \{\neg\phi_{i+1}\} & \text{αλλιώς} \end{array} \right. \quad i \geq 0$$

Λήμμα 2.4.1. *Για κάθε i το σύνολο Δ_i είναι π.ι.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο i.

ΒΑΣΗ Για $i = 0$ το $\Delta_0 = \Sigma$ είναι π.ι.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ Υποθέτουμε ότι το Δ_i είναι π.ι.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ Θα δείξουμε ότι το $\Delta i + 1$ είναι π.ι. Θέτουμε $A_i = \Delta_i \cup \{\phi_{i+1}\}, B_i = \Delta_i \cup \{\neg\phi_{i+1}\}$. Έστω ότι και το A_i και το B_i δεν είναι π.ι. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα υποσύνολα του Δ_i έστω Δ_i', Δ_i'' τέτοια ώστε τα σύνολα $A_i' = \Delta_i' \cup \{\phi_{i+1}\}, B_i' = \Delta_i'' \cup \{\neg\phi_{i+1}\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμα. Επειδή όμως το Δ_i είναι π.ι. θα υπάρχει μία απονομή αλήθειας, έστω α, η οποία ικανοποιεί κάθε τύπο του $\Delta_i' \cup \Delta_i''$. Η α φυσικά δεν μπορεί να ικανοποιεί τα A_i', B_i' οπότε θα πρέπει $\alpha(\phi_{i+1}) = \alpha(\neg\phi_{i+1}) = \Psi$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως τουλάχιστον ένα από τα A_i, B_i είναι π.ι., άρα από τον ορισμό του Δ_{i+1} και αυτό είναι π.ι. □

Από το λήμμα 2.4.1 έχουμε ότι το σύνολο $\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty}$ είναι π.ι και ακόμα (από τον ορισμό των Δ_i) ότι για κάθε τύπο ϕ , $\phi \in \Delta \vee \neg\phi \in \Delta$.

Έστω προτασιακή μεταβλητή A. Ορίζουμε την απονομή αλήθειας α ως εξής:

$$a(A) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{A} & A \in \Delta \\ \Psi & A \notin \Delta \end{array} \right. \quad i \geq 0$$

Λήμμα 2.4.2. *Για κάθε τύπο ϕ* $\quad \alpha(\phi) = \mathrm{A} \Leftrightarrow \phi \in \Delta$

Απόδειξη. Δείχνουμε την ισοδυναμία με επαγωγή στη δομή των τύπων:

ΒΑΣΗ - $\phi = A$ (προτασιακή μεταβλητή) Προφανές από τον ορισμό της α

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη ισοδυναμία ισχύει για τύπους ϕ_1, ϕ_2

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ Θα δείξουμε το ζητούμε αν $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες και αφήνονται ως άσκηση.

($\Rightarrow$) $\alpha(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathrm{A} \Rightarrow \alpha(\phi_1) = \alpha(\phi_2) = \mathrm{A}$. Από ε.υ. έχουμε ότι $\phi_1, \phi_2 \in \Delta$. Αν $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \in \Delta$ τότε υπάρχει ένα υποσύνολο του Δ το $\{\phi_1, \phi_2, \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)\}$ το οποίο δεν είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί από το λήμμα 2.4.1 δείξαμε ότι το Δ είναι π.ι. Οπότε $(\phi_1 \wedge \phi_2) \in \Delta$.

($\Leftarrow$) $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Delta$. Έστω ότι $\alpha(\phi_1 \wedge \phi_2) = \Psi$. Τότε $\alpha(\phi_1) = \Psi \vee \alpha(\phi_2) = \Psi$. Από ε.υ. όμως θα ισχύει ότι $\phi_1 \notin \Delta \vee \phi_2 \notin \Delta$. Αν $\phi_1 \notin \Delta$ τότε θα ισχύει ότι $\neg\phi_1 \in \Delta$. Όμως το σύνολο $\{\neg\phi_1, \phi_1 \wedge \phi_2\} \subseteq \Delta$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, το οποίο είναι άτοπο. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $\phi_2 \notin \Delta$. Οπότε σε κάθε περίπτωση $\alpha(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathrm{A}$. □

*Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.*

Το λήμμα 2.4.2 μας λέει ότι η α ικανοποιεί το Δ. Από την κατασκευή του Δ όμως ισχύει ότι $\Sigma \subseteq \Delta$. Οπότε το Σ είναι ικανοποιήσιμο. Έτσι ολοκληρώσαμε την απόδειξη του θεωρήματος 2.4.1.

Λήμμα 2.4.3. $\Sigma \models \phi \Leftrightarrow \exists \Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma'| < \infty$ *τέτοιο ώστε* $\Sigma' \models \phi$

Απόδειξη. Αν το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο, η ισοδυναμία ισχύει τεριμμένα, οπότε στην παρακάτω απόδειξη υποθέτουμε ότι Σ ικανοποιήσιμο.

($\Rightarrow$) Από το 2.2.1 έχουμε ότι $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ όχι ικανοποιήσιμο. Οπότε από το θεώρημα της συμπάγειας, υπάρχει $\Sigma' \subseteq \Sigma\cup, |\Sigma'| < \infty$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\Sigma' \cup \phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Όμως πάλι από το λήμμα 2.2.1 έχουμε ότι $\Sigma' \models \phi$.

($\Leftarrow$) Κάθε απονομή αλήθειας που ικανοποιεί όλα τα στοιχεία του Σ ικανοποιεί και όλα τα στοιχεία του Σ' άρα και το ϕ. □

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

2.5 Λίγα στοιχεία από τη Θεωρία Αναδρομής

2.5.1 Αναδρομικά και αναδρομικά απαριθμητά σύνολα

Θα δώσουμε μερικά στοιχεία από Θεωρία Αναδρομής. Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο σύνολο Σ το οποίο θα ονομάζουμε αλφάβητο. Ορίζουμε $\Sigma^i = \{$ ακολουθία συμβόλων του Σ με μήκος $i\}$. Ορίζουμε $\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$ (άστρο του Kleene για το σύνολο Σ). Δίνουμε το παρακάτω λήμμα χωρίς απόδειξη.

Λήμμα 2.5.1. *Αν το Σ είναι αριθμήσιμο τότε το Σ^* είναι αριθμήσιμο.*

Έστω αλγόριθμος A και $x \in \Sigma^*$. Με $A(x)$ συμβολίζουμε τον υπολογισμό του A με είσοδο το x. Αν γράφουμε $A(x) = y$ εννοούμε ότι ο A με είσοδο x τερματίζει και δίνει έξοδο y.

Ορισμός 2.5.1.

1. Ένα σύνολο $L \subseteq \Sigma*$ λέγεται γλώσσα.
2. Για κάθε γλώσσα L ορίζουμε το συμπλήρωμα της L ως εξής: $L^c = \Sigma^* \setminus L$
3. Μία γλώσσα L καλείται ανδρομική [8] αν υπάρχει αλγόριθμος A, ο οποίος για κάθε $x \in \Sigma*$ τερματίζει και:
$$x \in L \Leftrightarrow A(x) = yes$$
$$x \notin L \Leftrightarrow A(x) = no$$
Λέμε ακόμα ότι ο A αποφασίζει την L.
4. Μια γλώσσα L καλείται αναδρομικά αριθμήσιμη(α.α)[9] αν υπάρχει αλγόριθμος A που αριθμεί τα στοιχεία της. Δηλαδή ο A τυπώνει στην έξοδό του όλα τα στοιχεία της L χωρίς απαραίτητα καθορισμένη σειρά και με πιθανές επαναλήψεις.
5. Μια γλώσσα L καλείται ημιανδρομική αν υπάρχει αλοριθμος A τέτοιος ώστε[10]
$$x \in L \Leftrightarrow A(x) = yes$$

Θεώρημα 2.5.1. *Για κάθε γλώσσα L : L αναδρομική $\Leftrightarrow$ L^c αναδρομική.*

Απόδειξη. Προφανής, αρκεί να αντιστρέψουμε το yes με το no στον αλγόριθμο που αποφασίζει την L (ή την L^c αντίστοιχα). □

Θεώρημα 2.5.2. *Για κάθε γλώσσα L : L ημιαναδρομική $\Leftrightarrow$ L α.α.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Όπως είπαμε το Σ^* είναι αριθμήσιμο. Οπότε έστω $w_1, w_2, \dots$ μία αρίθμηση των στοιχείων του. Αφού η L είναι ημιανδρομική υπάρχει αλγόριθμος A' τέτοιος ώστε για κάθε $i \geq 1$:

$$w_i \in L \Leftrightarrow A'(w_i) = yes \tag{2.1}$$

[8] άλλες ονομασίες είναι αποκρίσιμη, αλγοριθμική, διαγνώσιμη, επιλύσιμη

[9] αλλιώς αναγνωρίσιμη

[10] αν $x \notin L$ δεν ξέρουμε πως θα συμπεριφερθεί το $A(x)$. Μπορεί και να μην τερματίσει!

Θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο[11] A ο οποίος απαριθμεί τα στοιχεία της L. Ο A λειτουργεί σε βήματα. Στο n-οστό βήμα ($n \geq 1$) ο A κάνει το εξής:

$\forall i, 1 \leq i \leq n$ προσομειώνει τη λειτουργία του A' για το w_i για ένα (ακόμα) βήμα. Αν ο A' τερματίσει και $A'(w_i) = yes$ τότε ο A τυπώνει το w_i στην έξοδο και συνεχίζει στο επόμενο i.

Ουσιαστικά αυτό που κάνει ο A είναι να τρέχει τον A' "παράλληλα" για όλα τα στοιχεία του Σ^*. Λόγω της σχέσης 2.1 ο A' θα τερματίσει υποχρεωτικά, απαντώτας yes, για όλα τα στοιχεία της L, οπότε αυτά θα τυπωθούν σίγουρα στην έξοδο του A.

($\Leftarrow$) Τρέχουμε τον αλγόριθμο που αριθμεί την L και για κάθε x που θα βγει στην έξοδό του απαντάμε yes. Με αυτόν τον τρόπο απαντάμε yes για όλα τα στοιχεία της L αφού αυτά θα βγουν υποχρεωτικά στην απαρίθμηση. Αντίστροφα αν για κάποιο x απαντήσουμε yes σημαίνει ότι εμφανίστηκε κάπου στην απαρίθμηση άρα ανήκει στην L. $\square$

Θεώρημα 2.5.3. *Για κάθε γλώσσα L : L αναδρομική $\Leftrightarrow$ L και L^c α.α.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Από το θεώρημα 2.5.1 έχουμε ότι L^c αναδρομική. Από τον ορισμό 2.5.1 φαίνεται ότι κάθε αναδρομική γλώσσα είναι και ημιανδρομική, οπότε και α.α. Οπότε έχουμε το ζητούμενο.

($\Leftarrow$) Έστω A, A' οι αλγόριθμοι που απαριθμούν τις L, L^c αντίστοιχα. Ένας αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει την L λειτουργεί ως εξής:

για κάθε $w \in \Sigma^*$ κάνουμε παράλληλα τους υπολογισμούς $A(w)$, $A'(w)$. Επειδή $w \in L \vee w \in L^c$ υποχρεωτικά κάποιο από τα $A(w)$, $A'(w)$ θα σταματήσει και θα απαντήσει yes. Αν $A(w) = yes$ τότε απαντάμε yes. Αν $A'(w) = yes$ απαντάμε no. $\square$

Παρατήρηση. Από τα προηγούμενα κεφάλαια είναι σαφές ότι υπάρχουν αλγόριθμοι για τα παρακάτω:

- Για να αποφασίσουμε μία έκφραση της Γ_0 είναι τύπος. (κάνουμε μια συντακτική ανάλυση της έκφρασης χρησιμοποιώντας και τα λήμματα 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3).
- Για να αποφασίσουμε αν ένας τύπος είναι ταυτολογία ή όχι.
- Για να αποφασίσουμε αν ένας τύπος είναι ικανοποιήσιμος.
- Για να αποφασίσουμε αν $\Sigma \models \phi$, με Σ πεπερασμένο.

Οι αλγόριθμοι για τα 2-4 μπορούν να υλοποιηθούν εξετάζοντας όλες τις περιπτώσεις από τον πίνακα αλήθειας.

[11] η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε ονομάζεται dovetailing

Κεφάλαιο 3

Κατηγορηματική Λογική

3.1 Συντακτικό και σημασιολογία

Ορισμός 3.1.1. Μία πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 αποτελείται από

- Μία άπειρη ακολουθία μεταβλητών: $v_0, v_1, \dots$
- Τους λογικούς συνδέσμους: $\neg, \rightarrow$
- Τις παρενθέσεις: $(,)$
- Το σύμβολο της ισότητας: $\approx$
- Τον καθολικό ποσοδείκτη: $\forall$
- Για κάθε φυσικό $n \geq 0$ ένα σύνολο (ενδεχομένως κενό) από n-μελή κατηγορηματικά σύμβολα (ή σύμβολα ιδιοτήτων): P_{n_i}
- Για κάθε φυσικό $n \geq 0$ ένα σύνολο (ενδεχομένως κενό) από n-θέσια συναρτησιακά σύμβολα: f_{n_i}
- Ένα σύνολο (ενδεχομένως κενό) από σύμβολα σταθερών: c_k

Παρατήρηση. Οι λογικοί σύνδεσμοι $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ καθώς και ο υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$ θα εισαχθούν αργότερα ως συντομεύσεις των $\neg, \rightarrow$ και $\forall$. Επίσης πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε καταχρηστικά το κλασικό σύμβολο της ισότητας $=$ αντί του $\approx$ χάριν απλότητας.

Παρατήρηση. Συνήθως μία πρωτοβάθμια γλώσσα έχει πεπερασμένο πλήθος κατηγορηματικών και συναρτησιακών συμβόλων, και πεπερασμένο πλήθος σταθερών.

Ορισμός 3.1.2. Έκφραση είναι μία πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα της Γ_1. Θα συμβολίζουμε με $E(\Gamma_1)$ το σύνολο των εκφράσεων.

Ορισμός 3.1.3. Μία έκφραση θα ονομάζεται όρος της Γ_1 αν και μόνον αν:

- είναι προτασιακή μεταβλητή,
- είναι σταθερά,

- είναι της μορφής $ft_1 \ldots t_n$, όπου $t_1, \ldots, t_n$ όροι και f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο της Γ_1.

Το σύνολο των όρων της Γ_1 το συμβολίζουμε με $O(\Gamma_1)$.

Παρατήρηση. Θα γράφουμε τον όρο $ft_1 \ldots t_n$ και ως $f(t_1, \ldots, t_n)$ για να μας θυμίζει το συνήθη τρόπο γραφής των συναρτήσεων.

Δείχνουμε το ανάλογο της πρότασης 2.1.2.

Πρόταση 3.1.1. *Κάθε γνήσιο, μη κενό πρόθεμα ενός όρου δεν είναι όρος.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στη δομή των όρων.

Δείχνουμε το ανάλογο της πρότασης 2.1.3.

Πρόταση 3.1.2. *Κάθε έκφραση που είναι όρος εμπίπτει σε ακριβώς μία περίπτωση του ορισμού 3.1.3.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.1.1.

Παρατήρηση. Με συντακτική ανάλυση και χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα 3.1.1, 3.1.2 μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει για κάθε συμβολοσειρά αν είναι όρος ή όχι .

Ορισμός 3.1.4. Μία έκφραση θα ονομάζεται τύπος της Γ_1 αν και μόνον αν:

- είναι της μορφής $t_1 \approx t_2$, όπου $t_1, t_2 \in O(\Gamma_1)$,
- είναι της μορφής $Rt_1, \ldots, t_n$ όπου $t_1, \ldots, t_n \in O(\Gamma_1)$ και R n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο της Γ_1,
- είναι της μορφής $(\neg\phi), (\phi \rightarrow \psi), (\forall x\phi)$ όπου ϕ, ψ τύποι της Γ_1 και x μεταβλητή της Γ_1· στην τελευταία περίπτωση λέμε ότι οι εμφανίσεις της μεταβλητής x στον $(\forall x\phi)$ βρίσκονται στο πεδίο αναφοράς του καθολικού ποσοδείκτη.

Οι τύποι της μορφής 1 και 2 ονομάζονται ατομικοί τύποι. Το σύνολο των τύπων της Γ_1 το συμβολίζουμε με $T(\Gamma_1)$.

Παρατήρηση. Θα γράφουμε τον τύπο $Rt_1, \ldots, t_n$ και ως $R(t_1, \ldots, t_n)$, ή ακόμα και ως t_1Rt_2 ή (t_1Rt_2) για διμελή κατηγορηματικά σύμβολα, για να μας θυμίζει το συνήθη τρόπο γραφής των σχέσεων.

Παρατήρηση. Όπως και στην Προτασιακή Λογική οι παρενθέσεις θα παραλείπονται αν δεν υπάρχει κίνδυνος παρανόησης.

Παρατήρηση. Οι τύποι $(\exists x\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi)$ θεωρούνται συντομογραφίες των $(\neg(\forall x(\neg\phi))), (\neg(\phi \rightarrow (\neg\psi))), ((\neg\phi) \rightarrow \psi)$, αντίστοιχα και ο $(\phi \leftrightarrow \psi)$ συντομογραφία του $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$.

Παράδειγμα. Συμβολίζουμε με $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ την πρωτοβάθμια γλώσσα της θεωρίας συνόλων, που έχει ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο, το $\in$ (με προτιθέμενη ερμηνεία τη σχέση του ανήκειν), δεν έχει συναρτησιακά σύμβολα, και έχει ένα σύμβολο σταθεράς το $\emptyset$ (με προτιθέμενη ερμηνεία το κενό σύνολο)[1]. Οι εκφράσεις $u_0, \emptyset$ αποτελούν όρους της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$, ενώ οι εκφράσεις $\in v_0v_7$ (γράφεται $v_0 \in v_7$) και $\neg(v_2 \in v_3)$ αποτελούν τύπους της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ (ο πρώτος μάλιστα είναι ατομικός).

[1] Πολλοί συγγραφείς δεν συμπεριλαμβάνουν το $\emptyset$ στην $\Gamma_1^{\theta\sigma}$.

Η Γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών ($\Gamma_1^{\theta\alpha}$) περιλαμβάνει τη σταθερά **0** (σύμβολο μηδέν), το κατηγορηματικό σύμβολο $<$, το μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο $'$ (με προτιθέμενη ερμηνεία την πράξη του επόμενου, +1) , και τα διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $\oplus$, $\odot$[2].

Ορισμός 3.1.5. Μία εμφάνιση μίας μεταβλητής x σε έναν τύπο θα καλείται ελεύθερη, αν δεν βρίσκεται στο πλαίσιο αναφοράς ενός καθολικού ποσοδείκτη. Μία εμφάνιση μεταβλητής που δεν είναι ελεύθερη θα ονομάζεται δεσμευμένη. Είναι δυνατόν η ίδια μεταβλητή να έχει ελεύθερες και δεσμευμένες εμφανίσεις στον ίδιο τύπο. Επίσης, επειδή ο υπαρξιακός ποσοδείκτης ορίστηκε ως συντομογραφία του καθολικού, δεσμευμένες είναι και οι εμφανίσεις μεταβλητών στο πεδίο αναφοράς υπαρξιακού ποσοδείκτη (ως πλαίσιο αναφοράς υπαρξιακού ποσοδείκτη ορίζεται το πλαίσιο αναφοράς του αντίστοιχου καθολικού).

Παραδείγματα.

1. $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)((x_1 + x_4 = x_3) \vee (x_2 = 1))$

   Στο παράδειγμα αυτό οι εμφανίσεις των μεταβλητών x_1,x_2 και x_3 είναι δεσμευμένες ενώ η x_4 είναι ελεύθερη, αφού η x_4 δεν εμφανίζεται στο πλαίσιο αναφοράς καθολικού ποσοδείκτη.

2. $((\forall x_1)(x_1 = x_1)) \wedge (x_2 \cdot x_1 = x_3)$

   Στο παράδειγμα αυτό οι εμφανίσεις των μεταβλητών $x_2 x_3$ είναι ελεύθερες. Ωστόσο η μεταβλητή x_1 εμφανίζεται και ελεύθερη και δεσμευμένη. Συγκεκριμένα η εμφάνιση στο

   $$((\forall x_1)(x_1 = x_1))$$

   είναι δεσμευμένη ενώ η εμφάνιση στο

   $$(x_2 \cdot x_1 = x_3)$$

   είναι ελεύθερη, αφού δεν κείται στο πλαίσιο αναφοράς καθολικού ποσοδείκτη.

3. *Στον ορισμό του ορίου συνάρτησης*

   $$\lim_{x \to c} f(x) = y \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x(0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \epsilon)$$

   οι μεταβλητές ϵ, δ είναι δεσμευμένες.

4. *Στο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ η μεταβλητή x είναι δεσμευμένη.*

Ορισμός 3.1.6. Θα ονομάζουμε δομή (ή ερμηνεία) $\mathfrak{A}$ για μία πρωτοβάθμια κατηγορηματική γλώσσα ένα σύστημα αποτελούμενο από:

1. A μη κενό σύνολο. Γράφουμε $|\mathfrak{A}| = A$ (το σύμπαν της δομής).
2. Σχέσεις: $P^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ για κάθε $n-$μελές κατηγορηματικό σύμβολο P.
3. Συναρτήσεις $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ για κάθε $n-$θέσιο συναρτησιακό σύμβολο.
4. $c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$ για κάθε σύμβολο σταθεράς c.

[2]Στη συνέχεια πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε καταχρηστικά, χάριν απλότητας, τον ίδιο τυπογραφικό χαρακτήρα για ένα σύμβολο (κατηγορηματικό, συναρτησιακό ή σταθεράς) και την ερμηνεία του. Ο αναγνώστης θα πρέπει να είναι προσεκτικός να διακρίνει τις δύο περιπτώσεις.

Παράδειγμα.

Για την $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ έχουμε τα εξής σύμβολα $S, \oplus, \odot, \mathbf{0}$.

Κύρια (προτιθέμενη) Ερμηνεία:

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0 \rangle$$

όπου $\mathbb{N}$ είναι το σύμπαν, $Sa = a + 1$, και $a + b,\ a \cdot b, 0$ η συνήθης πρόσθεση, ο συνήθης πολλαπλασιασμός και το μηδέν αντίστοιχα.

Εναλλακτική Ερμηνεία:

$$^*\mathfrak{N} = \langle \mathbb{Z}, S, +, \cdot, -3 \rangle$$

όπου $\mathbb{Z}$ είναι το σύμπαν, $Sa = a - 2$, $+$ και $\cdot$ είναι οι συνήθεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμός αντίστοιχα και το μηδέν της ερμηνείας είναι το -3.

Παράδειγμα.

Αν θέλουμε να δώσουμε τον τύπο που λέει ότι ο x είναι πρώτος αριθμός, αυτός είναι ο παρακάτω: $(< S0x \wedge \forall y \forall z (= \odot yzx \rightarrow (= yS0 \vee = zS0)))$ Εδώ οι εμφανίσεις των y και z είναι δεσμευμένος, αντίθετα με τις εμφανίσεις του x. Επίσης, το $\forall y$, υπονοεί ότι το y αναφέρεται στο σύμπαν της ερμηνείας.

Παράδειγμα.

Για την γλώσσα της θεωρίας συνόλων έχουμε τα εξής σύμβολα $\in, \emptyset$.

Κύρια (προτιθέμενη) Ερμηνεία:

$$\mathfrak{N} = \langle V, \in^{\mathfrak{N}}, \emptyset^{\mathfrak{N}} \rangle$$

όπου σύμπαν είναι το V, δηλαδή το σύνολο όλων των συνόλων, $\in^{\mathfrak{N}}$ είναι το "υπάρχει" και $\emptyset^{\mathfrak{N}}$ είναι το κενό σύνολο.

Εναλλακτική Ερμηνεία:

$$^*\mathfrak{N} = \langle, \in^{*\mathfrak{N}}, \emptyset^{*\mathfrak{N}} \rangle$$

όπου είναι το σύμπαν, $\in^{*\mathfrak{N}}$ είναι το $<$ και $\emptyset^{\mathfrak{N}}$ είναι το μηδέν.

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\forall x \exists y \in xy$, ενώ με την προτιθέμενη ερμηνεία σημαίνει "για κάθε σύνολο, υπάρχει άλλο σύνολο που είναι μέλος του", με την εναλλακτική ερμηνεία σημαίνει "για κάθε φυσικό x υπάρχει κάποιος που ο πρώτος είναι μικρότερος του δεύτερου. Επομένως μία γλώσσα μπορεί να έχει αρκετές ερμηνείες και αυτές καθορίζουν τη σημασιολογία της.

Ορισμός 3.1.7. Θα ονομάζουμε αποτίμηση κάθε αντιστοίχιση των μεταβλητών στο σύμπαν μίας ερμηνείας

$$v : M(\Gamma_1) \rightarrow |\mathfrak{A}|$$

Παρατήρηση. Μία αποτίμηση επεκτείνεται σε κάθε όρο με μονοσήμαντο τρόπο ώστε να ικανοποιεί τα εξής:

- $\bar{v}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
- $\bar{v}(f\, t_1, \ldots, t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{v}(t_1), \ldots, \bar{v}(t_n))$

Παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την αποτίμηση v με $v(u_0) = v(u_1) = \ldots = 1$. Τότε στην $\mathfrak{N}$ έχουμε ότι $\bar{v}(\mathbf{0}'' \oplus \mathbf{0}') = 3$ και $\bar{v}(u_0' \oplus u_1') = 4$ ενώ στην ${}^*\mathfrak{N}$ έχουμε ότι $\bar{v}(\mathbf{0}'' \oplus \mathbf{0}') = -12$ και $\bar{v}(u_0' \oplus u_1') = -2$.

Ορισμός 3.1.8. Έστω v μία αποτίμηση, x μία μεταβλητή και $a \in |\mathfrak{A}|$. Θεωρούμε μία νέα αποτίμηση $v(x|a)(y)$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$v(x|a)(y) = \begin{cases} v(y), & y \neq x \\ a, & \text{αν } y = x \end{cases}$$

Αν έχουμε μία γλώσσα, μία δομή, μία αποτίμηση και έναν τύπο, τότε ορίζουμε:

Ορισμός 3.1.9 (Αληθείας του Tarski)**.** Θα λέμε ότι η ερμηνεία $\mathfrak{A}$ ικανοποιεί τον τύπο ϕ για την αποτίμηση v και θα συμβολίζουμε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν:

1. ϕ είναι $\approx t_1 t_2$, όπου $t_1, t_2 \in O(\Gamma_1)$, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν και μόνον αν $\bar{v}(t_1) = \bar{v}(t_2)$.
2. ϕ είναι $Rt_1, \ldots, t_n$, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν και μόνον αν $(\bar{v}(t_1), \ldots, \bar{v}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$.
3. ϕ είναι $(\neg\chi)$, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν και μόνον αν δεν ισχύει ότι $\mathfrak{A} \vDash \chi[v]$.
4. ϕ είναι $(\chi \to \psi)$, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν και μόνον αν $\mathfrak{A} \nvDash \chi[v]$ ή $\mathfrak{A} \vDash \psi[v]$ (ή ισοδύναμα αν $\mathfrak{A} \vDash \chi[v]$ τότε $\mathfrak{A} \vDash \psi[v]$).
5. ϕ είναι $(\forall x \chi)$, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν και μόνον αν για κάθε $a \in A$, $\mathfrak{A} \vDash \chi[v(x|a)]$.

Παρατήρηση. Συχνά αντί για $(\bar{v}(t_1), \ldots, \bar{v}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$ θα γράφουμε απλά $R^{\mathfrak{A}}(\bar{v}(t_1), \ldots, \bar{v}(t_n))$. Επίσης, ας επισημάνουμε για μία ακόμα φορά, ότι συχνά θα ταυτίζουμε για λόγους απλότητας συμβολισμού τα σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας με τις ερμηνείες τους δηλαδή αντί για $f^{\mathfrak{A}}, R^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}$ συχνά θα γράφουμε απλώς f, R, c.

Παρατήρηση. Ο ορισμός του Tarski επεκτείνεται και στους συνδέσμους που εισάγαμε σαν συντομεύσεις με τον φυσιολογικό τρόπο, δηλαδή αν:

1. ϕ είναι $(\chi \wedge \psi)$, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν και μόνον αν $\mathfrak{A} \vDash \chi[v]$ και $\mathfrak{A} \vDash \psi[v]$.
2. ϕ είναι $(\chi \vee \psi)$, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν και μόνον αν είτε $\mathfrak{A} \vDash \chi[v]$ είτε $\mathfrak{A} \vDash \psi[v]$.
3. ϕ είναι $(\chi \leftrightarrow \psi)$, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν και μόνον αν $\mathfrak{A} \vDash (\chi \to \psi)[v]$ και $\mathfrak{A} \vDash (\psi \to \chi)[v]$.
4. ϕ είναι $(\exists x \chi)$, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v]$, αν και μόνον αν υπάρχει $a \in A$, $\mathfrak{A} \vDash \chi[v(x|a)]$.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω τύπος ϕ, ερμηνεία $\mathfrak{A}$, και αποτιμήσεις v_1, v_2 στη $\mathfrak{A}$ που συμφωνούν στις ελεύθερες μεταβλητές του ϕ, τότε $\mathfrak{A} \vDash \phi[v_1]$ ανν $\mathfrak{A} \vDash \phi[v_2]$.*

Απόδειξη. Θα πρέπει πρώτα να αποδειχθεί με επαγωγή το ακόλουθο λήμμα: αν v_1, v_2 είναι αποτιμήσεις που συμφωνούν στις μεταβλητές του όρου t, τότε $\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t)$. Στην συνέχεια δείχνουμε πάλι με επαγωγή στην δομή του ϕ το ζητούμενο. □

Ορισμός 3.1.10. Έστω τύπος ϕ τέτοιος ώστε οι ελεύθερες μεταβλητές του είναι μεταξύ των $u_1, ..., u_k$. Τότε για $a_1, ..., a_k \in |\mathfrak{A}|$, γράφουμε

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \phi[\![a_1, ..., a_k]\!]$$

ανν η ικανοποιεί τον ϕ για κάθε αποτίμηση s με $s(u_i) = a_i, 1 \leq i \leq k$.

*Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και
επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας
στο σχετικό topic του μαθήματος.*

Ορισμός 3.1.11. Αν ϕ πρόταση, τότε η ερμηνεία $\mathfrak{A}$ είναι μοντέλο της πρότασης αν $\mathfrak{A} \models \phi$.

Ορισμός 3.1.12. Για Σ σύνολο προτάσεων με $Mod\Sigma$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μοντέλων του Σ, δηλαδή την κλάση όλων των δομών της γλώσσας στις οποίες όλα τα μέλη του Σ είναι αληθή.

$$Mod\Sigma = \{\mathfrak{A} | \forall \tau \in \Sigma, \mathfrak{A} \models \tau\}$$

Για μια μόνο πρόταση τ γράφουμε $Mod\tau$ αντί για $Mod\{\tau\}$.

Παρατήρηση. Αν Σ σύνολο τύπων, και ϕ τύπος, $\Sigma \models \phi \iff \forall \mathfrak{A}, \forall s, \forall \tau \in \Sigma, \mathfrak{A} \models \tau\,[s]$ τότε $\mathfrak{A} \models \phi\,[s]$

Ορισμός 3.1.13. Για δύο τύπους ϕ και ψ, γράφουμε $\phi \equiv \psi$ αν $\phi \models \psi$ και $\psi \models \phi$.

Ορισμός 3.1.14. $Th\mathfrak{A} = \{\phi | \phi$ πρόταση & $\mathfrak{A} \models \phi\}$

Ορισμός 3.1.15. Δύο δομές $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ λέγονται στοιχειωδώς ισοδύναμες (elementary equivalent) αν ικανοποιούν τις ίδιες προτάσεις, και γράφουμε $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Παρατήρηση. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \iff Th\mathfrak{A} = Th\mathfrak{B}$

Ορισμός 3.1.16. (Ορισιμότητα) Έστω $\mathfrak{A}$ ερμηνεία πρωτοβάθμιας γλώσσας και έστω σχέση $R \subseteq |\mathfrak{A}|^n$. R είναι ορίσιμη αν υπάρχει τύπος ϕ (με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $u_1, ..., u_n$) τέτοιος ώστε $R^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) \iff \mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, ..., a_n]$.

Ορισμός 3.1.17. (Αξιωματικοποίηση) Έστω Σ κλάση απο δομές/ερμηνείες. Η Σ είναι πεπερασμένως αξιωματικοποιήσιμη (elementary class) αν υπάρχει πρόταση τ τέτοια ώστε $\Sigma = Mod\tau = \{\mathfrak{A} | \mathfrak{A} \models \tau\}$.

Παράδειγμα. Έστω E διμελές κατηγοριματικό σύμβολο, και $\mathfrak{G} = \{G =< V, E > | G$ γράφημα $\}$. Αν $\tau_1 = (\forall x)(\neg E(x,x))$ και $\tau_2 = (\forall x)(\forall y)(E(x,y) \rightarrow E(y,x))$, τότε βλέπουμε οτι $\mathfrak{G}$ είναι αξιωματικοποιήσιμη, αφού $\mathfrak{G} = Mod\{\tau_1 \wedge \tau_2\}$.

Ορισμός 3.1.18. (Ομομορφισμός) Έστω δομές $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$. Ένας ομομορφισμός h απο τη $\mathfrak{A}$ στη $\mathfrak{B}$ είναι μια συνάρτηση $h : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ τέτοια ώστε:

1. Για κάθε n-μελές κατηγόρημα P και κάθε n-άδα $(a_1, ..., a_n)$ στοιχείων του $|\mathfrak{A}|$, $P^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)$ ανν $P^{\mathfrak{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$
2. Για κάθε n-μελή συνάρτηση f και κάθε n-άδα $(a_1, ..., a_n)$ στοιχείων του $|\mathfrak{A}|$, $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), ..., h(a_n))$
3. Για κάθε σταθερά c, $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.

Θεώρημα 3.1.2. ***Homomorphism Theorem***: *Έστω h ομομορφισμός απο τη $\mathfrak{A}$ στη $\mathfrak{B}$, και ϕ τύπος με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $v_1, ..., v_n$, και αν $a_1, ..., a_n \in |\mathfrak{A}|$, τότε, $\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, ..., a_n]$ ανν $\mathfrak{B} \models \phi\,[h(a_1), ..., h(a_n)]$. (Αν ϕ περιέχει ισότητα, το θεώρημα ισχύει μόνο αν h ένα-προς-ένα)*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το θεώρημα πρώτα δείχνουμε, με επαγωγή, οτι για όρο τ με μεταβλητές μεταξύ των $v_1, ..., v_n$ και $a_1, ..., a_n \in |\mathfrak{A}|$, και $t\,[a_1, ..., a_n]$ είναι $\bar{s}(t)$ για κάθε $\bar{s}$ όπου $s(v_i) = a_i, \forall 1 \leq i \leq n$, τότε $h(t\,[a_1, ..., a_n]) = t\,[h(a_1), ..., h(a_n)]$.

Στη συνέχεια, δείχνουμε το θεώρημα με επαγωγή στην δομή του τύπου ϕ:

Βάση: ϕ ατομικός τύπος και ϕ είναι $Rt_1...t_k$, τότε

$$\mathfrak{A} \models R(t_1...t_k)\left[a_1,...,a_k\right] \iff R^{\mathfrak{A}}(t_1\left[a_1,...,a_n\right],...,t_k\left[a_1,...,a_n\right]) \iff$$
$$R^{\mathfrak{B}}(t_1\left[h(a_1),...,h(a_n)\right],...,t_k\left[h(a_1),...,h(a_n)\right]) \iff$$
$$\mathfrak{B} \models R(t_1,...,t_k)\left[h(a_1),...,h(a_n)\right])$$

Όμοια για την περίπτωση που ϕ είναι $\approx t_1t_2$

Επαγωγική Υπόθεση: Έστω οτι ισχύει για τύπους ψ,χ.

Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξουμε μόνο την περίπτωση που ϕ είναι $(\forall x\psi)\left[a_1,...,a_k\right]$, που είναι και η μόνη ενδιαφέρουσα. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αφήνονται ως άσκηση. Θέλουμε να δείξουμε οτι:

$$\mathfrak{A} \models (\forall x\psi)\left[a_1,...,a_k\right] \iff \mathfrak{B} \models (\forall x\psi)\left[h(a_1),...,h(a_k)\right]$$

και απο την επαγωγική υπόθεση έχουμε οτι:

$$\mathfrak{A} \models (\forall x\psi)\left[a_1,...,a_k\right] \iff$$
$$\forall\alpha \in |\mathfrak{A}|, \mathfrak{A} \models \psi\left[a_1,...,a_k,\alpha\right] \iff$$
$$\forall b \in |\mathfrak{B}|, \mathfrak{B} \models \psi\left[h(a_1),...,h(a_k),b\right]$$

.

Για την εύθεια κατεύθυνση, έστω $b \in |\mathfrak{B}|$. Τότε, υπάρχει $\alpha \in |\mathfrak{A}|$ (h επί), τέτοιο ώστε $b = h(\alpha)$, και έχουμε

$$\mathfrak{A} \models \psi\left[a_1,...,a_k,\alpha\right] \iff \mathfrak{B} \models \psi\left[h(a_1),...,h(a_k),h(\alpha)\right]$$

απο το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έχουμε

$$\mathfrak{B} \models (\forall x\psi)\left[h(a_1),...,h(a_k)\right] \Rightarrow$$
$$\forall b \in h(|\mathfrak{A}|), \mathfrak{B} \models \psi\left[h(a_1),...,h(a_k),b\right] \Rightarrow$$
$$\forall\alpha \in |\mathfrak{A}|, \mathfrak{B} \models \psi\left[h(a_1),...,h(a_k),h(\alpha)\right] \Rightarrow$$
$$\mathfrak{A} \models (\forall x\psi)\left[a_1,...,a_k\right]$$

□

Ορισμός 3.1.19. (Αυτομορφισμός) Αυτομορφισμός είναι μία ένα-προς-ένα και επί απεικόνιση (ισομορφισμός) από μία δομή στον εαυτό της, δηλαδή, h αυτομορφισμός για την $\mathfrak{A}$ αν, είναι ομομορφισμός και $h : |\mathfrak{A}| \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow |\mathfrak{A}|$.

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα ομομορφισμών στην περίπτωση των αυτομορφισμών έχουμε άμεσα το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1. *Έστω h ένας αυτομορφισμός μιάς δομής $\mathfrak{A}$ και έστω R n-μελής σχέση στο $|\mathfrak{A}|$ και ορίσιμη στην $\mathfrak{A}$. Τότε για κάθε $a_1,\ldots,a_n \in R$ ισχύει*

$$< a_1,\ldots,a_n >\in R \iff < h(a_1),\ldots,h(a_n) >\in R$$

Το παραπάνω πόρισμα είναι χρήσιμο στις αποδείξεις μη-ορισιμότητας σχέσεων και συναρτήσεων. Η ιδέα είναι πως όταν θέλω να δείξω ότι μία σχέση R δεν είναι ορίσιμη για κάποια ερμηνεία $\mathfrak{A}$ θα ψάχνω να βρω κατάλληλο αυτομορφισμό h της $\mathfrak{A}$ τέτοιον ώστε να μην ισχύει το προηγούμενο πόρισμα.

*Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και
επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας
στο σχετικό topic του μαθήματος.*

Παράδειγμα. *Έστω η δομή $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, <)$ των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη διάταξη. Θα δείξουμε ότι οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$ δεν είναι ορίσιμοι σε αυτή τη δομή. Παρατηρούμε ότι για αυτή τη δομή ένας αυτομορφισμός είναι απλά μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση h από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, δηλαδή,*

$$a < b \iff h(a) < h(b)$$

Έτσι λοιπόν, η συνάρτηση $h(x) = \sqrt[3]{x}$ είναι ένας αυτομορφισμός.

Έστω, προς άτοπο, ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι ορίσιμοι στην $\mathfrak{R}$. Τότε θα υπάρχει τύπος ϕ τέτοιος ώστε

$$x \in \mathbb{N} \iff \mathfrak{R} \vDash \phi[x]$$

Από το προηγούμενο πόρισμα θα έχουμε ότι,

$$\mathfrak{R} \vDash \phi[x] \iff \mathfrak{R} \vDash \phi[h(x)]$$

δηλαδή, $x \in \mathbb{N} \iff \sqrt[3]{x} \in \mathbb{N}$. Άτοπο.

Ορισμός 3.1.20. Ένα αξιωματικό σύστημα αποτελείται από,

- Λ: λογικά αξιώματα
- Γ: μη λογικά αξιώματα (τύποι)
- K: αποδείκτικούς κανόνες (π.χ. Modus Ponens)

Ορισμός 3.1.21. (Απόδειξη) Απόδειξη είναι μία πεπερασμένη ακολουθία $\phi_1, \ldots, \phi_n$ από τύπους, τέτοια ώστε για κάθε $i \in 1, \ldots, n$ να ισχύει ένα από τα παρακάτω,

1. $\phi_i \in \Lambda$
2. $\phi_i \in \Gamma$
3. $\exists j, k < i$ τέτοια ώστε $\phi_j = x \to \phi_i$ και $\phi_k = x$ (δηλαδή το ϕ_i προκύπτει με εφαρμογή του Modus Ponens. Γενικά θα μπορούσε να προκύπτει από έναν οποιονδήποτε κανόνα παραγωγής.)

Γράφουμε τότε ότι, $\Gamma \vdash \phi_n$.

Αξιωματικά Σχήματα: Τα αξιωματικά σχήματα περιγράφουν ομάδες αξιωμάτων. Θεωρούμε λοιπόν τα παρακάτω αξιωματικά σχήματα,

(ΑΣ1) Ταυτολογίες

(ΑΣ2) $\forall x \alpha \to \alpha_t^x$, όπου t αντικαστάσιμος για τον x στον α (λέμε ότι t αντικαστάσιμος από τον x στον α αν κατά την αντικαστάση δεν προκύπτει δέσμευση μεταβλητής του t)

(ΑΣ3) $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta)$

(ΑΣ4) $\alpha \to \forall x \alpha$, όπου x δεν έχει ελεύθερες εμφανίσεις στον α

(ΑΣ5) $x = x$, για οποιαδήποτε μεταβλητή x

(ΑΣ6) $x = y \to (\alpha \to \alpha')$, όπου α, α' ατομικοί τύποι και ο α' προκύπτει από τον α αντικαθιστώντας κάποια x με y

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

Σημείωση: Θέλουμε τα αξιώματα να είναι έγκυροι τύποι.

Ορισμός 3.1.22. (Αξίωμα) Ορίζουμε ως αξίωμα οποιαδήποτε γενίκευση την αξιωματικών σχημάτων 1 έως 6.

Ταυτολογίες: Για ένα τυπικό ορισμό και περιγραφή βλέπε Enderton σελίδα 114. Αν θέλουμε να δούμε αν ένας τύπος είναι ταυτολογία (άτυπα και πρόχειρα) "αντικαθιστούμε τους καθολικούς ποσοδείκτες με προτασιακές μεταβλητές και ελέγχουμε αν προέκυψε ταυτολογία της προτασιακής λογικής"

Παραδειγμα απόδειξης. Έστω P μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο.

1. $(\forall y \neg Py \to \neg Px) \to (Px \to \neg\forall y \neg Py)$ (ΑΣ1)
2. $\forall y \neg Py \to \neg Px$ (ΑΣ2)
3. $Px \to \neg\forall y \neg Py$ (MP1,2)

Παραδειγμα απόδειξης. Έστω P μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο. Θα δείξουμε ότι $\vdash \forall x(Px \to \exists y Py)$,δηλαδή ότι, $\vdash \forall x(Px \to \neg\forall y \neg Py)$.

1. $\forall x[(\forall y \neg Py \to \neg Px) \to (Px \to \neg\forall y \neg Py)]$ (γενίκευση του ΑΣ1)
2. $\forall x[(\forall y \neg Py \to \neg Px) \to (Px \to \neg\forall y \neg Py)] \to [[\forall x(\forall y \neg Py \to \neg Px)] \to [\forall x(Px \to \neg\forall y \neg Py)]]$ (ΑΣ3)
3. $[\forall x(\forall y \neg Py \to \neg Px)] \to [\forall x(Px \to \neg\forall y \neg Py)]$ (MP1,2)
4. $\forall x(\forall y \neg Py \to \neg Px)$ (γενίκευση του ΑΣ2)
5. $\forall x(Px \to \neg\forall y \neg Py)$ (MP3,4)

Θεώρημα 3.1.3. ***(Μεταθεώρημα Γενίκευσης)*** *Αν $\Gamma \vdash \phi$ και x δεν έχει ελεύθερη εμφάνιση στο Γ τότε $\Gamma \vdash \forall x\phi$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στην απόδειξη $\Gamma \vdash \phi$. Αν $\phi \in \Gamma$ τότε x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ϕ και τελειώσαμε. Αν $\phi \in \Lambda$ τότε με γενίκευση έχουμε το ζητούμενο. Διαφορετικά ο ϕ προκύπτει με MP από προηγούμενες προτασεις... □

Εφαρμογή του θεωρήματος Γενίκευσης. *Θα δείξουμε ότι $\forall x\forall y\alpha \vdash \forall y\forall x\alpha$. Από το (ΑΣ2) έχουμε εύκολα ότι $\forall x\forall y\alpha \vdash \alpha$. Εφαρμόζοντας εδώ το θεώρημα δύο φορές έπεται το ζητούμενο.*

Θεώρημα 3.1.4. ***(Μεταθεώρημα Ταυτολογιών - Rule T)*** *Αν $\Gamma \vdash \alpha_1, \dots, \Gamma \vdash \alpha_n$ και το β είναι ταυτολογική συνέπεια των $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ τότε $\Gamma \vdash \beta$.*

Απόδειξη. Από υπόθεση έχουμε ότι $\alpha_1 \to \cdots \to \alpha_n \to \beta$ είναι ταυτολογία και έτσι ανήκει στο (ΑΣ1). Εφαρμόζοντας MP διαδοχικά n φορές έχομε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.1.5. ***(Μεταθεώρημα Απαγωγής - Deduction Rule)*** $\Gamma, \phi \vdash \psi \iff \Gamma \vdash \phi \to \psi$.

Απόδειξη. **(⇐)** Άμεσο, εφαρμόζοντας MP.

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

(⇒) Με επαγωγή στην απόδειξη $\Gamma, \phi \vdash \psi$. Αν $\phi \equiv \psi$ τότε έχουμε άμεσα το ζητούμενο. Αν $\psi \in \Gamma$ ή είναι λογικό αξίωμα τότε με μία εφαρμογή του θεωρήματος ταυτολογιών έχουμε το ζητούμενο. Αν το ψ προέκυψε από MP τότε με εφαρμογή πάλι του θεωρήματος ταυτολογιών έχουμε το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 3.1.6. ***(Μεταθεώρημα Αντιθετοαντιστροφής)*** $\Gamma, \phi \vdash \neg\psi \iff \Gamma, \psi \vdash \neg\phi$.

Απόδειξη. **(⇐)** $\Gamma, \phi \vdash \neg\psi$
$\Gamma \vdash \phi \to \neg\psi$ (θεώρημα απαγωγής)
$\Gamma \vdash \psi \to \neg\phi$ (θεώρημα ταυτολογιών)
$\Gamma, \psi \vdash \neg\phi$ (θεώρημα απαγωγής)

(⇒) Λόγω συμμετρίας ισχύει και το αντίστροφο.

□

Θεώρημα 3.1.7. ***(Απαγωγή σε Άτοπο)*** Γ, ϕ *ασυνεπές ανν* $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Απόδειξη. **(⇐)** Αφού Γ, ϕ ασυνεπές τότε υπάρχει β τέτοιο ώστε, $\Gamma, \phi \vdash \beta$ και $\Gamma, \phi \vdash \neg\beta$. Έφαρμόζοντας το θεώρημα απαγωγής έχουμε ότι από το Γ αποδεικνύονται τα $\phi \to \beta, \phi \to \neg\beta$ τα οποία (μέσω των πινάκων αληθείας) βλέπουμε ότι έχουν ως ταυτολογική συνέπεια το $\neg\phi$.

(⇒) Άμεσο αφού το Γ, ϕ αποδεικνύει τα $\phi, \neg\phi$.

□

Παρατήρηση.

- Για να αποδείξω κάτι της μορφής $\Gamma \vdash \psi \to \phi$ συνήθως πάω πρώτα να δείξω το $\Gamma, \psi \vdash \phi$.
- Για να αποδείξω κάτι της μορφής $\Gamma \vdash \neg(\psi \to \phi)$ αρκεί να δείξω ότι $\Gamma \vdash \psi$ ή $\Gamma \vdash \neg\phi$.
- Για το $\Gamma \vdash \neg\forall x\psi$ αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma \vdash \psi^x_t$, όπου t όρος αντικαταστάσιμος για την x.

Παράδειγμα. *Θα δείξουμε ότι* $\vdash \exists x\forall y\phi \to \forall y\exists x\phi$.
Αρκεί ν.δ.ο. $\exists x\forall y\phi \vdash \forall y\exists x\phi$.
Αρκεί ν.δ.ο. $\exists x\forall y\phi \vdash \exists x\phi$
Από θεώρημα αντιθετοαντιστροφής αρκεί ν.δ.ο. $\forall x\neg\phi \vdash \forall x\neg\forall y\phi$.
Αρκεί ν.δ.ο. $\forall x\neg\phi \vdash \neg\forall y\phi$.
Αρκεί ν.δ.ο. $\forall x\neg\phi, \forall y\phi$ *ασυνεπές. Εδώ βλέπουμε ότι,*

$$\forall x\neg\phi, \forall y\phi \vdash \neg\phi^x_x$$

και

$$\forall x\neg\phi, \forall y\phi \vdash \phi^y_y$$

Άρα $\forall x\neg\phi, \forall y\phi$ *ασυνεπές και έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη.*

Θεώρημα 3.1.8. ***(Γενίκευση Σταθερών)*** *Έστω* $\Gamma \vdash \phi$ *και* c *σταθερά που δεν εμφανίζεται στο* Γ. *Τότε υπάρχει μεταβλητή* y *τέτοια ώστε* $\Gamma \vdash \forall y\phi^c_y$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο ύψος της απόδειξης $\Gamma \vdash \phi$. □

Πόρισμα 2. *Αν* $\Gamma \vdash \phi_c^x$ *και c δεν εμφανίζεται ούτε στο* Γ *ούτε στο* ϕ*, τότε* $\Gamma \vdash \forall x \phi$.

Πόρισμα 3. *Αν* $\Gamma, \phi_c^x \vdash \psi$ *και c δεν εμφανίζεται ούτε στο* Γ*, ούτε στο* ϕ*, ούτε στο* ψ*, τότε* $\Gamma, \exists x \phi \vdash \psi$.

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και
επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας
στο σχετικό topic του μαθήματος.

Κεφάλαιο 4

Εγκυρότητα Κατηγορηματικού Λογισμού

Υπενθυμίζουμε ότι οι έγκυροι τύποι, επαληθεύονται για κάθε δομή και κάθε αποτίμηση. Θα αποδείξουμε ότι ένας προτασιακός τύπος είναι έγκυρος αν και μόνο αν αποδεικνύεται χωρίς μη λογικά αξιώματα. Δηλαδή $\emptyset \vdash \phi \Longleftrightarrow \emptyset \models \phi$. *Η απόδειξη θα γίνει μέσω ενός πιο γενικού θεωρήματος.*

Θεώρημα 4.0.9. $\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \Gamma \models \phi$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το 4.0.1 (Κάθε λογικό αξίωμα είναι έγκυρο), το οποίο θα αποδειχθεί στη συνέχεια. Με βάση αυτό λοιπόν θα προχωρήσουμε χρησιμοποιώντας επαγωγή στο μήκος της απόδειξης. Έστω $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n = \phi$ μία απόδειξη του ϕ από το Γ. Θα αποδειξουμε ότι $\Gamma \models \phi$ χρησιμοποιώντας επαγωγή.

Υποθέτουμε ότι $\forall (r < i) \Gamma \models \phi_r$. Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν το ϕ_i είναι λογικό αξίωμα τότε το ζητούμενο προκύπτει από το λήμμα.
2. Αν το $\phi_i \in \Gamma$ τότε το ϕ_i είναι λογική συνέπεια του Γ.
3. Το ϕ_i προκύπτει με MP από δύο προηγούμενα στοιχεία. Δηλαδή: $\exists j, k < i : \phi_j = \phi_k \rightarrow \phi_i$. Από την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $\Gamma \models \phi_j$ και $\Gamma \models \phi_k$. Δηλαδή για δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση s έχουμε $\mathfrak{A} \models \phi_k[s]$ και $\mathfrak{A} \models (\phi_k \rightarrow \phi_i)[s]$. Απο τον ορισμό της αλήθειας κατά Tarski προκύπτει $\mathfrak{A} \models \phi_i[s]$ και κατά συνέπεια $\Gamma \models \phi_i$.

□

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε το λήμμα:

Λήμμα 4.0.1. *Κάθε λογικό αξίωμα είναι έγκυρο*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει για τις διάφορες περιπτώσεις λογικών αξιωμάτων.

Πρόταση 4.0.3. *Οι ταυτολογίες και γενικεύσεις τους είναι έγκυροι τύποι (ΑΣ1)*

Ορισμός 4.0.23. Ορίζουμε ως πρωταρχικούς τύπους (prime formulas) είτε ατομικούς τύπους, είτε τύπους της μορφής $\forall x \phi$.

Παρατήρηση. Κάθε τύπος προκύπτει από πρωταρχικούς τύπους εφαρμόζοντας τους συνδέσμους $\{\neg, \rightarrow\}$. Ένας τύπος της Γ_1 λέγεται ταυτολογία, αν είναι ταυτολογία, όταν οι πρωταρχικοί του τύποι θεωρηθούν ως προτασιακές μεταβλητές. Για παράδειγμα, για οποιοδήποτε τύπο ϕ, $\forall x\phi \rightarrow \forall x\phi$ αφού η $A \rightarrow A$ είναι ταυτολογία. Κάτι τέτοιο, ισχύει ακόμα και σε περιπτωση που χρησιμοποιηθεί αντιλογία στην θέση του προτασιακού τύπου (για παράδειγμα: $\forall x\phi \wedge \neg\phi \rightarrow \forall x\phi \wedge \neg\phi$). Τέτοιες ταυτολογίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν κατά την απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο.

Θα αποδείξουμε ότι κάθε ταυτολογία μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας είναι έγκυρος τύπος (βλ. Ασκ. 3 Enderton, σελ. 129-130).

Έστω $\mathfrak{A}, s$.

Ορίζουμε αποτίμηση (προτασιακού λογισμού) v, ως $v(A) = true$ αν και μόνο αν $\mathfrak{A} \models A[s]$, όπου A πρωταρχικός τύπος. Για οποιοδήποτε τύπο ϕ, $\bar{v}(\phi) = true$ αν και μόνο αν $\mathfrak{A} \models \phi[s]$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον τρόπο που ο ϕ προκύπτει από πρωταρχικούς τύπους.

Επιπλέον, σε ό,τι αφορά την πρωτοβάθμια γλώσσα, αν το Γ συνεπάγεται ταυτολογικά τον ϕ τότε $\Gamma \models \phi$. Η απόδειξη είναι εύκολη. Κατά συνέπεια ισχύει και αν το $\emptyset$ συνεπάγεται ταυτολογικά τον ϕ τότε $\emptyset \models \phi$.

Πρόταση 4.0.4. *Το ΑΣ5 $x = x$ είναι έγκυρος τύπος*

Απόδειξη.

Έστω δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση s ώστε $\mathfrak{A} \models x = x[s] \iff s(x) = s(x)$ □

Πρόταση 4.0.5. *Το ΑΣ6 $(x = y) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi')$, όπου φ ατομικός τύπος και φ' προκύπτει αντικαθιστώντας κάποιες από τις εμφανίσεις του x με y, είναι έγκυρος τύπος*

Απόδειξη.

Πρέπει να δειχθεί ότι $\{x = y, \phi\} \models \phi'$.

Έστω ότι $\mathfrak{A} \models (x = y)[s]$ και $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ Πρέπει να δειχθεί ότι: $\mathfrak{A} \models \phi'[s]$.

Αφού ϕ, ϕ' είναι ατομικοί έχουν μορφή $\phi = P_{t_1 \ldots t_n}$ και $\phi' = P_{t'_1 \ldots t'_n}$

Αφού $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ ισχύει ότι $(s_{t_1}, ..., s_{t_n}) \in P^{\mathfrak{A}}$, δηλαδή αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε i, $s(t_i) = s(t'_i)$.

Αυτό αποδεικνύεται με επαγωγή στην δομή του όρου t_i. Για παράδειγμα: αν $t_i = x$ και $t'_i = y$ ισχύει $s(t_i) = s(t'_i)$ αφού $s(x) = s(y)$. □

Πρόταση 4.0.6. *Το ΑΣ3 $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\forall xa) \rightarrow (\forall xb))$ είναι έγκυρος τύπος*

Απόδειξη.

Αρκεί να δειχθεί ότι $\{\forall x(\alpha \rightarrow \beta), (\forall xa)\} \models (\forall x\beta)$

Θέλουμε ερμηνεία $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση s ώστε $\mathfrak{A} \models \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$ και $\mathfrak{A} \models (\forall xa)$

Αρκεί να δειχθεί ότι $\mathfrak{A} \models (\forall x\beta)$ δηλαδή $\forall d \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models \beta[s(x|d)])$

Έστω $d \in |\mathfrak{A}|$.

Από τις υποθέσεις και τον ορισμό αλήθειας του Tarski, $\mathfrak{A} \models (\alpha \rightarrow \beta)[s(x|d)]$ και $\mathfrak{A} \models \alpha[s(x|d)]$ οπότε συμπεραίνουμε το ζητούμενο. □

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

Πρόταση 4.0.7. *Το ΑΣ2 $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$ είναι έγκυρος τύπος, όταν η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον α δηλ. δεν δεσμεύεται καμία μεταβλητή από τον ποσοδείκτη*

Απόδειξη.

Παρατήρηση. Θα ακολουθήσουμε την αναλυτική προσέγγιση.

Αρκεί να δειχθεί ότι $\forall x\alpha \models \alpha_t^x$

Έστω $\mathfrak{A}, s$ έτσι ώστε $\mathfrak{A} \models \forall x\alpha[s]$. Τότε $\forall d \in |\mathfrak{A}| \models \alpha[s(x|d)]$

Πρέπει να δειχθεί ότι $\mathfrak{A} \models \alpha_t^x[s]$

Πρέπει να δειχθεί ότι $\mathfrak{A} \models \alpha[s(x|\bar{s}(t))]$. Αν αποδειχθεί τότε ισχύει η 4.0.7. □

Λήμμα 4.0.2. *$\mathfrak{A} \models \alpha_t^x[s]$ αν και μονο αν $\mathfrak{A} \models \alpha[s(x|\bar{s}(t))]$ με την προϋπόθεση ότι η x είναι αντικατάστασιμη από t στο α*

Απόδειξη.

Παρατήρηση. Θα αποδειχθεί με επαγωγή στην δομή του α

Περίπτωση 1 Αν ο α έχει μορφή $P_{t_1 \ldots t_n}$ και με την υπόθεση $\mathfrak{A} \models P_{t_1 \ldots t_n}[s]$ αρκεί να δειχθεί ότι $\mathfrak{A} \models P_{t_1 \ldots t_n}[s(x|\bar{s}(t)]$ και αντίστροφα. Γι' αυτο αρκεί να δειχθεί ότι $\bar{s}(t_{it}^{\,x}) = \overline{s(x|\bar{s}(t))}(t_i)$ το οποίο μπορεί να γίνει με επαγωγή στη δομή του t_i.

Περιπτώσεις $=, \neg, \rightarrow$ Ομοίως.

Περίπτωση $\forall y\beta$.

Έστω ότι $\mathfrak{A} \models (\forall y\beta)_t^x[s]$. Θα δείξουμε ότι $\mathfrak{A} \models (\forall y\beta)[s(x|\bar{s}(t))]$ και αντίστροφα. Αφού η x είναι αντικατάστασιμη από τον t στην $\forall y\beta$ συμπεραίνουμε ότι είτε η t δεν περιέχει το y, είτε δεν γίνεται καμία αντικατάσταση, καθώς η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην $\forall y\beta$.

Έστω ότι η t δεν περιέχει y

- Από την υπόθεση $\mathfrak{A} \models (\forall y\beta)_t^x[s]$.
- Άρα $\mathfrak{A} \models \beta_t^x[s(y|d)], \forall d \in |\mathfrak{A}|$.
- Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathfrak{A} \models (\forall y\beta)[s(x|\bar{s}(t))]$
- Δηλαδή $\mathfrak{A} \models \beta[s(x|\bar{s}(t))(y|d)], \forall d \in |\mathfrak{A}|$
- Από την επαγωγική υπόθεση και το 4.0.2, επειδή το y δεν εμφανίζεται στο t έχουμε:
- $\mathfrak{A} \models \beta[s(y|d)(x|\bar{s}(t))], d \in |\mathfrak{A}|$

Έστω ότι δεν γίνεται αντικατάσταση Εύκολο.

□
□

Κεφάλαιο 5

Πληρότητα Κατηγορηματικού Λογισμού

Θεώρημα 5.0.10. *Αν* $\Gamma \models \phi$ *τότε* $\Gamma \vdash \phi$ *ή ισοδύναμα αν* Γ *συνεπές τότε* Γ *ικανοποιήσιμο.*

Παρατήρηση. Το αντίστροφο, δηλ. αν Γ ικανοποιήσιμο, τότε Γ συνεπές ισχύει και αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο.

Παρατήρηση. Θα χρησιμοποιήσουμε από το συντακτικό τα

- Μεταθεωρήματα Απαγωγής, Απαγωγής Σε Άτοπο, Γενίκευσης, Ταυτολογικής Συνέπειας, Αντιθετοαντιστροφής
- Μεταθεώρημα Γενίκευσης Σταθερών. Αν $\Gamma \vdash \phi$ και c σταθερά που δεν εμφανίζεται στο Γ τότε $\Gamma \vdash \forall y \phi^c_y$ για κάποια μεταβλητή y και υπάρχει απόδειξη χωρίς το d.
- Πόρισμα Γενίκευσης Σταθερών. Αν $\Gamma \vdash \phi^x_c$ και c δεν εμφανίζεται ούτε στο Γ ούτε στο ϕ, τότε $\Gamma \vdash \forall x \phi^x_c$ (υπάρχει απόδειξη χωρίς σταθερά c.
- Αλφαβητικές Παραλλαγές. Αν σε ένα τύπο ϕ μία ή περισσότερες φορές αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή ενός ποσοδείκτη σε όλες τις εμφανίσεις της στο πεδιο αναφοράς του, με νέα μεταβλητή που δεν εμφανίζεται προκύπτει τύπος ϕ' που ονομάζεται αλφαβητική παραλλαγή. Τότε $\phi \vdash \phi'$ και $\phi' \vdash \phi$. Οι ϕ', ϕ, είναι λογικά ισοδύναμοι.

Παρατήρηση (Ιδέα Απόδειξης). Αρκεί να βρούμε δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση s, ώστε $\mathfrak{A} \models \Gamma[s]$ για όλα τα στοιχεία του $\mathfrak{A}$. Η μόνη πληροφορία που έχουμε είναι συντακτικής φύσεως, οπότε από αυτήν πρέπει να προσδιορίσουμε τα $\mathfrak{A}$, s. Ξεκινάμε από $|\mathfrak{A}| = \{t | t$ όρος της γλώσσας $\}$ και ορίζουμε:

- $s(x) = x$ αφού $s : V \to |\mathfrak{A}|$
- $c^{\mathfrak{A}} = c \in |\mathfrak{A}|$
- $f^{\mathfrak{A}}(t_1, t_2, ..., t_n) = f_{t_1, t_2, ..., t_n} \in |\mathfrak{A}|$
- $R^{\mathfrak{A}}(t_1, t_2, ..., t_n)$ αν και μόνο αν (εξ ορισμού) $\Gamma \vdash R_{t_1, t_2, ..., t_n}$ και $\neg R^{\mathfrak{A}}(t_1, t_2, ..., t_n)$ αν και μόνο αν $\Gamma \nvdash R_{t_1, t_2, ..., t_n}$
- Θα εμπλουτίσουμε το Γ, ώστε να παραμείνει συνεπές και επιπλέον για κάθε τύπο ϕ, $\Gamma \vdash \phi$ ή $\Gamma \vdash \neg\phi$

- Επιπλέον θα το εμπλουτίσουμε ώστε $\Gamma \vdash \neg\forall y\phi \rightarrow \neg\phi_c^y$ για μια νέα σταθερά.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι η πρωτοβάθμια γλώσσα είναι αριθμήσιμη, και κατά συνέπεια οι όροι, οι τύποι κτλ. είναι αριθμήσιμα σύνολα.

Προσθέτουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο νέων σταθερών $c_1, c_2, ...$, ώστε το Γ στην επαυξημένη γλώσσα να παραμένει συνεπές.

Πράγματι, αν Γ ασυνεπές στην επαυξημένη γλώσσα, τότε $\Gamma \vdash \phi \wedge \neg\phi$. Από το μεταθεώρημα γενίκευσης σταθερών και το ΑΣ2 μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις νέες σταθερές με νέες μεταβλητές. Τότε $\Gamma \vdash \phi' \wedge \neg\phi'$ όπου ϕ' έχει προκύψει από τον ϕ αντικαθιστώντας τις εμφανίσεις των σταθερών με μεταβλητές. Αφού η απόδειξη γίνεται στην αρχική γλώσσα το Γ είναι ασυνεπές σε αυτή (άτοπο).

Θα προσθέσουμε τύπους της μορφής $\neg\forall y\phi \rightarrow \neg\phi_c^y$.

Έστω $(\phi_1, x_1), (\phi_2, x_2), ...$ μια αρίθμηση των τύπων και των μεταβλητών ανά ζεύγη.

Θα προσθέσουμε τον τύπο $\neg\forall x_1\phi_1 \rightarrow \neg\phi_{c_i}^{x_1}$, όπου c_i η πρώτη από τις νέες σταθερες που δεν εμφανίζεται στο ϕ_1.

Ορίζεται έτσι το $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\neg\forall x_1\phi_1 \rightarrow \neg\phi_{c_i}^{x_1}\}$

Χρησιμοποιώντας ότι Γ συνεπές θα αποδειξουμε ότι Γ_1 συνεπές.

Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο Έστω Γ_1 ασυνεπές. Τότε $\Gamma \vdash \neg(\neg\forall x_1\phi_1 \rightarrow \neg\phi_{c_i}^{x_1})$ Άρα $\Gamma \vdash \neg\forall x_1\phi_1$ και $\Gamma \vdash \phi_{c_i}^{x_1}$. Από θεώρημα Γενίκευσης Σταθερών Γ ασυνεπές (άτοπο).

Ορίζουμε επιπλέον το $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\neg\forall x_2\phi \rightarrow \neg\phi_{c_j}^{x_2}\}$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι Γ_2 συνεπές κόκ.

Στην συνέχεια θα εμπλουτίσουμε επιπλέον το Γ ώστε για κάθε τύπο ϕ, $\phi \in \Gamma$ ή $\neg\phi \in \Gamma$ και το Γ να είναι συνεπές.

Δηλαδή αν $\phi_1, \phi_2, ...$ μια αρίθμηση των τύπων έχουμε:

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_1 = \begin{cases} \Gamma_0 \cup \{\phi_1\} \text{ αν } \Gamma_0 \cup \{\phi_1\} \text{ συνεπές} \\ \Gamma_0 \cup \{\neg\phi_1\} \text{ αν } \Gamma_0 \cup \{\neg\phi_1\} \text{ συνεπές} \end{cases}$
  Δεν γίνεται να ισχύουν και τα δύο, διότι τότε θα προέκυπτε Γ ασυνεπές.
- κόκ

Θα αποδείξουμε ότι για την $\mathfrak{A}, s$ που ορίσαμε αρχικά, θα ισχύει ότι $\mathfrak{A} \models \Gamma[s]$ με την απλουστευτική παραδοχή ότι δεν έχουμε σύμβολο ισότητας (σε διαφορετική περιπτωση θα ήταν δυνατόν t_1, t_2 διαφορετικοί με $\Gamma \vdash t_1 = t_2$, οπότε θα δουλεύαμε στο σύνολο πηλίκο με τους αποδείξιμα ίσους όρους).

Για να δείξουμε ότι $\mathfrak{A} \models \Gamma[s]$ και αντιστροφα, θεωρούμε τύπο $\phi \in \Gamma$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στη δομή του ϕ.

- Έστω ϕ ατομικός τύπος $R_{t_1...t_n}$ και έστω $R_{t_1...t_n} \in \Gamma$. Θέλουμε $(t_1, ..., t_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ που ισχύει από τον ορισμό του $R^{\mathfrak{A}}$.
- Αν $\neg\phi \in \Gamma$ θέλουμε να δείξουμε $\mathfrak{A} \models \neg\phi[s]$. Δηλαδή θέλουμε $\mathfrak{A} \not\models \phi[s]$. Αρκεί $\phi \notin \Gamma$ που ισχύει λόγω της συνέπειας του Γ.

- Ομοίως αποδεικνύουμε και τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

$\square$

Θεώρημα 5.0.11 (Συμπάγειας). *Το Σ είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του είναι ικανοποιήσιμο.*

Απόδειξη.

Η ενδιαφέρουσα κατεύθυνση είναι η αντίστροφη, δηλ.αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός συνόλου Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε και το Σ είναι ικανοποιήσιμο.

Αρκεί να δείξουμε ότι Σ συνεπές.

A**παγωγή σε άτοπο** Πράγματι, αν Σ ασυνεπές, τότε ένα πεπερασμένο υποσύνολο του θα ήταν ασυνεπές, αφού οι αποδείξεις είναι πεπερασμένες. Όμως τότε το πεπερασμένο υποσύνολο θα ήταν μη ικανοποιήσιμο (Θ. Ορθότητας-Πληρότητας) κάτι που ειναι άτοπο. $\square$

Ιδιότητες - Συνέπειες

- *Έστω $\Gamma_1^{\theta\alpha} = (+, \cdot, S, <, 0)$. Η προτιθέμενη ερμηνεία είναι η δομή των φυσικών αριθμών. Μπορει να υπάρχουν και άλλες.*
- *Οι δομές $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμες αν ικανοποιούν τις ίδιες προτάσεις.*
- *Η $\mathfrak{M}$ περιέχει μη συμβατικούς αριθμούς (μεγαλύτερους από 0,1,...)*
- *Θεωρώ τη γλώσσα της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ με μία νέα σταθερά c και τις προτάσεις $Th\mathfrak{N} \cup \{c > 0, c > s0, c > ss0, ...\}$*
- *Το σύνολο προτάσεων αυτό είναι ικανοποιήσιμο. Αυτο αποδεικνύεται επειδή κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του είναι ικανοποιήσιμο (αφού ειναι πεπερασμένο μπορώ να πάρω μεγαλύτερο αριθμό. Έτσι η $\mathfrak{M}$ με $c^{\mathfrak{M}} > 0^{\mathfrak{M}}, 1^{\mathfrak{M}}...$ παρόλο που ικανοποιείται περιέχει μη συμβατικό αριθμό.*
- *Ο αριθμός αυτός θα είναι άρτιος ή περιττός; Η πρόταση $(\forall x)$(x άρτιος ή x περιττός) επαληθεύεται και στην $\mathfrak{M}$. Άρα $c^{\mathfrak{M}}$ άρτιος ή $c^{\mathfrak{M}}$ περιττός.*

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

Παράρτημα I

Λύσεις επιλεγμένων ασκήσεων

Κεφάλαιο 2

Άσκηση I.0.1. *Να δειχτεί ότι δεν υπάρχουν τύποι μήκους 2,3,6 αλλά κάθε άλλο (θετικό ακέραιο) μήκος είναι δυνατό (άσκηση 2, σελίδα 39)*

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ *η μορφή της επαγωγής που ακολουθούμε είναι να δείξουμε ότι ισχύει το* $P(n)$ *δεδομένου ότι ισχύει το* $P(i) \forall i < n$.
Στην προκειμένη περίπτωση το $P(n)$ *είναι* $\forall n > 0, n \neq 2, 3, 6 (\exists \phi : \mid \phi \mid = n)$

- *Τύπος μήκους 1 υπάρχει και είναι μία προτασιακή μεταβλητή p.*
- *Τύπος μήκους 2 και 3 δεν υπάρχει γιατί θα έπρεπε να ανοίγει και να κλείνει με παρένθεση (2 σύμβολα) και δεν μπορεί να περιέχει μόνο μία προτασιακή μεταβλητή μέσα. Το ελάχιστο μεγαλύτερο του 1 είναι τύποι μήκους 4:* $(\neg p)$ *όπου p προτασιακή μεταβλητή.*
- *Τύπος μήκους 5 υπάρχει και είναι:* $(p \vee q)$ *όπου p και q προτασιακές μεταβλητές.*
- *Τύπος μήκους 6 δεν υπάρχει γιατί θα προέκυπτε:*
  1. *είτε από κάτι της μορφής* $(\neg \psi)$ *όπου* ψ *τύπος μήκους 2 (άτοπο)*
  2. *είτε από κάτι της μορφής* $(\psi_1 \vee \psi_2)$ *όπου* ψ_1 *και* ψ_2 *δύο τύποι που ο ένας έχει μήκους 1 και ο άλλος 2 (άτοπο)*
- *Τύποι μήκους 7 και 8 υπάρχουν και προκύπτουν από το* $(\neg \psi)$ *όπου* ψ *τύπος μήκους 4 και 5 αντίστοιχα (που έχουμε δείξει ότι υπάρχει)*
- *Τύπος μήκους 9 υπάρχει και προκύπτει ως* $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ *όπου* ψ_1 *τύπος μήκους 5 και* ψ_2 *τύπος μήκους 1*
- *Τύποι μήκους* $n > 9$ *υπάρχουν και προκύπτουν από* $(\neg \psi)$ *όπου* ψ *τύπος μήκους* $n - 3$ *(που υπάρχει για* $n > 9$*)*

'Αρα η $P(n)$ *απδείχθηκε.*

Άσκηση I.0.2. *Αν α τύπος, c ο αριθμός των θέσεων όπου εμφανίζεται διμελής σύνδεσμος και s ο αριθμός των θέσεων όπου εμφανίζονται προτασιακές μεταβλητές, να δειχτεί ότι $s = c + 1$ (άσκηση 7, σελίδα 19).*

Επαγωγική βάση: Αν ο τύπος είναι απλά μία προτασιακή μεταβλητή, τότε πράγματι η σχέση ισχύει καθώς $s = 1$ και $c = 0$ (ισχύει για τύπους μήκους 1) Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για όλους του τύπους μήκους μικρότερου του n. Επαγωγικό βήμα: Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τύπους μήκους n. Ένας τύπος ϕ μήκους $n > 1$ μπορεί να είναι κάτι από τα παρακάτω:

- *άρνηση ενός άλλου τύπου $(\neg\psi)$. Σε αυτή την περίπτωση, ισχύει $s_\psi = c_\psi + 1$ (από επαγωγική υπόθεση) και $s_\phi = s_{psi}, c_\phi = c_\psi$ καθώς έχουν τις ίδιες προτασιακές μεταβλητές και τους ίδιους διμελείς συνδέσμους. Άρα και $s_\phi = c_\phi + 1$*

- *δύο τύποι συνδεδεμένοι με ένα διμελή σύνδεσμο (ενδεικτικά εδώ το lor) $\phi = \psi_1 \vee \psi_2$. Από επαγωγική υπόθεση ισχύει: $s_{\psi_1} = c_{\psi_1} + 1$ και $s_{\psi_2} = c_{\psi_2} + 1$. Στον ϕ έχουμε $c_\phi = c_{\psi_1} + c_{\psi_2}$ και $s_\phi = s_{\psi_1} + s_{\psi_2}$. Άρα, $c_\phi = c_{\psi_1} + c_{\psi_2} = s_{\psi_1} + 1 + s_{\psi_2} + 1 = s_\phi + 1$*

Άρα το ζητούμενο αποδεικνύεται

Άσκηση I.0.3. *Στο σταυροδρόμι ανάμεσα στην αρετή και την αμαρτία, υπάρχει ένας άνθρωπος που λέει πάντα αλήθεια ή πάντα ψέματα. Τι ερώτηση πρέπει να του κάνουμε για να δούμε ποιος είναι ο δρόμος της αμαρτίας.*

Εδώ χρειαζόμαστε δύο προτασιακές μεταβλητές για να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα, τη ϕ που υποδηλώνει ότι ο άνθρωπος θα μας πει ότι ο αριστερά είναι ο δρόμος της αμαρτίας και την ψ που φανερώνει ότι ο άνθρωπος λέει την αλήθεια. Κάνουμε τον πίνακα αλήθειας για να βρούμε ποια ερώτηση μπορεί να μας οδηγήσει στο ότι αριστερά είναι ο δρόμος της αμαρτίας αν είναι Α και δεν είναι αν είναι Ψ.

$\bar{\phi}$	$\bar{\psi}$	$\bar{x}$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Επομένως, θα πάμε αριστερά, αν ισχύει $(\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)$ δηλαδή $x = (\phi \leftrightarrow \psi)$

Άσκηση I.0.4. *Να αποδειχτεί ότι το σύνολο $\{\neg, XOR\}$ ΔΕΝ είναι επαρκές.*

Ψάχνουμε για ένα ειδικό χαρακτηριστικό που έχουν οι τύποι που δεν ισχύει για τύπους που κατασκευάζονται μόνο με χρήση $\neg$ και XOR. Το χαρακτηριστικό αυτό δεν μπορεί να είναι συντακτικό καθώς έχουμε ήδη ένα μονομελή και ένα διμελή σύνδεσμο, οπότε δεν υπάρχει διάκριση με τους άλλους. Άρα, ψαχνουμε ένα χαρακτηριστικό των πινάκων αλήθειας. Αυτό το χαρακτηριστικό (όπως θα δούμε και στη συνέχεια) είναι ότι οι πίνακες αλήθειας κάθε τέτοιου τύπου δίνουν Α στις μισές γραμμές και Ψ στις άλλες μισές. Έστω τύπος ϕ με προτασιακές μεταβλητές να ανήκουν στο σύνολο $\{\rho_1, \cdots, \rho_n\}$. Κατασκευάζω ένα πίνακα αλήθειας 2^n γραμμών. Θα δείξουμε ότι, στο τέλος, Α έχουν οι 2^{n-1} γραμμές, με επαγωγή στη δομή των ϕ.

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και
επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας
στο σχετικό topic του μαθήματος.

Επαγωγική βάση: Έστω $\phi = \rho_i$ προτασιακή μεταβλητή. Τότε πράγματι το ζητούμενο ισχύει καθώς οι μισές γραμμες (όσες έχουν $rho_i =$ A) παίρνουν την τιμή A και οι υπόλοιπες Ψ.

Έστω ότι για τον τύπο ψ ισχύει το ζητούμενο. Τότε ισχύει και για τον τύπο $\phi = \neg\psi$, όσες τιμές ήταν A στον πίνακα αλήθειας του ψ γίνονται Ψ και αντίστροφα. Έστω ότι για τους τύπους ϕ_1 και ϕ_2 ισχύει το ζητούμενο. Τότε, οι μισές γραμμές του πίνακα αλήθειας της ϕ_1 είναι A και οι μισές γραμμές του πίνακα αλήθειας της ϕ_2 είναι A.

Enderton, σελίδα 19, άσκηση 4

Έστω κατασκευή που οδηγεί στον τύπο ϕ, όπου ο ϕ δεν περιέχει την μεταβλητή A_4. Να δειχθεί ότι αν από την κατασκευή αφαιρέσουμε όλους τους τύπους που περιέχουν την A_4, παίρνουμε πάλι μια νόμιμη κατασκευή του ϕ.

Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των προτάσεων της κατασκευής που περιέχουν την A_4. Έστω $\phi_1, \ldots, \phi_n = \phi$ η κατασκευή και έστω $\phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_k} \neq \phi$ οι τύποι της κατασκευής που περιέχουν την A_4 ($i_1 < \cdots < i_k$). Θα αφαιρέσω για χρήση επαγωγής μία από τις $\phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_k}$. Αφαιρώ την ϕ_{i_k} και προκύπτει νόμιμη κατασκευή. Η καινούρια κατασκευή περιέχει $k-1$ προτάσεις που περιέχουν την A_4. Με χρήση της επαγωγικής υπόθεσης, αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Enderton, σελίδα 19, άσκηση 5β)

Αν ϕ τύπος που δεν περιέχει το σύμβολο $\neg$. Να δειχθεί ότι τουλάχιστον $\frac{1}{4}$ των συμβόλων του είναι προτασιακές μεταβλητές.

Έστω $x_\phi =$ # συμβόλων του ϕ και $y_\phi =$ # προτασιακών μεταβλητών του ϕ. Θέλουμε να δείξουμε ότι $y_\phi \geq \frac{1}{4}x_\phi$. Εάν εφαρμόσουμε επαγωγή στην κατασκευή του ϕ, θα φτάσουμε στο συμπέρασμα ότι είναι χρήσιμο να μελετήσουμε την ποσότητα $x_\phi \pmod 4$. Θα δείξουμε ότι για κάθε τύπο ϕ ισχύει $x_\phi = 4\kappa + 1$ και $y_\phi = \kappa + 1$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.
Απόδειξη με επαγωγή στην κατασκευή του ϕ. Έστω ότι $\phi = A$, όπου A προτασιακή μεταβλητή. Σε αυτή την περίπτωση για $\kappa = 0$ ισχύει προφανώς το ζητούμενο. Έστω ότι $\phi = \chi \wedge \psi$, όπου χ, ψ τύποι για τους οποίους ισχύει $x_\chi = 4\kappa_\chi + 1$, $y_\chi = \kappa_\chi + 1$, $x_\psi = 4\kappa_\psi + 1$, $y_\psi = \kappa_\psi + 1$ Τότε $x_\phi = 4\left(\kappa_\chi + \kappa_\psi + 1\right) + 1$ και $y_\phi = \left(\kappa_\chi + \kappa_\psi + 1\right) + 1$, οπότε ισχύει το ζητούμενο.

Enderton, σελίδα 27, άσκηση 8

Έστω $\phi_1, \phi_2, \ldots$ τύποι. Για κάθε τύπο ψ, ορίζω τον ψ^* να είναι ο τύπος που προκύπτει αν αντικαταστήσω την προτασιακή μεταβλητή A_i από τον τύπο ϕ_i.

(i) νδο ψ^* τύπος.

(ii) έστω $v : \{A_1, \cdots, A_n\} \to \{A, \Psi\}$ αποτίμηση. Να δειχθεί ότι $\overline{v}\left(\psi^*\right) = \overline{u}\left(\psi\right)$, όπου $u\left(A_i\right) = \overline{v}\left(\phi_i\right)$.

(i) με επαγωγή στην κατασκευή του τύπου.

(ii) με επαγωγή.

Enderton, σελίδα 27, άσκηση 9

Να διατυπώσετε (στην προτασιακή λογική) την αρχή της δυικότητας, η οποία αναφέρεται στην εναλλαγή των συνδέσμων $\wedge, \vee$, και να την αποδείξετε.

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και
επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας
στο σχετικό topic του μαθήματος.

Διατύπωση:
Έστω τύπος ϕ. Ορίζω τον τύπο ϕ^*, αντικαθιστόντας τα $\wedge$ από το $\vee$, τα $\vee$ από το $\wedge$ και κάθε προτασιακή μεταβλητή A_i από το $\neg A_i$. Οι τύποι ϕ και $\neg\phi^*$ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.
Απόδειξη με πίνακες αληθείας (τύποι de Morgan).

Enderton, σελίδα 29, άσκηση 12
Έγινε ένα έγκλημα. Ο ένοχος είναι ένας από τους Αλέκο, Βασίλη, Γιώργο. Οι αθώοι είναι φιλαλήθεις. Οι δηλώσεις είναι οι εξής:

Α: Είμαι αθώος και ο Β ήξερε το θύμα και ο Γ μισούσε το θύμα.
Β: Είμαι αθώος και δεν ήξερα το θύμα και έλειπα εκτός πόλεως.
Γ: Είμαι αθώος και είδα τον Α και τον Β στην πλατεία την ημέρα του εγκλήματος και ένας από τους Α, Β είναι ένοχος.

Ορίζω τις προτασιακές μεταβλητές:
A_1*: Ο Β ήξερε το θύμα*
A_2*: Ο Γ μισούσε το θύμα*
A_3*: Ο Β ήταν εντός πόλεως*
A_4*: Ο Α ήταν εντός πόλεως*
Οι δηλώσεις που έγιναν μεταφράζονται ως εξής:

Α: $\phi_A = A_1 \wedge A_2$.
Β: $\phi_B = \neg A_1 \wedge \neg A_3$.
Γ: $\phi_\Gamma = A_3 \wedge A_4$.

και σύμφωνα με την εκφώνηση υπάρχει κάποια αποτίμηση, ώστε το πολύ μία από αυτές είναι ψευδής. Φτιάχνω τον πίνακα αληθείας:

A_1	A_2	A_3	A_4	$\phi_A = A_1 \wedge A_2$	$\phi_B = \neg A_1 \wedge \neg A_3$	$\phi_\Gamma = A_3 \wedge A_4$
T	T	T	T	T	F	T
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	T	F	F
T	F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	F	T	F

Η μόνη αποτίμηση, για την οποία το πολύ μία από τις $\phi_A, \phi_B, \phi_\Gamma$ είναι Ψευδής, είναι αυτή που περιγράφεται στην 1η γραμμή του πίνακα. Κατά συνέπεια, ο Β ψεύδεται και αφού οι αθώοι είναι όλοι φιλαλήθεις, είναι ένοχος.

Enderton, σελίδα 28, άσκηση 10

Δύο σύνολα συνδέσμων Σ_1 και Σ_2 λέγονται ισοδύναμα, αν έχουν τις ίδιες ταυτολογικές συνέπειες. (δηλαδή $\Sigma_1 \models a$ ανν $\Sigma_2 \models a$).
Ένα σύνολο συνδέσμων Σ λέγεται ανεξάρτητο, αν $\neg\left(\exists \phi \in \Sigma, \Sigma \setminus \{\phi\} \models \phi\right)$.

(i) *Να δειχθεί ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο συνδέσμων Σ έχει ένα ανεξάρτητο ισοδύναμο υποσύνολό του.*
(ii) *Ισχύει το ίδιο για άπειρα σύνολα?*
(iii) *Να δειχθεί ότι για κάθε σύνολο συνδέσμων Σ υπάρχει ένα ανεξάρτητο και ισοδύναμο με το Σ σύνολο συνδέσμων, έστω Σ^*.*

(i) *Απόδειξη με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων του Σ.*
(ii) *Όχι, έστω $\Sigma = \{A_1, A_1 \wedge A_2, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \ldots\}$. Ισχύει ότι τα μοναδικά ανεξάρτητα υποσύνολα του Σ είναι τα μονοσύνολα και το κενό σύνολο, κανένα εκ των οποίων δεν είναι ισοδύναμο με το ίδιο το Σ, άρα το (i) δεν ισχύει γενικά για άπειρα σύνολα.*
(iii) *Θα αποδείξω πρώτα ότι αν $(\Sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία ανεξάρτητων συνόλων συνδέσμων, τότε το σύνολο $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ είναι ανεξάρτητο (Απόδειξη με θεώρημα συμπάγειας).*

Στο εξής, αν Σ είναι σύνολο συνδέσμων, θα συμβολίζω με $\wedge\Sigma$ τον τύπο που είναι η σύζευξη όλων των στοιχείων του Σ.

Έστω $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ ένα σύνολο συνδέσμων. Θα ορίσω επαγωγικά μία αύξουσα ακολουθία ανεξάρτητων συνόλων συνδέσμων το καθένα από τα οποία θα είναι ισοδύναμο με ένα αρχικό κομμάτι του Σ. Συγκεκριμένα:

Έστω Σ_1 ανεξάρτητο και ισοδύναμο με το $\{\sigma_1\}$.

Έστω ότι έχω ορίσει τα $\Sigma_i, \ldots, \Sigma_i$, ώστε $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Sigma_i$ και Σ_i ανεξάρτητο και ισοδύναμο με το $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\kappa_i}\}$, όπου $\kappa_s < \kappa_{s+1}\ \forall s \in \{1, \ldots, i-1\}$.

Ορίζω το Σ_{i+1} ως εξής: Προσδιορίζω το ελάχιστο $j > \kappa_i$ ώστε $\Sigma_i \not\models \sigma_j$, και ορίζω $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i \cup \{\sigma_j \wedge (\neg(\wedge\Sigma_i))\}$.

Ισχύει ότι $\Sigma_{i+1} \supseteq \Sigma_i$ και Σ_{i+1} ανεξάρτητο και ισοδύναμο με το $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_j\}$. Σημείωση: εάν δεν υπάρχει τέτοιο j, τότε ισχύει Σ_i ισοδύναμο με το Σ.

Από την παρατήρηση, θα ισχύει ότι για $\Sigma^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ έπεται το ζητούμενο.

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{XOR, \neg\}$ είναι ανεπαρκές σύνολο συνδέσμων.

Αν αντικαταστήσουμε όλες τις προτασιακές μεταβλητές ενός τύπου, στον οποίο χρησιμοποιούνται μόνο οι σύνδεσμοι XOR και $\neg$, με την άρνησή τους, τότε στον πίνακα αληθείας είτε όλα μένουν ως έχουν, είτε όλα αλλάζουν από T σε F και αντίστροφα.

Enderton, σελίδα 65, άσκηση 1 (παραλλαγή - χωρίς ορθότητα/πληρότητα/συμπάγεια)
Έστω $\phi_1 \vee \cdots \phi_n$ ταυτολογία, για κάποιο $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και έστω ένα σύνολο προτασιακών τύπων Σ το οποίο είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο. Να δειχθεί ότι ένα από τα $\Sigma \cup \{\phi_1\}$,. . .,$\Sigma \cup \{\phi_n\}$ είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμο.

Έστω ότι και τα n δεν είναι πεπερασμένα ικανοποιήσιμα. Εξ' ορισμού, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ υπάρχει $\Sigma_i \subseteq \Sigma$, ώστε $\Sigma_i \cup \{\phi_i\}$ μη ικανοποιήσιμο. Το σύνολο $\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_n$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του Σ, άρα είναι ικανοποιήσιμο. Έστω v μια αποτίμηση που το ικανοποιεί. Επειδή $\phi_1 \vee \cdots \phi_n$ ταυτολογία, ισχύει $\overline{v}\left(\phi_1 \vee \cdots \phi_n\right) = T$, άρα υπάρχει i τέτοιο ώστε $\overline{v}\left(\phi_i\right) = T$. Άρα $\Sigma_i \cup \{\phi_i\}$ ικανοποιήσιμο. Ατοπο.

Enderton, σελίδα 65, άσκηση 2

Enderton, σελίδα 79, άσκηση 5
Έστω η πρωτοβάθμια γλώσσα με τις παραμέτρους:
$\forall$: for all things
P: is a Person
T: is a Time
Fxy: you can fool x at y
Να μεταφραστούν οι ακόλουθες φράσεις:

(i) You can fool some of the people all of the time
(ii) You can fool all of the people some of the time
(iii) You can't fool all of the people all of the time

(i) $\exists x \in P \forall y \in T Fxy$
(ii) $\exists y \in T \forall x \in P Fxy$
(iii) $\exists x \in P \exists y \in T \neg Fxy$

Enderton, σελίδα 100, άσκηση 12
Έστω η δομή $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ Να ορισθούν:

(i) το 0.
(ii) το $[0, +\infty)$.
(iii) το $\{2\}$.
(iv) το $\bigcup_{i=1}^{n} I_n$, όπου I_k διάστημα, τα άκρα του οποίου είναι αλγεβρικοί αριθμοί για κάθε k.

(i) $\phi_0\left(x\right): \quad \left(\forall y\right)\left(x + y = y\right)$

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

(ii) $\psi(x): \quad (\exists y)(x = y \cdot y)$

(iii) $\phi_1(x): \quad (\forall y)(x \cdot y = y)$

$\phi_2(x): \quad (\exists y)(\phi_1(y) \wedge x = y + y)$

Σημείωση: ενώ το σύνολο $\{\kappa\}$ ορίζεται στην δομή αυτή, για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, το ίδιο το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν ορίζεται. Επιπλέον ισχύει ότι το $Th\langle\mathbb{R}, +, \cdot\rangle$ είναι αναδρομικό (αποκρίσιμο, decidable), ενώ το $Th\langle\mathbb{N}, +, \cdot\rangle$ δεν είναι αποκρίσιμο.

(iv) *Αρκεί να ορίσουμε ένα οποιοδήποτε διάστημα με αλγεβρικά άκρα. Έστω ότι μπορώ να ορίσω τα διαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ μέσω των τύπων $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$, τότε ορίζω την ένωσή τους μέσω του τύπου $\phi_1(x) \vee \cdots \vee \phi_n(x)$.*

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα ορίσω ένα I κλειστό, έστω $I = [a, b]$, όπου a, b αλγεβρικοί αριθμοί. Εξ ορισμού τα a, b είναι ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές, έστω των $p_a \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ και $p_b \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$ αντιστοίχως. Οι διακεκριμένες ρίζες κάθε πολυωνύμου έχουν μια διάταξη. Τα a, b έχουν συγκεκριμένη σειρά ανάμεσα στις ρίζες του εκάστοτε πολυωνύμου. Έστω ότι βρίσκονται στις θέσεις i, j αντίστοιχα. Το a ορίζεται μέσω της:

$\phi_a(x): \ (\exists x_1, \ldots, x_{i-1})(x_i = x \ \wedge \ p_a(x_1) = \cdots = p_a(x_i) = 0 \ \wedge$

$x_1 < \cdots < x_i \ \wedge \ p(y) \neq 0 \forall y (x_s, x_{s+1}) \forall s \in \{1, \ldots, i-1\})$

ομοίως ορίζεται και το b, και στην συνέχεια ορίζεται το I ως $a \leq x \leq b$.

Έστω $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ερμηνείες της ίδιας γλώσσας. Θα γράφουμε $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, αν $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ και ο περιορισμός των συναρτήσεων και σχέσεων της $\mathfrak{B}$ στο $|\mathfrak{A}|$ δίνει τις αντίστοιχες σχέσεις και συναρτήσεις της $\mathfrak{A}$.

Enderton, σελίδα 102, άσκηση 18

Έστω $s : V \to |\mathfrak{A}|$ αποτίμηση στην $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ και ϕ τύπος της μορφής $\exists x_1 \cdots \exists x_n \psi$, όπου ψ χωρίς ποσοδείκτες. Να δειχθεί ότι αν $\mathfrak{A} \models \phi[s]$, τότε $\mathfrak{B} \models \phi[s]$.

Enderton, σελίδα 102, άσκηση 20 - Απόδειξη της υπόδειξης

Έστω $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, με $x_1 < \cdots < x_n$. Να δειχθεί ότι υπάρχει αυτομορφισμός $f : (\mathbb{R}, <) \to (\mathbb{R}, <)$ ώστε $f(x_i) = i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$f(x) = \begin{cases} x - x_1 + 1 & , \quad x < 1 \\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + i & , \quad x_i \leq x < x_{i+1} \ \forall i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ x - x_n + n & , \quad x_n \leq x \end{cases}$$

Enderton, σελίδα 146, άσκηση 6

Έστω Σ_1, Σ_2 σύνολα προτάσεων, όπου $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ μη ικανοποιήσιμο. Να δειχθεί ότι υπάρχει πρόταση τ, τέτοια ώστε $Mod\Sigma_1 \subseteq Mod\tau$ και $Mod\Sigma_2 \subseteq Mod\neg(\tau)$

Έστω $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma_1$ και $\tau_1, \ldots, \tau_k \in \Sigma_2$, ώστε $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau_1, \ldots, \tau_k\}$ μη ικανοποιήσιμο. Θέτω $\tau = \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n \wedge (\neg\tau_1 \vee \cdots \vee \neg\tau_k)$. Έστω $\mathfrak{A} \in Mod\Sigma_1$ τότε, προφανώς $\mathfrak{A} \models \tau$ και αντίστοιχα, αν $\mathfrak{B} \in Mod\Sigma_2$ τότε $\mathfrak{B} \models \neg\tau$.

Τελευταία ενημέρωση 12/5/2012, στις 06:52.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.