Σημειώσεις Λογικής Ι

Εαρινό Εξάμηνο 2011-2012

Καθηγητής: Λ. Κυρούσης

Τελευταία ενημέρωση 28/3/2012, στις 01:37.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και
επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας
στο σχετικό topic του μαθήματος.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η Μαθηματική Λογική με λίγα λόγια είναι η μαθηματική θεώρηση της μαθηματικής προσέγγισης. Στην Μαθηματική Λογική εξετάζουμε την μαθηματική γλώσσα, δηλαδή την γλώσσα που μέχρι τώρα χρησιμοποιούσαμε για να αποδεικνύουμε θεωρήματα, μέσα σε ένα εντελώς αυστηρό (μαθηματικό) πλαίσιο.

Η μαθηματική γλώσσα λοιπόν είναι το αντικείμενο του μαθήματος. Ο πρακτικός στόχος αυτού του μαθήματος είναι η καλύτερη κατανόηση της μαθηματικής προσέγγισης. Ο μη πρακτικός στόχος του (και ο σημαντικότερος) είναι να καταλάβουμε τι σημαίνει μαθηματική απόδειξη και μαθηματική αλήθεια, να εξετάσουμε αν αυτά τα δύο ταυτίζονται και τέλος να κατανοήσουμε τι σημαίνει αλγοριθμικότητα των μαθηματικών.

Στο μάθημα θα γίνεται χρήση δύο γλωσσών: της γλώσσας αντικείμενο, δηλαδή της γλώσσας υπό μελέτη, και της Μεταγλώσσας, δηλαδή της γλώσσας με την οποία θα μιλάμε εμείς για την γλώσσα αντικείμενο (π.χ Ελληνικά, Αγγλικά κλπ.). Η διάκριση πρέπει να είναι απολύτως σαφής για να μπορέσει κάποιος να παρακολουθήσει το μάθημα.

Σε αυτό το μάθημα πολύ συχνά θα συγχέουμε το όνομα του αντικειμένου με το ίδιο το αντικείμενο, π.χ. πολλές φορές θα λέμε ο τύπος ϕ, θα επικαλούμαστε δηλαδή το όνομα του τύπου, και θα εννοούμε την συντακτική μορφή του τύπου.

Τέλος, όπως έχουμε συνηθίσει στα μαθηματικά να χρησιμοποιούμε μεταβλητές x, y, z , οι οποίες μπορούν εν δυνάμει να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μέσα από ένα σύνολο, σε αυτό το μάθημα θα χρησιμοποιούμε συντακτικές μεταβλητές, δηλαδή μεταβλητές ϕ, ψ, χ που θα παίρνουν εν δυνάμει οποιαδήποτε μορφή μπορεί να πάρει ένας σωστός συντακτικά τύπος.

Κεφάλαιο 2

Προτασιακή Λογική

Ορισμός 2.0.1. Με Γ_0 συμβολίζουμε την γλώσσα του προτασιακού λογισμού η οποία θα περιέχει:

- Μία αριθμήσιμη ακολουθία από προτασιακές (λογικές) μεταβλητές $p_0, p_1, \ldots$.
- Τους λογικούς συνδέσμους $\neg$ (άρνηση), $\wedge$ (σύζευξη), $\vee$ (διάζευξη), $\rightarrow$ (συνεπαγωγή), $\leftrightarrow$ (διπλή συνεπαγωγή).
- Τις παρενθέσεις (,).

Παρατήρηση. Στον παραπάνω ορισμό χρησιμοποιήσαμε ορισμένα στοιχεία της μεταγλώσσας, συγκεκριμένα τα σύμβολα , και . . ..

2.1 Αναδρομικοί Ορισμοί - Επαγωγικές Αποδείξεις

Ορισμός 2.1.1. Έκφραση είναι μία πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα της Γ_0 (π.χ. $\neg p_0()$. Θα συμβολίζουμε με $E(\Gamma_0)$ το σύνολο των εκφράσεων.

Ορισμός 2.1.2. Μία έκφραση θα ονομάζεται προτασιακός τύπος αν και μόνον αν:

- είναι προτασιακή μεταβλητή,
- είναι της μορφής $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$ $(\phi \wedge \psi)$ $(\phi \rightarrow \psi)$ $(\phi \leftrightarrow \psi)$ όπου ϕ και ψ προτασιακοί τύποι[1].

Παρατήρηση. Για λόγους ευκολίας γραφής θα κάνουμε την ακόλουθη σύμβαση: το $\neg$ θα είναι ισχυρότερο όλων, τα $\wedge, \vee$ θα είναι ισχυρότερα από τα $\rightarrow, \leftrightarrow$,τα $\wedge, \vee$ θα είναι το ίδιο ισχυρά, και τέλος τα $\rightarrow, \leftrightarrow$ θα είναι το ίδιο ισχυρά. Δηλαδή π.χ. θα γράφουμε $\neg p_0 \wedge p_1 \rightarrow p_3 \wedge p_4$ αντί για $(((\neg p_0) \wedge p_1) \rightarrow (p_3 \vee p_4))$.

Ορισμός 2.1.3 (Επαγωγική απόδειξη)**.** Για να δείξουμε ότι μία ιδιότητα ισχύει για κάθε προτασιακό τύπο πρέπει να δείξουμε:

1. Βάση επαγωγής: Την αποδεικνύουμε για τις προτασιακές μεταβλητές
2. Δεχόμενοι ότι η ιδιότητα ισχύει για τους προτασιακούς τύπους ϕ, ψ, την αποδεικνύουμε για τους $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

[1] Ας σημειώσουμε ότι οι εκφράσεις ϕ και ψ του προηγούμενου ορισμού είναι συντακτικές μεταβλητές.

Πρόταση 2.1.1. *Κάθε τύπος έχει το ίδιο πλήθος αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.*

Απόδειξη. Εύκολη με επαγωγή στη δομή του τύπου. □

Πρόταση 2.1.2. *Κάθε γνήσιο μη κενό αρχικό τμήμα ενός τύπου έχει περισσότερες αριστερές από δεξιές παρενθέσεις.*

Απόδειξη. Εύκολη με επαγωγή στη δομή του τύπου, χρησιμοποιώντας και την πρόταση 2.1.1. □

Πρόταση 2.1.3. *Κάθε προτασικός τύπος εμπίπτει σε μία ακριβώς από τις περιπτώσεις του ορισμού 2.1.2.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι ένας τύπος ϕ εμπίπτει σε 2 περιπτώσεις του ορισμού 2.1.2. Για παράδειγμα έστω ότι $\phi \equiv (\psi_1 \wedge \psi_2)$ και $\phi \equiv (\psi_1' \vee \psi_2')$ για κάποιους τύπους $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_1',\ \psi_2'$. Τότε εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είτε ο ψ_1 είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του ψ_1' είτε το αντίστροφο. Αυτό όμως είναι άτοπο από την πρόταση 2.1.2. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται ανάλογα. □

Τελευταία ενημέρωση 28/3/2012, στις 01:37.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

2.2 Σημασιολογία της Γ_0

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε το συντακτικό της Γ_0, δηλαδή πως συντάσσονται οι προτασιακοί τύποι. Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε πως αποκτούν νόημα.

Ορισμός 2.2.1. Αποτίμηση (ή απονομή αληθείας) είναι μια συνάρτηση $a : M(\Gamma_0) \to \{\mathrm{A}, \Psi\}$ (ή $\{0,1\}$). Η αποτίμηση μπορεί να επεκταθεί σε μία συνάρτηση $\bar{a} : T(\Gamma_0) \to \{\mathrm{A}, \Psi\}$ αναδρομικά σύμφωνα με τους ακόλουθους πίνακες αληθείας:

$\bar{a}(\phi)$	$\bar{a}(\psi)$	$\bar{a}(\neg\phi)$	$\bar{a}(\phi \wedge \psi)$	$\bar{a}(\phi \vee \psi)$	$\bar{a}(\phi \to \psi)$	$\bar{a}(\phi \leftrightarrow \psi)$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

Παρατήρηση. Στα επόμενα (καταχρηστικά) θα χρησιμοποιούμε πολλές φορές τον συμβολισμό a αντί του $\bar{a}$ για λόγους ευκολίας γραφής. Ωστόσο πρέπει να είναι σαφές ότι στην πραγματικότητα αυτό είναι μία σύμβαση, αφού η συνάρτηση $\bar{a}$ είναι επέκταση της a.

Ορισμός 2.2.2. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$. Θα λέμε ότι:

1. ο προτασιακός τύπος ϕ είναι ικανοποιήσιμος αν υπάρχει τουλάχιστον μία αποτίμηση a με $\bar{a}(\phi) = \mathrm{A}$. Σε αυτήν την περίπτωση θα λέμε επίσης ότι η a ικανοποιεί τον ϕ.
2. η αποτίμηση a ικανοποιεί το T, αν και μόνον αν η a ικανοποιεί κάθε στοιχείο του T.
3. το T είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν υπάρχει μία αποτίμηση που το ικανοποιεί[2]
4. ο ϕ είναι ταυτολογία αν και μόνον αν κάθε αποτίμηση ικανοποιεί τον ϕ.
5. ο ϕ είναι αντίφαση αν και μόνον αν ο $\neg\phi$ είναι ταυτολογία.
6. το T συνεπάγεται ταυτολογικά το ϕ, και θα γράφουμε $T \models \phi$ αν και μόνον αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και το ϕ.

Παρατήρηση. Στον παραπάνω ορισμό, αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του $\bar{a}(\phi)$ εξαρτάται μόνον από τιμή που δίνει η a στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον ϕ.

Παρατήρηση. Εύκολα συμπεραίνουμε ότι $\emptyset \models \phi$ αν και μόνο αν ο ϕ είναι ταυτολογία[3].

Θεώρημα 2.2.1. *$T \models \phi \Leftrightarrow T \cup \{\neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο*

Απόδειξη. **($\Rightarrow$)** Υποθέτουμε ότι το $T \cup \{\neg\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Άρα υπάρχει αποτίμηση a που ικανοποιεί όλους τους τύπους του $T \cup \{\neg\phi\}$. Άρα υπάρχει a που δίνει την τιμή Α σε όλα τα στοιχεία του T και την τιμή Ψ στο ϕ. Άτοπο.[4]

[2] Γιατί είναι λάθος να πούμε ότι το σύνολο T είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του T είναι ικανοποιήσιμο;

[3] Θεωρούμε ότι όλες οι αποτιμήσεις ικανοποιούν το κενό σύνολο.

[4] Στην παραπάνω απόδειξη, χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο της είς άτοπον απαγωγής για να αποδείξουμε την είς άτοπον απαγωγή. Κάτι τέτοιο μπορούμε να το κάνουμε, γιατί χρησιμοποιήσαμε την είς άτοπον απαγωγή στη μεταγλώσσα.

Τελευταία ενημέρωση 28/3/2012, στις 01:37.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

(⇐) Υποθέτουμε ότι το $T \cup \{\neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο και θα δείξουμε ότι $T \models \phi$. Έστω a αποτίμηση που ικανοποιεί τα στοιχεία του T. Αφού το $T \cup \{\neg\phi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο αναγκαστικά η a θα δώσει τιμή Ψ στο $\neg\phi$, και συνεπώς τιμή Αστο ϕ, άρα η a θα ικανοποιεί και το ϕ.

□

Παρατήρηση. Έστω T μη ικανοποιήσιμο και ϕ τυχών προτασιακός τύπος. Τότε $T \models \phi$, αφού η μη ικανοποιησιμότητα του T μας λέει ότι δεν υπάρχει αποτίμηση που να ικανοποιεί όλους τους προτασιακούς τύπους του T.

Θεώρημα 2.2.2. *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ταυτολογίες:*

$$
\begin{aligned}
\phi \land \psi &\leftrightarrow \psi \land \phi && \textit{(Αντιμεταθετικότητα)}\\
\phi \lor \psi &\leftrightarrow \psi \lor \phi &&\\
\phi \land (\psi \land \chi) &\leftrightarrow (\phi \land \psi) \land \chi && \textit{(Προσεταιριστικότητα)}\\
\phi \lor (\psi \lor \chi) &\leftrightarrow (\phi \lor \psi) \lor \chi &&\\
\phi \land (\psi \lor \chi) &\leftrightarrow (\phi \land \psi) \lor (\phi \land \chi) && \textit{(Επιμεριστικότητα)}\\
\phi \lor (\psi \land \chi) &\leftrightarrow (\phi \lor \psi) \land (\phi \lor \chi) &&\\
\neg\neg\phi &\leftrightarrow \phi && \textit{(Διπλή άρνηση)}\\
\neg(\phi \to \psi) &\leftrightarrow \phi \land \neg\psi && \textit{(Άρνηση συνεπαγωγής)}\\
\neg(\phi \land \psi) &\leftrightarrow \neg\phi \lor \neg\psi && \textit{(Νόμοι De Morgan)}\\
\neg(\phi \lor \psi) &\leftrightarrow \neg\phi \land \neg\psi &&\\
\phi &\lor \neg\phi && \textit{(Νόμος απόκλεισης του τρίτου)}\\
(\phi \to \psi) &\leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\phi) && \textit{(Νόμος αντιθετοαναστροφής)}\\
(\phi \to \psi) &\leftrightarrow \neg\phi \lor \psi && \textit{(Νόμοι αντικατάστασης)}\\
(\phi \leftrightarrow \psi) &\leftrightarrow (\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi) &&\\
(\phi \lor \psi) &\leftrightarrow \neg(\neg\phi \land \neg\psi) &&\\
(\phi \land \psi) &\leftrightarrow \neg(\neg\phi \lor \neg\psi) &&
\end{aligned}
$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Παρατήρηση. Λέμε ότι οι ϕ, ψ είναι λογικά ισοδύναμοι όταν ο τύπος $\phi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε και $\phi \equiv \psi$.

2.3 Επάρκεια (Πληρότητα) προτασιακών συνδέσμων

Ορισμός 2.3.1. Ένα σύνολο προτασιακών συνδέσμων C θα λέγεται επαρκές (ή πλήρες), αν κάθε προτασιακός τύπος είναι ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο, στον οποίο εμφανίζονται σύνδεσμοι μόνον από το C

Θεώρημα 2.3.1. *Το σύνολο $\{\neg, \land, \lor\}$ είναι επαρκές.*

*Τελευταία ενημέρωση 28/3/2012, στις 01:37.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και
επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας
στο σχετικό topic του μαθήματος.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή: Για τις προτασιακές μεταβλητές το θεώρημα ισχύει (αφού οι προτασιακές μεταβλητές δεν έχουν συνδέσμους). Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για τους προτασιακούς τύπους ϕ και ψ. Έστω ϕ', ψ' δύο προτασιακοί τύποι με συνδέσμους από το υπό εξέταση σύνολο, ώστε $\phi \equiv \phi'$ και $\psi \equiv \psi'$. Τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \neg\phi &\equiv \neg\phi' \\ \phi \wedge \psi &\equiv \phi' \wedge \psi' \\ \phi \vee \psi &\equiv \phi' \vee \psi' \\ \phi \rightarrow \psi &\equiv \neg\phi' \vee \psi' \\ \phi \leftrightarrow \psi &\equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi) \end{aligned}$$

□

2.3.1 Μονομελή επαρκή σύνολα συνδέσμων

Στα όσα έχουμε δει μέχρι τώρα, έχουμε συναντήσει μόνο έναν μονοθέσιο προτασιακό σύνδεσμο, το $\neg$[5]. Αποδεικνύεται πως κανένα σύνολο συνδέσμων που αποτελείται μόνο από έναν μονοθέσιο σύνδεσμο δεν είναι επαρκές.

Θα παρουσιάζουμε δύο ακόμη διθέσιους συνδέσμους και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε ένας από αυτούς αποτελεί και επαρκές σύνολο προτασιακών συνδέσμων. Οι δύο σύνδεσμοι που μας απασχολούν είναι ο $NAND$ ($|$ ή $\uparrow$) και ο NOR ($\downarrow$), των οποίων τους πίνακες αληθείας παρουσιάζουμε παρακάτω:

$\bar{a}(\phi)$	$\bar{a}(\psi)$	$\bar{a}(\phi\|\psi)$	$\bar{a}(\phi \downarrow \psi)$
Α	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α

Θεώρημα 2.3.2. *Τα σύνολα προτασιακών συνδέσμων* $\{|\}$ *και* $\{\downarrow\}$ *είναι επαρκή*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα (άσκηση) ότι το σύνολο $\{\neg, \vee\}$ είναι επαρκές. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τους δύο αυτούς προτασιακούς συνδέσμους μόνο με τον $|$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \neg\phi &\equiv \phi|\phi \\ \phi \vee \psi &\equiv (\phi|\psi)|(\phi|\psi) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα δουλεύουμε και για τον $\downarrow$. □

[5] Υπάρχουν άλλοι μονοθέσιοι προτασιακοί σύνδεσμοι; Και αν ναι, τότε ποιοι είναι οι πίνακες αληθείας τους; Υπάρχουν μηδενοθέσιοι προτασιακοί σύνδεσμοι; Και αν ναι, τότε ποιοι είναι;

Τελευταία ενημέρωση 28/3/2012, στις 01:37.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

2.3.2 Μη επαρκή σύνολα συνδέσμων

Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο προτασιακών συνδέσμων δεν είναι επαρκές, αρκεί να βρούμε μία ιδιότητα που έχουν οι προτασιακοί τύποι που χρησιμοποιούν στοιχεία μόνον από αυτό το σύνολο, την οποία δεν έχουν όλοι οι προτασιακοί τύποι. Παραδείγματα θα δούμε ευθύς αμέσως.

Πρόταση 2.3.1. *Το* $\{\wedge\}$ *δεν είναι επαρκές.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ένας προτασιακός τύπος ϕ που περιέχει μόνο τον σύνδεσμο $\wedge$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$P = \textit{Για κάθε αποτίμηση } a \textit{ που δίνει στις μεταβλητή του } \phi \textit{ τιμή } \mathrm{A} \textit{ ισχύει ότι } \bar{a}(\phi) = \mathrm{A}.$$

Θα αποδείξουμε με επαγωγή τον παραπάνω ισχυρισμό. Για την βάση της επαγωγής, θεωρούμε ότι ο ϕ είναι μία προτασιακή μεταβλητή[6], και επομένως προφανώς ο ϕ έχει την P.

Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε ότι ο ϕ έχει την μορφή $\psi \wedge \chi$ όπου για τους ψ, χ ισχύει P. Αφού από την επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι $\bar{a}(\psi) = \mathrm{A}$ και $\bar{a}(\chi) = \mathrm{A}$, από τον πίνακα αληθείας του $\wedge$ προκύπτει ότι $\bar{a}(\phi) = \mathrm{A}$.

Παρατηρούμε ότι ο $\neg p$ δεν έχει την P, άρα το $\{\wedge\}$ δεν είναι επαρκές. □

Πρόταση 2.3.2. *Το* $\{\neg, \oplus\}$ *δεν είναι επαρκές*

Απόδειξη. Άσκηση.

Ορισμός 2.3.2. Ορίζουμε τον τριθέσιο προτασιακό σύνδεσμο $\pi(\phi, \psi, \chi)$ που ορίζεται ως η πλειοψηφία των τιμών των ϕ, ψ, χ [7].

2.4 Το Θεώρημα της Συμπάγειας

Ορισμός 2.4.1. Ένα σύνολο τύπων Σ λέγεται πεπερασμένα ικανοποιήσιμο (π.ι.) αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο.

Θεώρημα 2.4.1 (Συμπάγειας)**.** *Έστω σύνολο τύπων* Σ*. Το* Σ *είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνον αν είναι π.ι.*

Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο όλα τα πεπερασμένα υποσύνολά του είναι ικανοποιήσιμα (προφανώς). Άρα η μία κατεύθυνση προκύπτει εύκολα.

Για να δείξουμε την άλλη κατεύθυνση βλέπουμε ότι πρέπει να ορίσουμε μία αποτίμηση, η οποία θα κάνει αληθείς όλους τους τύπους που είναι στο Σ. Ένας τέτοιος ορισμός μοιάζει δύσκολος εκ πρώτης όψεως. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να ορίσουμε την αποτίμηση να κάνει αληθείς τις μεταβλητές που εμφανίζονται στο Σ χωρίς άρνηση και ψευδείς τις μεταβλητές που εμφανίζονται στο Σ με άρνηση. Τι κάνουμε όμως αν μια μεταβλητή δεν εμφανίζεται καθόλου στο Σ; Μετά από άλλες παρόμοιες σκέψεις οδηγούμαστε στο ότι πρέπει να επεκτείνουμε το σύνολο Σ.

[6] Μηδέν εμφανίσεις του $\wedge$.

[7] Ποιος είναι ο πίνακας αληθείας του π;

Τελευταία ενημέρωση 28/3/2012, στις 01:37.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

Έστω $\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots$ μία απαρίθμηση των τύπων (το $E(\Gamma_0)$ είναι αριθμήσιμο, ως ένωση αριθμήσιμων συνόλων, άρα και το σύνολο των τύπων είναι αριθμήσιμο, βλ. και θεώρημα 3.2.1). Ορίζουμε την παρακάτω ακολουθία συνόλων:

$$\Delta_0 = \Sigma$$
$$\Delta_{i+1} = \begin{cases} \Delta_i \cup \{\phi_{i+1}\} & \text{αν } \Delta_i \cup \{\phi_{i+1}\} \text{ π.ι.} \\ \Delta_i \cup \{\neg\phi_{i+1}\} & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad i \geq 0$$

Λήμμα 2.4.1. *Για κάθε i το σύνολο Δ_i είναι π.ι.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο i.

ΒΑΣΗ Για $i = 0$ το $\Delta_0 = \Sigma$ είναι π.ι.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ Υποθέτουμε ότι το Δ_i είναι π.ι.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ Θα δείξουμε ότι το $\Delta i + 1$ είναι π.ι. Θέτουμε $A_i = \Delta_i \cup \{\phi_{i+1}\}, B_i = \Delta_i \cup \{\neg\phi_{i+1}\}$. Έστω ότι και το A_i και το B_i δεν είναι π.ι. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα υποσύνολα του Δ_i έστω Δ_i', Δ_i'' τέτοια ώστε τα σύνολα $A_i' = \Delta_i' \cup \{\phi_{i+1}\}, B_i' = \Delta_i'' \cup \{\neg\phi_{i+1}\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμα. Επειδή όμως το Δ_i είναι π.ι. θα υπάρχει μία απονομή αλήθειας, έστω α, η οποία ικανοποιεί κάθε τύπο του $\Delta_i' \cup \Delta_i''$. Η α φυσικά δεν μπορεί να ικανοποιεί τα A_i', B_i' οπότε θα πρέπει $\alpha(\phi_{i+1}) = \alpha(\neg\phi_{i+1}) = \Psi$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως τουλάχιστον ένα από τα A_i, B_i είναι π.ι., άρα από τον ορισμό του Δ_{i+1} και αυτό είναι π.ι. $\square$

Από το λήμμα 2.4.1 έχουμε ότι το σύνολο $\Delta = \bigcup_{i=0}^{\infty}$ είναι π.ι και ακόμα (από τον ορισμό των Δ_i) ότι για κάθε τύπο ϕ , $\phi \in \Delta \vee \neg\phi \in \Delta$.

Έστω προτασιακή μεταβλητή A. Ορίζουμε την απονομή αλήθειας α ως εξής:

$$a(A) = \begin{cases} \text{A} & A \in \Delta \\ \Psi & A \notin \Delta \end{cases} \quad i \geq 0$$

Λήμμα 2.4.2. *Για κάθε τύπο ϕ $\quad \alpha(\phi) = \text{A} \Leftrightarrow \phi \in \Delta$*

Απόδειξη. Δείχνουμε την ισοδυναμία με επαγωγή στη δομή των τύπων:

ΒΑΣΗ - $\phi = A$ (προτασιακή μεταβλητή) Προφανές από τον ορισμό της α

ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη ισοδυναμία ισχύει για τύπους ϕ_1, ϕ_2

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ Θα δείξουμε το ζητούμε αν $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες και αφήνονται ως άσκηση.

($\Rightarrow$) $\alpha(\phi_1 \wedge \phi_2) = \text{A} \Rightarrow \alpha(\phi_1) = \alpha(\phi_2) = \text{A}$. Από ε.υ. έχουμε ότι $\phi_1, \phi_2 \in \Delta$. Αν $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2) \in \Delta$ τότε υπάρχει ένα υποσύνολο του Δ το $\{\phi_1,\ \phi_2,\ \neg(\phi_1 \wedge \phi_2)\}$ το οποίο δεν είναι ικανοποιήσιμο. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί από το λήμμα 2.4.1 δείξαμε ότι το Δ είναι π.ι. Οπότε $(\phi_1 \wedge \phi_2) \in \Delta$.

($\Leftarrow$) $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Delta$. Έστω ότι $\alpha(\phi_1 \wedge \phi_2) = \Psi$. Τότε $\alpha(\phi_1) = \Psi \vee \alpha(\phi_2) = \Psi$. Από ε.υ. όμως θα ισχύει ότι $\phi_1 \notin \Delta \vee \phi_2 \notin \Delta$. Αν $\phi_1 \notin \Delta$ τότε θα ισχύει ότι $\neg\phi_1 \in \Delta$. Όμως το σύνολο $\{\neg\phi_1, \phi_1 \wedge \phi_2\} \subseteq \Delta$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, το οποίο είναι άτοπο. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $\phi_2 \notin \Delta$. Οπότε σε κάθε περίπτωση $\alpha(\phi_1 \wedge \phi_2) = \text{A}$. $\square$

Το λήμμα 2.4.2 μας λέει ότι η α ικανοποιεί το Δ. Από την κατασκευή του Δ όμως ισχύει ότι $\Sigma \subseteq \Delta$. Οπότε το Σ είναι ικανοποιήσιμο. Έτσι ολοκληρώσαμε την απόδειξη του θεωρήματος 2.4.1.

Λήμμα 2.4.3. $\Sigma \models \phi \Leftrightarrow \exists \Sigma' \subseteq \Sigma, |\Sigma'| < \infty$ *τέτοιο ώστε* $\Sigma' \models \phi$

Απόδειξη. Αν το Σ δεν είναι ικανοποιήσιμο, η ισοδυναμία ισχύει τεριμμένα, οπότε στην παρακάτω απόδειξη υποθέτουμε ότι Σ ικανοποιήσιμο.

($\Rightarrow$) Από το 2.2.1 έχουμε ότι $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ όχι ικανοποιήσιμο. Οπότε από το θεώρημα της συμπάγειας, υπάρχει $\Sigma' \subseteq \Sigma \cup, |\Sigma'| < \infty$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\Sigma' \cup \phi$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Όμως πάλι από το λήμμα 2.2.1 έχουμε ότι $\Sigma' \models \phi$.

($\Leftarrow$) Κάθε απονομή αλήθειας που ικανοποιεί όλα τα στοιχεία του Σ ικανοποιεί και όλα τα στοιχεία του Σ' άρα και το ϕ. □

Κεφάλαιο 3

Κατηγορηματική Λογική

3.1 Συντακτικό και σημασιολογία

Ορισμός 3.1.1. Μία πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1 αποτελείται από

- Μία άπειρη ακολουθία μεταβλητών: $v_0, v_1, \ldots$
- Τους λογικούς συνδέσμους: $\neg, \rightarrow$
- Τις παρενθέσεις: $($, $)$
- Το σύμβολο της ισότητας: $\approx$
- Τον καθολικό ποσοδείκτη: $\forall$
- Για κάθε φυσικό $n \geq 0$ ένα σύνολο (ενδεχομένως κενό) από n-μελή κατηγορηματικά σύμβολα (ή σύμβολα ιδιοτήτων): P_{n_i}
- Για κάθε φυσικό $n \geq 0$ ένα σύνολο (ενδεχομένως κενό) από n-θέσια συναρτησιακά σύμβολα: f_{n_i}
- Ένα σύνολο (ενδεχομένως κενό) από σύμβολα σταθερών: c_k

Παρατήρηση. Οι λογικοί σύνδεσμοι $\vee, \wedge, \leftrightarrow$ καθώς και ο υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$ θα εισαχθούν αργότερα ως συντομεύσεις των $\neg, \rightarrow$ και $\forall$. Επίσης πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε καταχρηστικά το κλασικό σύμβολο της ισότητας $=$ αντί του $\approx$ χάριν απλότητας.

Παρατήρηση. Συνήθως μία πρωτοβάθμια γλώσσα έχει πεπερασμένο πλήθος κατηγορηματικών και συναρτησιακών συμβόλων, και πεπερασμένο πλήθος σταθερών.

Ορισμός 3.1.2. Έκφραση είναι μία πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα της Γ_1. Θα συμβολίζουμε με $E(\Gamma_1)$ το σύνολο των εκφράσεων.

Ορισμός 3.1.3. Μία έκφραση θα ονομάζεται όρος της Γ_1 αν και μόνον αν:

- είναι προτασιακή μεταβλητή,
- είναι σταθερά,

- είναι της μορφής $ft_1 \ldots t_n$, όπου $t_1, \ldots, t_n$ όροι και f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο της Γ_1.

Το σύνολο των όρων της Γ_1 το συμβολίζουμε με $O(\Gamma_1)$.

Παρατήρηση. Θα γράφουμε τον όρο $ft_1 \ldots t_n$ και ως $f(t_1, \ldots, t_n)$ για να μας θυμίζει το συνήθη τρόπο γραφής των συναρτήσεων.

Δείχνουμε το ανάλογο της πρότασης 2.1.2.

Πρόταση 3.1.1. *Κάθε γνήσιο, μη κενό πρόθεμα ενός όρου δεν είναι όρος.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στη δομή των όρων.

Δείχνουμε το ανάλογο της πρότασης 2.1.3.

Πρόταση 3.1.2. *Κάθε έκφραση που είναι όρος εμπίπτει σε ακριβώς μία περίπτωση του ορισμού 3.1.3.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.1.1.

Παρατήρηση. Με συντακτική ανάλυση και χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα 3.1.1, 3.1.2 μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει για κάθε συμβολοσειρά αν είναι όρος ή όχι .

3.2 Λίγα στοιχεία από τη Θεωρία Αναδρομής

3.2.1 Αναδρομικά και αναδρομικά απαριθμητά σύνολα

Θα δώσουμε μερικά στοιχεία από Θεωρία Αναδρομής. Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο σύνολο Σ το οποίο θα ονομάζουμε αλφάβητο. Ορίζουμε $\Sigma^i = \{$ ακολουθία συμβόλων του Σ με μήκος $i\}$. Ορίζουμε $\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$ (άστρο του Kleene για το σύνολο Σ). Δίνουμε το παρακάτω λήμμα χωρίς απόδειξη.

Λήμμα 3.2.1. *Αν το Σ είναι αριθμήσιμο τότε το Σ^* είναι αριθμήσιμο.*

Έστω αλγόριθμος A και $x \in \Sigma^*$. Με $A(x)$ συμβολίζουμε τον υπολογισμό του A με είσοδο το x. Αν γράφουμε $A(x) = y$ εννοούμε ότι ο A με είσοδο x τερματίζει και δίνει έξοδο y.

Ορισμός 3.2.1.

1. Ένα σύνολο $L \subseteq \Sigma*$ λέγεται γλώσσα.

2. Για κάθε γλώσσα L ορίζουμε το συμπλήρωμα της L ως εξής: $L^c = \Sigma^* \setminus L$

3. Μία γλώσσα L καλείται ανδρομική [1] αν υπάρχει αλγόριθμος A, ο οποίος για κάθε $x \in \Sigma*$ τερματίζει και:

$$x \in L \Leftrightarrow A(x) = yes$$
$$x \notin L \Leftrightarrow A(x) = no$$

   Λέμε ακόμα ότι ο A αποφασίζει την L.

4. Μια γλώσσα L καλείται αναδρομικά αριθμήσιμη(α.α)[2] αν υπάρχει αλγόριθμος A που αριθμεί τα στοιχεία της. Δηλαδή ο A τυπώνει στην έξοδό του όλα τα στοιχεία της L χωρίς απαραίτητα καθορισμένη σειρά και με πιθανές επαναλήψεις.

5. Μια γλώσσα L καλείται ημιανδρομική αν υπάρχει αλοριθμος A τέτοιος ώστε[3]

$$x \in L \Leftrightarrow A(x) = yes$$

Θεώρημα 3.2.1. *Για κάθε γλώσσα L : L αναδρομική $\Leftrightarrow$ L^c αναδρομική.*

Απόδειξη. Προφανής, αρκεί να αντιστρέψουμε το yes με το no στον αλγόριθμο που αποφασίζει την L (ή την L^c αντίστοιχα). □

Θεώρημα 3.2.2. *Για κάθε γλώσσα L : L ημιαναδρομική $\Leftrightarrow$ L α.α.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Όπως είπαμε το Σ^* είναι αριθμήσιμο. Οπότε έστω w_1, w_2, ... μία αρίθμηση των στοιχείων του. Αφού η L είναι ημιανδρομική υπάρχει αλγόριθμος A' τέτοιος ώστε για κάθε $i \geq 1$:

$$w_i \in L \Leftrightarrow A'(w_i) = yes \tag{3.1}$$

[1] άλλες ονομασίες είναι αποκρίσιμη, αλγοριθμική, διαγνώσιμη, επιλύσιμη

[2] αλλιώς αναγνωρίσιμη

[3] αν $x \notin L$ δεν ξέρουμε πως θα συμπεριφερθεί το $A(x)$. Μπορεί και να μην τερματίσει!

Τελευταία ενημέρωση 28/3/2012, στις 01:37.
Γραμμένες από τους φοιτητές του ΜΠΛΑ και επεξεργασμένες από τον Λ. Κυρούση.
Για τυχόντα λάθη παρακαλούμε ενημερώσετέ μας στο σχετικό topic του μαθήματος.

Θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο[4] A ο οποίος απαριθμεί τα στοιχεία της L. Ο A λειτουργεί σε βήματα. Στο n-οστό βήμα ($n \geq 1$) ο A κάνει το εξής:

$\forall i, 1 \leq i \leq n$ προσομειώνει τη λειτουργία του A' για το w_i για ένα (ακόμα) βήμα. Αν ο A' τερματίσει και $A'(w_i) = yes$ τότε ο A τυπώνει το w_i στην έξοδο και συνεχίζει στο επόμενο i.

Ουσιαστικά αυτό που κάνει ο A είναι να τρέχει τον A' "παράλληλα" για όλα τα στοιχεία του Σ^*. Λόγω της σχέσης 3.1 ο A' θα τερματίσει υποχρεωτικά, απαντώτας yes, για όλα τα στοιχεία της L, οπότε αυτά θα τυπωθούν σίγουρα στην έξοδο του A.

($\Leftarrow$) Τρέχουμε τον αλγόριθμο που αριθμεί την L και για κάθε x που θα βγει στην έξοδό του απαντάμε yes. Με αυτόν τον τρόπο απαντάμε yes για όλα τα στοιχεία της L αφού αυτά θα βγουν υποχρεωτικά στην απαρίθμηση. Αντίστροφα αν για κάποιο x απαντήσουμε yes σημαίνει ότι εμφανίστηκε κάπου στην απαρίθμηση άρα ανήκει στην L. □

Θεώρημα 3.2.3. *Για κάθε γλώσσα L : L αναδρομική $\Leftrightarrow$ L και L^c α.α.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Από το θεώρημα 3.2.1 έχουμε ότι L^c αναδρομική. Από τον ορισμό 3.2.1 φαίνεται ότι κάθε αναδρομική γλώσσα είναι και ημιανδρομική, οπότε και α.α. Οπότε έχουμε το ζητούμενο.

($\Leftarrow$) Έστω A, A' οι αλγόριθμοι που απαριθμούν τις L, L^c αντίστοιχα. Ένας αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει την L λειτουργεί ως εξής:

για κάθε $w \in \Sigma^*$ κάνουμε παράλληλα τους υπολογισμούς $A(w)$, $A'(w)$. Επειδή $w \in L \vee w \in L^c$ υποχρεωτικά κάποιο από τα $A(w)$, $A'(w)$ θα σταματήσει και θα απαντήσει yes. Αν $A(w) = yes$ τότε απαντάμε yes. Αν $A'(w) = yes$ απαντάμε no. □

Παρατήρηση. Από τα προηγούμενα κεφάλαια είναι σαφές ότι υπάρχουν αλγόριθμοι για τα παρακάτω:

- Για να αποφασίσουμε μία έκφραση της Γ_0 είναι τύπος. (κάνουμε μια συντακτική ανάλυση της έκφρασης χρησιμοποιώντας και τα λήμματα 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3).
- Για να αποφασίσουμε αν ένας τύπος είναι ταυτολογία ή όχι.
- Για να αποφασίσουμε αν ένας τύπος είναι ικανοποιήσιμος.
- Για να αποφασίσουμε αν $\Sigma \models \phi$, με Σ πεπερασμένο.

Οι αλγόριθμοι για τα 2-4 μπορούν να υλοποιηθούν εξετάζοντας όλες τις περιπτώσεις από τον πίνακα αλήθειας.

[4] η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε ονομάζεται dovetailing