Λογική Ι – Μαθηματική Λογική
Εξέταση Ιουνίου 2013

Θέμα 1. Έστω Σ σύνολο προτάσεων (αποφάνσεων) πρωτοτάξιας γλώσσας. Με $\mathrm{Cn}\ \Sigma$ συμβολίζουμε το σύνολο των προτάσεων (θεωρία) οι οποίες είναι αληθείς σε κάθε δομή στην οποία είναι αληθείς όλες οι προτάσεις του Σ. Λέμε ότι μία θεωρία T είναι πεπερασμένα αξιωματικοποιήσιμη αν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο προτάσεων Σ τέτοιο ώστε $T = \mathrm{Cn}\ \Sigma$. Να αποδείξετε ότι αν $\mathrm{Cn}\ \Sigma$ είναι πεπερασμένα αξιωματικοποιήσιμη τότε υπάρχει πεπερασμένο $S \subseteq \Sigma$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Cn}\ \Sigma = \mathrm{Cn}\ S$.

Λύση. Βλ. Θεώρημα 26Η βιβλίου Enderton.

Θέμα 2. Έστω R διθέσια σχέση στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ (δηλαδή $R \subseteq \mathbb{N}^2$) και έστω P η διθέσια σχέση που ορίζεται ως εξής:

$$(a, b) \in P \text{ ανν υπάρχει } c \in \mathbb{N} \text{ έτσι ώστε } c \leq b \text{ και } (a, c) \in R.$$

Να αποδείξετε ότι αν η σχέση R είναι αντιπροσωπεύσιμη (αναπαραστάσιμη) στη θεωρία $\mathrm{Cn}\ A_E$ (την υποθεωρία της $\mathrm{Th}\mathfrak{N}$ που ορίζεται από το πεπερασμένο αξιωματικό σύστημα A_E που περιγράφει τις βασικές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης στο σύνολο $\mathbb{N}$), το ίδιο ισχύει και για την P. Η απόδειξή σας να στηρίζεται μόνο στους ορισμούς καν να μην κάνει χρήση της σχέσης αντιπροσωπεύσιμων και διαγνώσιμων σχέσεων.
Υπόδειξη: Θεωρήστε τύπο $\phi(u, v)$ που αντιπροσωπεύει την R και με βάση αυτόν ορίστε τύπο που αντιπροσωπεύει την P.

Λύση. Σύμφωνα με την υπόδειξη έστω $\phi(u, v)$ τύπος που αντιπροσωπεύει την R. Από τον ορισμό, για κάθε δύο φυσικούς a, c τότε έχουμε:

$$\text{Αν } (a, c) \in R \text{ τότε } \phi(S^a0, S^c0) \in \mathrm{Cn}\ A_E, \text{ και} \tag{1}$$

$$\text{Αν } (a, c) \notin R \text{ τότε } \neg\phi(S^a0, S^c0) \in \mathrm{Cn}\ A_E. \tag{2}$$

Θεωρούμε τον τύπο $\psi(u, v)$ που ορίζεται να είναι $\exists w(w \leq v \wedge \phi(u, w))$. Θα αποδείξουμε ότι ο ψ αντιπροσωπεύει την P.

Πράγματι για το ένα σκέλος της απόδειξης θεωρούμε ζεύγος φυσικών (a, b) τέτοιο ώστε $(a.b) \in P$. Από τον ορισμό της P υπάρχει φυσικός $c \leq b$ έτσι ώστε $(a, c) \in R$. Οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\phi(S^a0, S^c0) \in \mathrm{Cn}\ A_E$. Επίσης, προφανώς $S^c0 \leq S^b0 \in \mathrm{Cn}\ A_E$, άρα $S^c0 \leq S^b0 \wedge \phi(S^a0, S^c0) \in \mathrm{Cn}\ A_E$, άρα $\exists w(w \leq S^b0 \wedge \phi(S^a0, w) \in \mathrm{Cn}\ A_E$, άρα $\psi(S^a0, S^b0) \in \mathrm{Cn}\ A_E$.

Για το άλλο σκέλος της απόδειξης θεωρούμε ζεύγος φυσικών (a, b) τέτοιο ώστε $(a.b) \notin P$. Από τον ορισμό της P έχουμε ότι για κάθε φυσικό c, αν $c \leq b$ τότε $(a, c) \notin R$. Άρα από τη σχέση (2) έχουμε $\neg\phi(S^a0, S^c0) \in \mathrm{Cn}\ A_E$, άρα για κάθε φυσικό c έχουμε

$$(S^c0 \leq S^b0 \to \neg\phi(S^a0, S^c0)) \in \mathrm{Cn}\ A_E.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\forall w(w \leq S^b0 \leftrightarrow (x = 0 \vee \cdots \vee x = S^b0)) \in \mathrm{Cn}\ A_E.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\forall w(w \leq S^b 0 \to \neg\phi(S^a 0, w)) \in \text{Cn } A_E,$$

δηλαδή

$$\neg\exists w(w \leq S^b 0 \wedge \phi(S^a 0, w)) \in \text{Cn } A_E,$$

δηλαδή

$$\neg\psi(S^a 0, S^b 0) \in \text{Cn } A_E.$$

Θέμα 3. Έστω T θεωρία σε μία πρωτοτάξια γλώσσα για τη θεωρία αριθμών, ή μέρος της, που κατ' ελάχιστο περιέχει σύμβολα για το 0, την πράξη του διαδόχου S και τη γνήσια διάταξη $<$. Λέμε ότι η T είναι ω-συνεπής ανν για οποιοδήποτε τύπο $\phi(v)$ με *το πολύ* μία ελεύθερη μεταβλητή v, αν $T \models \phi(S^a 0)$ για κάθε $a \in \mathbb{N}$, τότε $T \not\models \exists v(\neg\phi(v))$. Ποια ή ποιες από τους ακόλουθους ισχυρισμούς αληθεύει για οποιαδήποτε T (να αποδείξετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση);

- Αν T ω-συνεπής, τότε T συνεπής.
  Υπόδειξη: Υποθέστε ότι υπάρχει *πρόταση* ϕ (*χωρίς* ελεύθερες μεταβλητές) έτσι ώστε $T \models \phi$ και $T \models \neg\phi$. Τι μπορείτε να πείτε για $T \models \phi(S^a 0)$ και για $T \models \exists v(\neg\phi(v))$;

- Αν T συνεπής, τότε T ω-συνεπής.
  Υπόδειξη: Θεωρήστε ως T θεωρία που αποτελείται από τα γνωστά αξιώματα για τη διάτσξη $<$, το διάδοχο S και το 0 και υποθέστε ότι η T περιέχει επιπλέον τις προτάσεις $S^a 0 < c, a \in \mathbb{N}$, όπου c σύμβολο σταθεράς που δεν εμφανίζεται στις άλλες προτάσεις της T. Είναι η συνεπής; ω-συνεπής;

Σημείωση: $\phi(S^a 0)$ είναι η πρόταση (απόφανση) που προκύπτει αντικαθιστώντας στον $\phi(v)$ τις ελεύθερες εμφανίσεις της v με τον όρο $S^a 0$.

Λύση. Όσον αφορά τον πρώτο ισχυρισμό, θα αποδείξουμε ότι μία ω-συνεπής θεωρία είναι κατά ανάγκη συνεπής. Έστω ότι δεν ήταν και έστω ϕ πρόταση τέτοια ώστε $T \models \phi$ και $T \models \neg\phi$. Επειδή η ϕ ως πρόταση δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές, έχουμε ότι για οποιαδήποτε μεταβλητή v, η $\phi(S^a 0)$ ταυτίζεται με την ϕ και επίσης η $\exists v(\neg\phi)$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\neg\phi$. Άρα επειδή $T \models \phi$, έχουμε ότι $T \models \phi(S^a 0)$ για κάθε $a \in \mathbb{N}$. Επίσης επειδή $T \models \neg\phi$, έχουμε ότι $T \models \exists v(\neg\phi(v))$, άτοπο.

Για το αντίστροφο θα αποδείξουμε ότι υπάρχει συνεπής θεωρία που *δεν* είναι ω-συνεπής. Θεωρούμε τη θεωρία T που ορίζεται στην υπόδειξη. Με χρήση του θεωρήματος συμπάγειας συμπεραίνουμε ότι η T είναι συνεπής. Θεωρούμε τώρα ως τύπο $\phi(v)$ τον τύπο $v < c$. Εξ ορισμού της T, $T \models \phi(S^a 0)$ για κάθε $a \in \mathbb{N}$. Επίσης επειδή $T \models \neg(c < c)$ έχουμε ότι $T \models \exists v(\neg\phi(v))$, άρα η T δεν είναι ω-συνεπής.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα ως προς τη βαθμολογία (αλλά όχι τη δυσκολία). Στη διόρθωση θα ληφθεί πολύ σοβαρά υπόψη η ακρίβεια και η οικονομία στη διατύπωση.