Λογική Ι (Θεωρητικά Μαθηματικά) – Μαθηματική Λογική (ΜΠΛΑ)
Ενδιάμεση Εξέταση Απρίλιος 2013

Θέμα 1. Έστω ϕ, ψ δύο τύποι μιας πρωτοτάξιας γλώσσας και x μεταβλητή που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ. Χωρίς να καταφύγετε σε σημασιολογικές έννοιες (δηλ. αποκλειστικά με συντακτικά εργαλεία) να αποδείξετε μόνον έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς (όποιον θέλετε, αλλά **όχι** και τους δύο – να αναφέρετε ποιον επιλέγετε):

1. $\vdash ((\forall x\phi \to \psi) \to \exists x(\phi \to \psi))$.
2. $\vdash (\exists x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \psi))$.

Λύση (1). Με βάση το Μεταθεώρημα Συναγωγής, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(\forall x\phi \to \psi) \vdash \exists x(\phi \to \psi).$$

Για το τελευταίο, με βάση τον ορισμό του υπαρξικού ποσοδείκτη και το Μεταθεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο αρκεί να αποδείξουμε ότι το

$$\{(\forall x\phi \to \psi), \forall x(\neg(\phi \to \psi))\}$$

είναι ασυνεπές. Από το Αξιωματικό Σχήμα Αντικατάστασης (μία μεταβλητή είναι πάντοτε αντικαταστάσιμη από τον εαυτό της) και το Μεταθεώρημα Ταυτολογικών Συνεπαγωγών, προκύπτει ότι

$$\forall x(\neg(\phi \to \psi)) \vdash \phi, \neg\psi.$$

Από το τελευταίο και το Μεταθεώρημα Γενίκευσης (η x δεν είναι ελεύθερη στον $\forall x(\neg(\phi \to \psi))$), προκύπτει ότι

$$\forall x(\neg(\phi \to \psi)) \vdash \forall x\phi, \neg\psi.$$

Τώρα όμως η ασυνέπεια του

$$\{(\forall x\phi \to \psi), \forall x(\neg(\phi \to \psi))\}$$

προκύπτει από εφαρμογή του Modus Ponens.

Λύση (2). Από τα Μεταθεωρήματα Αντιθετοαντιστροφής και Συναγωγής και τον ορισμό του υπαρξιακού ποσοδείκτη, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\neg(\forall x\phi \to \psi) \vdash \forall x(\neg(\phi \to \psi)).$$

Από το Μεταθεώρημα Γενίκευσης (x δεν είναι ελεύθερη στον $\neg(\forall x\phi \to \psi)$) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg(\forall x\phi \to \psi) \vdash \neg(\phi \to \psi).$$

Για το τελευταίο, από το Μεταθεώρημα Ταυτολογικών Συνεπαγωγών, αρκεί να δείξω ότι

$$\forall x\phi \vdash \phi,$$

το οποίο αληθεύει λόγω του αξιωματικού σχήματος αντικατάστασης (μία μεταβλητή είναι αντικαταστάσιμη από τον εαυτό της).

Θέμα 2. Έστω Σ, T δύο σύνολα αποφάνσεων μιας πρωτοτάξιας γλώσσας και ϕ, ψ αποφάνσεις της έτσι ώστε να μην υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλες τις αποφάνσεις του συνόλου $\Sigma \cup T \cup \{\phi, \psi\}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει απόφανση σ τέτοια ώστε $\Sigma \vdash (\phi \to \sigma)$ και $T \vdash (\psi \to \neg\sigma)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ό,τι κύρια αποτελέσματα (όχι όμως ασκήσεις) καλύψαμε στο μάθημα.

Λύση. Αφού εξ υποθέσεως το $\Sigma \cup T \cup \{\phi, \psi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, από το Θεώρημα Συμπάγειας προκύπτει ότι υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολό του που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Άρα υπάρχουν $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ έτσι ώστε $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \cup T \cup \{\phi, \psi\}$ μη ικανοποιήσιμο. Θεωρούμε ως σ την απόφανση $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n \wedge \phi$. Είναι προφανές ότι $\Sigma, \phi \models \sigma$, αφού η σ είναι σύζευξη αποφάνσεων του $\Sigma \cup \{\phi\}$. Συμπεραίνουμε τώρα εύκολα ότι $\Sigma \models (\phi \to \sigma)$, άρα από το Θεώρημα Πληρότητας,

$$\Sigma \vdash (\phi \to \sigma).$$

Επίσης λόγω της μη ικανοποιησιμότητας του $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \cup T \cup \{\phi, \psi\}$, συμπεραίνουμε ότι $T, \psi \models \neg\sigma$, άρα $T \models (\psi \to \neg\sigma)$, και επομένως από το Θεώρημα Πληρότητας έχουμε

$$T \vdash (\psi \to \neg\sigma).$$

Θέμα 3. Έστω $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ μία συμβατική συνάρτηση και $a \in \mathbb{R}$ συμβατικός πραγματικός. Να ορίσετε στη μη συμβατική ανάλυση πότε η συνάρτηση F είναι συνεχής στο a και στη συνέχεια να αποδείξετε προσεκτικά ότι ο ορισμός σας συνεπάγεται το συμβατικό ορισμό με ϵ και δ (**μη** χρησιμοποιήσετε την αντίστοιχη άσκηση για τα όρια που κάναμε στο μάθημα˙ επίσης, ο συμβολισμός σας να είναι εύχρηστος, ακόμη και εάν δεν είναι τυπικά ορθός).

Λύση. Στη μη συμβατική ανάλυση, λέμε ότι η F συνεχής στο a αν για οποιοδήποτε μη συμβατικό πραγματικό x απείρως κοντά στο a, το $F(x)$ είναι απείρως κοντά στο $F(a)$. Έστω τώρα $\epsilon > 0$ θετικός συμβατικός. Για το δεδομένο συμβατικό $\epsilon > 0$, θεωρούμε την απόφανση ϕ που εκφράζει ότι:

$$\exists \delta > 0 \forall x (|x - a| < \delta \to |F(x) - F(a)| < \epsilon).$$

Ισχυριζόμαστε ότι η ϕ επαληθεύεται στη δομή ${}^*\mathfrak{R}$. Πράγματι, ως $\delta \in {}^*\mathbb{R}$ παίρνουμε ένα θετικό απειροστό˙ τότε για οποιοδήποτε $x \in {}^*\mathbb{R}$, αν $|x - a| < \delta$, προκύπτει ότι x είναι απείρως κοντά στο a, άρα από την υπόθεση, $F(x)$ απείρως κοντά στο $F(a)$, επομένως $|F(x) - F(a)| < \epsilon$. Γνωρίζοντας τώρα ότι η ϕ επαληθεύεται στη ${}^*\mathfrak{R}$, συμπεραίνουμε ότι επαληθεύεται και στην $\mathfrak{R}$. Από το τελευταίο όμως άμεσα συμπεραίνουμε, αφού ϵ αυθαίρετος συμβατικός θετικός, ότι η F είναι συνεχής στο a, με τη συνήθη ϵ-δ έννοια.