Λογική Ι (Θεωρητικά Μαθ.) - Μαθηματική Λογική (ΜΠΛΑ)

Τελική Εξέταση Ιούνιος 2012

Σύντομες Λύσεις

Θέμα 1.1 – 2 μονάδες. Θυμηθείτε ότι μία θεωρία T επιδέχεται απαλοιφή ποσοδεικτών ανν για κάθε τύπο ϕ της γλώσσας της T υπάρχει τύπος ψ χωρίς ποσοδείκτες έτσι ώστε $T \models (\phi \leftrightarrow \psi)$. Να αποδείξετε ότι για να αποδέχεται η T απαλοιφή ποσοδεικτών αρκεί να υπάρχει ψ όπως προηγουμένως για τύπους ϕ της μορφής $\forall x_1 \cdots \forall x_n \chi$, όπου χ διάζευξη ατομικών τύπων ή αρνήσεών τους.
Θέμα 1.2 – 3 μονάδες. Έστω δομή $\mathfrak{A}$ με σύμπαν $|\mathfrak{A}| = \mathbb{N}$, της οποίας όλες οι σχέσεις $R^{\mathfrak{A}}$ είναι αλγοριθμικά αποκρίσιμες (R είναι ένα οποιοδήποτε σύμβολο κατηγορήματος της γλώσσας της $\mathfrak{A}$) και όλες οι συναρτήσεις $f^{\mathfrak{A}}$ είναι αλγοριθμικά υπολογίσιμες (f είναι ένα οποιοδήποτε σύμβολο συναρτήσεως της γλώσσας της $\mathfrak{A}$). Να αποδείξετε ότι αν η $\mathrm{Th}\mathfrak{A}$ επιδέχεται απαλοιφή ποσοδεικτών κατά αλγοριθμικό τρόπο, δηλαδή υπάρχει αλγόριθμος που δεδομένου τύπου ϕ υπολογίζει τύπο ψ χωρίς ποσοδείκτες τέτοιον ώστε $\mathrm{Th}\mathfrak{A} \models (\phi \leftrightarrow \psi)$, τότε το $\mathrm{Th}\mathfrak{A}$ είναι ένα αλγοριθμικά αποκρίσιμο σύνολο προτάσεων.

Λύση 1.1. Δεχόμαστε ότι για κάθε τύπο ϕ της μορφής $\forall x_1 \cdots \forall x_n \chi$, όπου χ διάζευξη ατομικών τύπων ή αρνήσεών τους ισχύει ότι:

$$T \models (\phi \leftrightarrow \psi), \text{ για κάποιο } \psi \text{ χωρίς ποσοδείκτες.} \tag{1}$$

Επειδή τώρα για τυχαίους τύπους χ_1, χ_2, ισχύει ότι

$$\forall x(\chi_1 \wedge \chi_2) \equiv (\forall x \chi_1 \wedge \forall x \chi_2),$$

και επειδή κάθε τύπος χωρίς ποσοδείκτες γράφεται σε κανονική συζευκτική μορφή, συμπεραίνουμε ότι η (1) ισχύει και όταν ο ϕ είναι της μορφής $\forall x_1 \cdots \forall x_n \chi$, όπου χ τυχαίος τύπος χωρίς ποσοδείκτες. Παίρνοντας τώρα αρνήσεις, καταλήγουμε ότι η (1) ισχύει και για τύπους ϕ της μορφής $\exists x_1 \cdots \exists x_n \chi$, όπου χ τύπος χωρίς ποσοδείκτες.

Από το θεώρημα προδεσμευτικής κανονικής μορφής (prenex normal form) γνωρίζουμε ότι κάθε τύπος είναι λογικά ισοδύναμος με τύπο της μορφής

$$\exists x_1^1 \cdots \exists x_{n_1}^1 \cdots \forall x_1^k \cdots \forall x_{n_k}^k \chi,$$

όπου χ τύπος χωρίς ποσοδείκτες. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα και επαγωγή στον αριθμό των εναλλαγών καθολικών με υπαρξιακούς ποσοδείκτες στον ϕ συνάγουμε το ζητούμενο.

Λύση 1.2. Θεωρούμε πρόταση ϕ της γλώσσας της $\mathfrak{A}$. Με βάση το προηγούμενο ερώτημα και την υπόθεση για απαλοιφή ποσοδεικτών κατά αλγοριθμικό τρόπο για $T = \mathrm{Th}\mathfrak{A}$, συμπεραίνουμε ότι δεδομένης πρότασης ϕ μπορούμε αλγοριθμικά να βρούμε πρόταση ψ χωρίς ποσοδείκτες έτσι ώστε:

$$\mathrm{Th}\mathfrak{A} \models (\phi \leftrightarrow \psi) \tag{2}$$

(μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι ο ψ στη (2) είναι πρόταση, όπως η ϕ, διότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις τυχόν ελεύθερες μεταβλητές του ψ με μία σταθερά — αν η γλώσσα της $\mathfrak{A}$ δεν περιέχει σταθερές, την εμπλουτίζουμε προσθέτοντας μία). Συμπεραίνουμε ότι για να αποδειχθεί το ζητούμενο αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι δυνατό με αλγοριθμικό τρόπο να αποφανθούμε αν $\mathfrak{A} \models \psi$ για δεδομένη πρόταση ψ χωρίς ποσοδείκτες. Αυτό όμως συνάγεται από τα ακόλουθα:

- κάθε πρόταση χωρίς ποσοδείκτες γράφεται π.χ. ως διάζευξη συζεύξεων ατομικών προτάσεων ή αρνήσεων τους,
- οι αλγοριθμικά αποκρίσιμες σχέσεις είναι κλειστές για ένωση, τομή και συμπλήρωμα και τέλος,
- οι σχέσεις $R^{\mathfrak{A}}$ είναι αλγοριθμικά αποκρίσιμες και οι συναρτήσεις $f^{\mathfrak{A}}$ είναι αλγοριθμικά υπολογίσιμες.

Θέμα 2.1 – 2 μονάδες. Έστω $\mathcal{L}$ πεπερασμένη γλώσσα και T μία συνεπής θεωρία προτάσεων της $\mathcal{L}$. Να αποδείξετε ότι η T μπορεί να επεκταθεί σε *πλήρη* και συνεπή θεωρία. *Υπόδειξη:* Θεωρήστε μία αρίθμηση $\sigma_1, \sigma_0, \ldots$ των προτάσεων της $\mathcal{L}$ και προσθέστε διαδοχικά την σ_i ή την $(\neg\sigma_i)$.

Θέμα 2.2 – 3 μονάδες. Αν επιπλέον η T είναι αλγοριθμικά αποκρίσιμη, αποδείξτε ότι μπορεί να επεκταθεί σε πλήρη, συνεπή και *αλγοριθμικά αποκρίσιμη* θεωρία. *Υπόδειξη:* Θεωρήστε μία *αλγοριθμική* αρίθμηση $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ των προτάσεων της $\mathcal{L}$. Παρατηρήστε πρώτα ότι $T_i \cup \{\sigma_{i+1}\}$ συνεπές ανν

$$(\tau_i \to (\neg\sigma_{i+1})) \notin T,$$

όπου τ_i η σύζευξη των προτάσεων του (πεπερασμένου) $T_i \setminus T$ (θυμηθείτε επίσης ότι οι προτάσεις που είναι λογικές συνέπειες μιας θεωρίας ανήκουν σε αυτήν). Στη συνέχεια, περιγράψτε αλγόριθμο που δεδομένων i και πρότασης χ αποφαίνεται αν $\chi \in T_i$.

Λύση 2.1. Ορίζουμε $T_0 = T$ και

$$T_{i+1} = \begin{cases} T_i \cup \{\sigma_{i+1}\}, & \text{αν } T_i \cup \{\sigma_{i+1}\} \text{ συνεπές,} \\ T_i \cup \{(\neg\sigma_{i+1})\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι ο ανωτέρω επαγωγικός ορισμός οδηγεί πάντοτε σε συνεπή σύνολα T_i διότι αν T_i είναι συνεπές τότε ένα τουλάχιστον εκ των

$$T_i \cup \{\sigma_{i+1}\}, T_i \cup \{(\neg\sigma_{i+1})\}$$

είναι συνεπές. Ορίζουμε τώρα $T' = \cup_i T_i$. Από το θεώρημα συμπάγειας το T' είναι συνεπές και με βάση τον ορισμό του είναι πλήρες. Άρα το T' είναι και θεωρία (περιέχει όλες τις προτάσεις που είναι λογικές συνέπειές του).

Λύση 2.2. Ορίζουμε $T_i, i = 0, 1 \ldots$ και T' όπως στο προηγούμενο ερώτημα, θεωρώντας ότι η αρίθμηση $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ είναι αλγοριθμική. Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, το T' είναι πλήρης και συνεπής θεωρία.

Παρατηρούμε πρώτα ότι $\forall i(|T_i \setminus T| \leq i)$, άρα έχει νόημα να θεωρήσουμε τη σύζευξη των προτάσεων στο $T_i \setminus T$ (αν $T_i \setminus T = \emptyset$, τότε θεωρούμε ότι η τ_i είναι μία έγκυρη πρόταση –διότι δεν συζευγνύουμε κάτι!). Θα αποδείξουμε ότι $T_i \cup \{\sigma_{i+1})\}$ είναι συνεπές ανν $(\tau_i \to (\neg\sigma_{i+1})) \notin T$. Πράγματι επειδή το T είναι θεωρία (και επομένως περιέχει ως στοιχεία όλες τις προτάσεις που είναι λογικές συνέπειές του), έχουμε ότι $(\tau_i \to (\neg\sigma_{i+1})) \notin T$ ανν $T \not\models (\tau_i \to (\neg\sigma_{i+1}))$. Επίσης επειδή το τ_i είναι η σύζευξη των προτάσεων του $T_i \setminus T$ έχουμε ότι $T \not\models (\tau_i \to (\neg\sigma_{i+1}))$ ανν $T_i \not\models (\neg\sigma_{i+1})$. Από την αρχή της απαγωγής σε άτοπο έχουμε ότι $T_i \not\models (\neg\sigma_{i+1})$ ανν δεν αληθεύει ότι το $T_i \cup \{\sigma_{i+1})\}$ είναι ασυνεπές, δηλαδή ανν $T_i \cup \{\sigma_{i+1})\}$ είναι συνεπές.

Τώρα, για την αλγοριθμική αποκρισιμότητα της T', πρώτα θα περιγράψουμε αναδρομικό αλγόριθμο που δεδομένων i και πρότασης χ αποφαίνεται αν $\chi \in T_i$. Για $i = 0$ χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι η $T_0 = T$ είναι αλγοριθμικά αποκρίσιμη. Για $i + 1 > 0$, ο αλγόριθμος περιγράφεται ως εξής: Αν χ δεν είναι ούτε σ_{i+1}, ούτε $(\neg\sigma_{i+1})$, τότε ελέγχουμε αν $\chi \in T_i$. Αν όμως χ είναι σ_{i+1}, ή $(\neg\sigma_{i+1})$, τότε ελέγχουμε αν $(\tau_i \to \neg\sigma_{i+1}) \in T$ και αποφαινόμαστε σύμφωνα με τον ορισμό του T_{i+1} (χρησιμοποιώντας ότι το T_{i+1} είναι συνεπές). Επομένως συνάγεται ότι T' είναι αλγοριθμικά αριθμήσιμο. Η αλγοριθμική αποκρισιμότητά του είναι τώρα συνέπεια της πληρότητάς του.