Λογική Ι (Θεωρητικά Μαθ.) - Μαθηματική Λογική (ΜΠΛΑ)

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2012

Σύντομες Λύσεις

Θέμα 1 – 6 μονάδες. Έστω L μία πεπερασμένη πρωτοβάθμια γλώσσα με ισότητα που περιέχει ως μόνα λογικά σύμβολα κατηγορηματικά σύμβολα και σύμβολα σταθερών. Έστωσαν ακόμη ϕ πρόταση και $\mathfrak{A}$ δομή (ερμηνεία) της L.
1α. Ισχύει ότι αν $\mathfrak{A} \models \phi$ τότε για κάθε πεπερασμένη υποδομή $\mathfrak{A}'$ της $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}' \models \phi$;
1β. Ισχύει το αντίστροφο του 1α;
1γ. Να αποδείξετε ότι αν η ϕ περιέχει μόνον καθολικούς ποσοδείκτες στην κανονική προδεσμευτική της μορφή τότε ισχύει το 1α.
1δ (το δυσκολότερο). Να αποδείξετε αν η ϕ περιέχει μόνον καθολικούς ποσοδείκτες (στην κανονική προδεσμευτική της μορφή) τότε ισχύει και το αντίστροφο του 1α. *Υπόδειξη:* Εμπλουτίστε την L εισάγοντας ένα νέο σύμβολο σταθεράς c_a για κάθε στοιχείο $a \in A$ (A το σύμπαν της $\mathfrak{A}$). Γράψτε προτάσεις που εκφράζουν όλες τις ιδιότητες της $\mathfrak{A}$ που εκφράζονται με ατομικούς τύπους και στη συνέχεια εφαρμόστε το Θεώρημα Συμπάγειας στο κατάλληλο σύνολο προτάσεων.

Λύση.1α. Δεν ισχύει. Θεωρούμε γλώσσα L που περιέχει μόνον ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $<$ και δομή $\mathfrak{A}$ για την L που είναι γνήσια ολική διάταξη και δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Τότε η $\mathfrak{A}$ ικανοποιεί την πρόταση $\forall x \exists y (x < y)$, αλλά η πρόταση αυτή δεν ικανοποιείται σε οποιαδήποτε πεπερασμένη υποδομή της $\mathfrak{A}$, διότι μία ολική διάταξη σε πεπερασμένο σύνολο έχει πάντοτε μέγιστο στοιχείο.
1β. Δεν ισχύει. θεωρούμε τη δομή $\mathfrak{A}$ του προηγουμένου ερωτήματος και την πρόταση $\exists y \forall x (x \neq y \rightarrow x < y)$ (υπάρχει μέγιστο στοιχείο). Η πρόταση αυτή ικανοποιείται σε οποιαδήποτε πεπερασμένη υποδομή της $\mathfrak{A}$, αλλά όχι στην ίδια την $\mathfrak{A}$.
1γ. Θεωρούμε πρόταση ϕ που περιέχει μόνον καθολικούς ποσοδείκτες. Θα αποδείξουμε κάτι ελαφρώς ισχυρότερο: Αν ϕ *τύπος* της L σε κανονική προδεσμευτική μορφή που περιέχει μόνον καθολικούς ποσοδείκτες του οποίου οι ελεύθερες μεταβλητές είναι μεταξύ των $x_1, \ldots x_n$, αν επίσης $a_1, \ldots, a_n \in A$ και αν $\mathfrak{A}'$ πεπερασμένη υποδομή της $\mathfrak{A}$ με $a_1, \ldots, a_n \in A'$ (A' το σύμπαν της $\mathfrak{A}'$) και $\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$, τότε $\mathfrak{A}' \models \phi[a_1, \ldots, a_n]$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος των καθολικών ποσοδεικτών του τύπου ϕ.

Αν το πλήθος των καθολικών ποσοδεικτών είναι 0 (δεν υπάρχουν ποσοδείκτες στον ϕ) τότε υποθέτουμε ότι ϕ είναι σε κανονική συζευκτική μορφή και εφαρμόζουμε επαγωγή στη δομή του. Είναι προφανές τι θα κάνουμε αν ο

ϕ προκύπτει με την εφαρμογή ενός προτασιακού συνδέσμου $\wedge$ ή $\vee$ από άλλο απλούστερη τύπο. Αν πάλι ο ϕ είναι ατομικός ή άρνηση ατομικού, τότε πάλι το ζητούμενο είναι προφανές διότι στην $\mathfrak{A}'$ οι ερμηνείες των κατηγορηματικών συμβόλων είναι οι περιορισμοί των ερμηνειών των αντίστοιχων κατηγορηματικών συμβόλων στην $\mathfrak{A}$.

Για τη συνέχεια της επαγωγικής απόδειξης, υποθέτουμε ότι ο ϕ είναι της μορφής $\forall y_{k+1} \cdots \forall y_1 \psi(y_1, \ldots, y_{k+1}, x_1, \ldots, x_n)$ και έστω ότι

$$\mathfrak{A} \models \forall y_{k+1} \cdots \forall y_1 \psi(y_1, \ldots, y_{k+1}, x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n].$$

Από τον ορισμό του Tarski έχουμε τότε ότι για κάθε $b \in A$

$$\mathfrak{A} \models \forall y_k \cdots \forall y_1 \psi(y_1, \ldots, y_{k+1}, x_1, \ldots, x_n)[b, a_1, \ldots, a_n],$$

πότε από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε $b \in A'$,

$$\mathfrak{A}' \models \forall y_k \cdots \forall y_1 \psi(y_1, \ldots, y_{k+1}, x_1, \ldots, x_n)[b, a_1, \ldots, a_n],$$

οπότε πάλι με βάση τον ορισμό Tarski,

$$\mathfrak{A}' \models \forall y_{k+1} \cdots \forall y_1 \psi(y_1, \ldots, y_{k+1}, x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n].$$

1δ. Θεωρούμε πάλι πρόταση ϕ που περιέχει μόνον καθολικούς ποσοδείκτες (στην προδεσμευτική κανονική μορφή). Εμπλουτίζουμε τη γλώσσα L εισάγοντας ένα νέο σύμβολο σταθεράς c_a για κάθε $a \in A$ και έστω L' η νέα γλώσσα. Θεωρούμε τη $\mathfrak{A}$ ως δομή της L' ερμηνεύοντας τις c_a ως a, για κάθε $a \in A$. Έστω Σ το σύνολο των *ατομικών* προτάσεων της L', ή αρνήσεων τους, οι οποίες επαληθεύονται στην $\mathfrak{A}$.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι ένα οποιοδήποτε *πεπερασμένο* υποσύνολο T του $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\phi \in T$. Έστω $\{c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}\}$ οι *νέες* σταθερές που εμφανίζονται στο T. Θεωρούμε πεπερασμένη υποδομή $\mathfrak{A}'$ της $\mathfrak{A}$ στην *αρχική* γλώσσα L, έτσι ώστε το A' (σύμπαν της $\mathfrak{A}'$) περιέχει τα $a_1, \ldots, a_n$. Για να θεωρηθεί η $\mathfrak{A}'$ ως δομή στην εμπλουτισμένη γλώσσα L', ερμηνεύουμε τις *νέες* σταθερές $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ ως $a_1, \ldots, a_n$, αντίστοιχα, και τις υπόλοιπες *νέες* σταθερές αυθαίρετα (τα λογικά σύμβολα της αρχικής γλώσσας L ερμηνεύονται στην $\mathfrak{A}'$ με τον τρόπο που προκύπτει από το γεγονός ότι η $\mathfrak{A}'$ υποδομή της $\mathfrak{A}$ στη γλώσσα L). Εξ υποθέσεως $\mathfrak{A}' \models \phi$. Επίσης επειδή τα στοιχεία του T πλην της ϕ είναι ατομικές προτάσεις, ή αρνήσεις τους, και περιέχουν μόνο τα τα $c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}$ από τα *νέα* σύμβολα της L' και επειδή $\mathfrak{A}'$ υποδομή της $\mathfrak{A}$ στη γλώσσα L, συμπεραίνουμε ότι $\mathfrak{A}' \models T$. Άρα πράγματι το T είναι ικανοποιήσιμο.

Από το Θεώρημα Συμπάγειας τώρα έχουμε ότι το $\Sigma \cup \{\phi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Έστω $\mathfrak{B}$ δομή της γλώσσας L' έτσι ώστε $\mathfrak{B} \models \Sigma$. Άρα

$$\mathfrak{B} \models \phi. \tag{1}$$

Επειδή τώρα η γλώσσα L' περιέχει ένα σύμβολο σταθεράς c_a για κάθε $a \in A$ και επειδή $c_a^{\mathfrak{A}} = a$ και επειδή τέλος το Σ περιέχει όλες τις ατομικές προτάσεις ή αρνήσεις τους της γλώσσας L' που επαληθεύονται στην $\mathfrak{A}$ συμπεραίνουμε ότι η δομή $\mathfrak{B}$ περιέχει ως υποδομή ένα ισομορφικό αντίγραφο $\mathfrak{B}'$ της $\mathfrak{A}$. Επειδή η ϕ έχει μόνο καθολικούς ποσοδείκτες μπορούμε να συμπεράνουμε με την ίδια ακριβώς απόδειξη όπως το (1γ) (δε χρησιμοποιήσαμε εκεί ότι η υποδομή $\mathfrak{A}'$ είναι πεπερασμένη) ότι η (1) παραπάνω συνεπάγεται ότι $\mathfrak{B}' \models \phi$. Άρα λόγω ισομορφίας, $\mathfrak{A} \models \phi$.

Θέμα 2 – 4 μονάδες. Αποδείξτε ότι ένα υποσύνολο A των πραγματικών $\mathbb{R}$ περιέχει μέγιστο στοιχείο (ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$) αν έχει ελάχιστο άνω φράγμα ως υποσύνολο των μη συμβατικών πραγματικών ${}^*\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε το συμβατικό μέρος ενός ελαχίστου άνω φράγματος του A (προσοχή όμως αυτό μπορεί να είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με το m - απόδειξή σας πρέπει να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις). Θα πάρουν μόρια μόνον *απολύτως* ορθοί, ακριβείς, *πλήρως* τεκμηριωμένοι και γραμμένοι με κατανοητό τρόπο συλλογισμοί οι οποίοι κατευθύνονται προς τη λύση.

Λύση. Έστω ότι το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα $m \in {}^*\mathbb{R}$ και έστω $st(m)$ το συμβατικό μέρος και dm το απειροστό μέρος του m (το dm μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή 0). Αν $m \in A$ έχουμε προφανώς τελειώσει. Έστω λοιπόν ότι $\forall x \in A(m > x)$.

Θα δείξουμε τότε πρώτα ότι

$$\forall x \in A(st(m) \geq x). \tag{2}$$

Πράγματι, έστω ότι για κάποιο $x_0 \in A$

$$x_0 > st(m). \tag{3}$$

Τότε επειδή $m = st(m) + dm > x_0$ συμπεραίνουμε από την (3) ότι

$$dm > x_0 - st(m) > 0.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή $st(m) - x_0$ είναι θετικός συμβατικός πραγματικός και dm απειροστό.

Συνεχίζουμε έχοντας την (2). Θα αποδείξουμε ότι $st(m) \in A$ οπότε θα έχουμε τελειώσει. Έστω ότι

$$\forall x \in A(st(m) > x). \tag{4}$$

Θεωρούμε τώρα τυχόν *θετικό* απειροστό i τέτοιο ώστε

$$i/2 > -dm. \tag{5}$$

Τότε από την (4) και τον ορισμό του απειροστού έχουμε ότι

$$\forall x \in A(st(m) - x > i > 0). \tag{6}$$

Άρα επειδή $st(m) = m - dm$, έχουμε από την (6) ότι $\forall x \in A(m - dm - x > i)$, άρα χρησιμοποιώντας και την (5) έχουμε ότι $\forall x \in A(m - i/2 > x + dm + i/2 > x)$. Επομένως το $m - i/2$ επίσης άνω φράγμα του A, άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι το m είναι *ελάχιστο* άνω φράγμα.