Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η επιχειρηματολογία, τόσο σε επιστημονικό όσο και σε καθημερινό επίπεδο, είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα, που άρχισε πολλούς αιώνες πριν από την εποχή μας. Η μελέτη έγκυρων μεθόδων εξαγωγής συμπερασμάτων από υποθέσεις, που αποτελεί αντικείμενο της Λογικής, απασχόλησε φιλοσόφους πριν από τον, κατά γενική ομολογία, θεμελιωτή της Λογικής, τον Αριστοτέλη. Από την αρχαιότητα μέχρι το 18ο αιώνα, η Λογική συνδεόταν με τη Φιλοσοφία. Η εισαγωγή όμως συμβολικών-μαθηματικών μεθόδων κατά το 19ο αιώνα οδήγησε στη λεγόμενη «Συμβολική» ή «Μαθηματική» Λογική.

Στόχος μου στο παρόν εγχειρίδιο είναι να παρουσιάσω υλικό που θεωρείται ως βασική γνώση της κλασικής Μαθηματικής Λογικής, δηλαδή στοιχεία «προτασιακής» και «κατηγορηματικής» λογικής. Η κεντρική ιδέα είναι να μελετηθούν οι τρόποι ορθής επιχειρηματολογίας, σε όσο το δυνατό γενικότερο πλαίσιο, δηλαδή σε πλαίσιο στο οποίο μπορούν να εκφραστούν όσο το δυνατό περισσότερα επιχειρήματα, πράγμα που επιτυγχάνεται με τη χρήση συμβολισμού και μεθόδων από τα Μαθηματικά. Η κατοχή βασικών γνώσεων Μαθηματικής Λογικής κρίνεται σήμερα ότι αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την εμβάθυνση σε μια πλειάδα επιστημονικών κατευθύνσεων, όχι μόνο στις Θετικές, αλλά και στις Ανθρωπιστικές Επιστήμες. Η επιλογή αλλά και η παρουσίαση της ύλης έγινε έχοντας κατά νου ότι το εγχειρίδιο αφορά κυρίως φοιτητές Θετικών Επιστημών που εκπαιδεύονται από απόσταση.

Τα περιεχόμενα διαιρούνται σε τρία κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο είναι καθαρά εισαγωγικό-ιστορικό και δε συνδέεται ουσιαστικά με τα υπόλοιπα. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα ιστορικά στοιχεία που περιέχει αναφέρονται για να δοθεί μια γενική εικόνα της εξέλιξης της Μαθηματικής Λογικής και όχι ως αντικείμενο απομνημόνευσης. Το δεύτερο κεφάλαιο αφορά στην «προτασιακή λογική», δηλαδή τον πιο πρωτόγονο τρόπο συμβολικού χειρισμού επιχειρημάτων, με βάση μόνο σύμβολα που αντιστοιχούν σε συνδετικές λέξεις, όπως η «και» κτλ. Παρόλο που ο τρόπος αυτός έχει περιορισμένες δυνατότητες, η αναλυτική παρουσίασή του προετοιμάζει το έδαφος για τη συνέχεια. Το τελευταίο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην «κατηγορηματική λογική», δηλαδή στη μελέτη του συμβολικού χειρισμού επιχειρημάτων, όπου η ανάλυση γίνεται όχι μόνο με βάση τις συνδετικές λέξεις, αλλά και εκφράσεις ποσότητας, όπως η «για κάθε», και εκφράσεις ιδιοτήτων. Η κατηγορηματική λογική προσφέρει ένα γενικότερο πλαίσιο από την προτασιακή λογική, αρκετά πλούσιο για να εκφράσει θεωρίες, αλλά και να οδηγήσει σε λύσεις προβλημάτων, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο.

Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχουν τριών ειδών εργασίες εξάσκησης του αναγνώστη: ασκήσεις αυτοαξιολόγησης, δραστηριότητες και ασκήσεις. Οι ασκήσεις αυτοαξιολόγησης δίνουν στον αναγνώστη την ευκαιρία να διαπιστώσει κατά πόσο έχει κατανοήσει βασικές έννοιες και μεθόδους που περιέχει το εκπαιδευτικό υλικό. Οι δραστηριότητες αποτελούν «δύσκολες ασκήσεις αυτοαξιολόγησης», για τη λύση τους δηλαδή απαιτείται μεγαλύτερη εμβάθυνση στο εκπαιδευτικό υλικό. Οι ασκήσεις, τέλος, που δίνονται στο τέλος κάθε κεφαλαίου, αφορούν κυρίως είτε συμπλήρωση/επαύξηση του εκπαιδευτικού υλικού είτε προβληματισμούς για θέματα που δε συνδέονται άμεσα με την κύρια ύλη. Θεωρώ απαραίτητο ο σπουδαστής να ασχοληθεί με τη λύση όλων των ασκήσεων αυτοαξιολόγησης και των δραστηριοτήτων. Επίσης, καλό θα ήταν να προσπαθήσει να λύσει τουλάχιστον τις μισές από τις ασκήσεις. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου έχω παραθέσει αναλυτικές λύσεις όλων των ασκήσεων αυτοαξιολόγησης και των δραστηριοτήτων του κεφαλαίου, ενώ στο τέλος του εγχειριδίου υπάρχουν υποδείξεις για όλες τις ασκήσεις.

Το σύμβολο □ χρησιμοποιείται για να δηλωθεί το τέλος απόδειξης, παραδείγματος, παρατήρησης κτλ.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους συντέλεσαν στη διαμόρφωση και παρουσίαση του υλικού που περιέχεται στο παρόν εγχειρίδιο. Ειδικότερα, εκφράζω τις ευχαριστίες μου στον Κριτικό Αναγνώστη Δρ. Κ. Πολίτη, τον Ακαδημαϊκό Υπεύθυνο Καθηγητή Σ. Κάτσικα και τα μέλη της Ο.Ε.Ε., οι προτάσεις και διορθώσεις των οποίων βελτίωσαν σε μεγάλο βαθμό το αρχικό κείμενο. Επίσης, ευχαριστώ το συνάδελφο Δρ. Χ. Κορνάρο για τις σημαντικές προτάσεις και επισημάνσεις του. Υπεύθυνος για τις παραλείψεις και αβλεψίες που υπάρχουν παραμένει, όπως πάντα, ο συγγραφέας.

Κ. Δημητρακόπουλος

Ιούνιος 2000

Εισαγωγή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Στόχος

Αρχικός μας στόχος στο κεφάλαιο αυτό είναι να αναφερθούμε στο αντικείμενο της (Μαθηματικής) Λογικής και στην ανάγκη χρήσης συμβολικών γλωσσών στα πλαίσιά της. Στη συνέχεια θα κάνουμε μια πολύ σύντομη ιστορική αναφορά στις σημαντικές φυσιογνωμίες της επιστήμης αυτής, αρχίζοντας από την αρχαιότητα και φτάνοντας στον αιώνα μας. Τέλος, θα αναφερθούμε στη διάκριση μεταξύ φυσικών και τυπικών γλωσσών, καθώς και στη διάκριση μεταξύ των δύο όψεων μιας γλώσσας, δηλαδή της συντακτικής και της σημασιολογικής.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει αυτό το κεφάλαιο, θα μπορείτε να:

- *αναφέρετε το κύριο χαρακτηριστικό μιας απόδειξης,*
- *δίνετε παραδείγματα έγκυρων και άκυρων επιχειρημάτων,*
- *αναφέρετε επιστήμονες που θεμελίωσαν τη Μαθηματική Λογική, καθώς και επιστήμονες που την προώθησαν σημαντικά στον εικοστό αιώνα,*
- *αναφέρετε τις τυπικές γλώσσες, που θα εισαχθούν και θα μελετηθούν στη συνέχεια.*

Έννοιες-κλειδιά

- *απόδειξη,*
- *τυπική γλώσσα,*
- *αλγεβρική σχολή Λογικής,*
- *λογικιστική σχολή Λογικής,*
- *φορμαλιστική σχολή Λογικής.*
- *γλώσσα-αντικείμενο,*
- *μετα-γλώσσα,*
- *σημασιολογία,*
- *συντακτικό,*

1.1 Γενικά

Ας αρχίσουμε προσπαθώντας να περιγράψουμε τι είναι η Λογική. Συχνά λέγεται ότι «η Λογική μελετά τους νόμους της σκέψης», αυτό όμως είναι παραπλανητικό. Η μελέτη των νόμων της σκέψης είναι αντικείμενο της Ψυχολογίας, ενώ η Λογική ενδιαφέρεται μόνο για τις σκέψεις εκείνες που αποτελούν «αποδείξεις» ή «επιχειρήματα» ή «συλλογισμούς». Σε μια απόδειξη δε μας ενδιαφέρει το περιεχόμενο, αλλά το γεγονός ότι το συμπέρασμα έπεται αναγκαία από τις υποθέσεις. Για να δούμε τι εννοούμε με αυτό, ας ρίξουμε μια ματιά στις ακόλουθες αποδείξεις:

(1) Κάθε άνθρωπος είναι θνητός.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός.

(2) Κάθε άλογο είναι ασπόνδυλο ζώο.
Ο Ντορής είναι άλογο.
Άρα ο Ντορής είναι ασπόνδυλο ζώο.

Παρατηρούμε ότι και οι δύο έχουν την ίδια μορφή:

Κάθε Α είναι Β.
Ο Γ είναι Α.
Άρα ο Γ είναι Β.

Στην πρώτη απόδειξη και οι τρεις προτάσεις είναι αληθείς, ενώ στη δεύτερη απόδειξη η πρώτη και η τρίτη πρόταση είναι ψευδής και η δεύτερη πρόταση είναι αληθής (ο χαρακτηρισμός καθεμιάς από τις προτάσεις ως «αληθής» ή «ψευδής» γίνεται με βάση προηγούμενες γνώσεις μας). Αυτό που πρέπει να ισχύει για μια απόδειξη είναι το εξής: Αν οι υποθέσεις είναι αληθείς, τότε και το συμπέρασμα είναι κατ' ανάγκην αληθές. Η Μαθηματική Λογική, που θα μας απασχολήσει εδώ, μελετά επιχειρήματα με μαθηματικές μεθόδους.

Από ό,τι ξέρουμε, ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος άνθρωπος που ασχολήθηκε συστηματικά με τη Λογική και διατύπωσε αποδεικτικούς κανόνες, που χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης. Σοβαρές λογικές μελέτες, σε κατεύθυνση διαφορετική από αυτή του Αριστοτέλη και των μαθητών του, πραγματοποίησαν μέλη της Στωϊκής φιλοσοφικής σχολής, ιδιαίτερα ο Χρύσιππος. Για πολλούς αιώνες οι φιλόσοφοι ασχολήθηκαν ουσιαστικά μόνο με την Αριστοτελική Λογική, η οποία θεωρείτο ως αντίπαλη της Στωϊκής Λογικής – μετά την Αναγέννηση έγινε σαφές ότι επρόκειτο για συμπληρωματικές και όχι για αλληλοσυγκρουόμενες θεωρίες.

Ήδη από την αρχαιότητα φάνηκε ότι η χρήση φυσικών γλωσσών, παραδείγματος χάρη της ελληνικής, δημιουργούσε προβλήματα στις λογικές μελέτες. Ας δούμε ένα παράδειγμα που προέρχεται από τον πλατωνικό διάλογο *Ευθύδημος*:

(1) Αυτό είναι άλογο.
Αυτό είναι λευκό.
Άρα αυτό είναι λευκό άλογο.

(2) Αυτός ο σκύλος είναι πατέρας.
Αυτός ο σκύλος είναι δικός σου.
Άρα αυτός ο σκύλος είναι δικός σου πατέρας.

Οι προτάσεις της ομάδας (1) προφανώς αποτελούν ένα έγκυρο επιχείρημα, ενώ αυτές της (2) δεν αποτελούν, παρ' όλο που εκ πρώτης όψεως έχουν την ίδια γλωσσική δομή με εκείνες της (1).

Έγινε, λοιπόν, σαφές ότι ήταν σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν «συμβολικές» ή «τυπικές» γλώσσες στη Λογική. Μέχρι το Μεσαίωνα η χρήση συμβόλων ήταν πολύ περιορισμένη – κάποια σύμβολα χρησιμοποιούνταν ως συντομογραφίες. Η χρήση συμβόλων στα Μαθηματικά, η οποία είχε συμβάλει στην ανάπτυξή τους, οδήγησε στην εισαγωγή συμβόλων και για τη μελέτη λογικών θεμάτων. Διαπιστώθηκε ότι με τη χρήση συμβόλων θα μπορούσε να αυξηθεί όχι μόνο η ακρίβεια στη διατύπωση επιχειρημάτων, με αποτέλεσμα να αποφεύγονται προβλήματα, όπως το προηγούμενο, αλλά και η γενικότητα εφαρμογής μεθόδων και κανόνων.

Ο G. Leibniz (1646-1716) ήταν ο πρώτος που συνειδητοποίησε τη σπουδαιότητα εισαγωγής ενός καλού τρόπου συμβολισμού στα πλαίσια της ανάπτυξης ενός λογισμού επιχειρημάτων. Επίσης, ο B. Bolzano (1781-1848) χρησιμοποίησε μια ημιτυπική γλώσσα, δηλαδή τη γερμανική εμπλουτισμένη με διάφορα είδη σταθερών και μεταβλητών, για να μελετήσει βασικές έννοιες της Λογικής, όπως την έννοια της λογικής συνεπαγωγής. Ως θεμελιωτές της «Συμβολικής» ή «Τυπικής» ή «Μαθηματικής» Λογικής θεωρούνται οι A. De Morgan (1806-1871) και G. Boole (1815-1864) – το 1847 δημοσιεύθηκε το έργο *Formal Logic* του πρώτου και το έργο *Mathematical Analysis of Logic* του δεύτερου, με τα οποία θεωρούμε ότι γεννήθηκε η νεότερη Λογική.

Στο τέλος του 19ου αιώνα διαμορφώθηκαν τρεις επικαλυπτόμενες σχολές Λογικής, η «αλγεβρική», η «λογικιστική» και η «φορμαλιστική». Στην εκπληκτική άνθησή τους, η οποία διήρκεσε και στον εικοστό αιώνα, συνετέλεσαν η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών και των παραδόξων στη Θεωρία Συνόλων, την οποία ανέπτυξε σημαντικά ο G. Cantor (1845-1918).

Κυριότεροι εκπρόσωποι της αλγεβρικής σχολής ήταν οι G. Boole, J. Venn (1834-1923), C. Peirce (1839-1914) και E. Schroeder (1841-1902). Η σχολή αυτή επικέντρωσε το ενδιαφέρον της στη μελέτη της σχέσης που υπάρχει μεταξύ αριθμητικών πράξεων, όπως η πρόσθεση και ο πολ/σμός, και λογικών πράξεων. Κύριος στόχος ήταν η ανάπτυξη λογισμών με εφαρμογή σε διάφορες περιπτώσεις, όπως προτάσεις, σύνολα και πιθανότητες. Αρχίζοντας με ένα ή περισσότερα αλγεβρικά συστήματα, οι αλγεβριστές διατύπωναν ένα σύνολο αξιωμάτων, τα οποία αλήθευαν σε καθένα από τα συστήματα αυτά. Το σύστημα που ανέπτυξε ο Boole ήταν ουσιαστικά αυτό που σήμερα καλούμε «άλγεβρα Boole».

Τα μέλη της λογικιστικής σχολής πίστευαν ότι η Λογική αποτελεί τη βάση για κάθε είδος ακριβούς επιχειρηματολογίας. Κύριοι εκπρόσωποί της ήταν οι G. Frege (1848-1925), ίσως ο μεγαλύτερος λογικός μετά τον Αριστοτέλη, και ο B. Russell (1872-1970). Ο Frege ανέπτυξε με μαθηματική αυστηρότητα μια πλούσια τυπική γλώσσα στο έργο του *Begriffsschrift* και προσπάθησε να δείξει ότι διάφορα μέρη των Μαθηματικών, όπως η Θεωρία Αριθμών, ήταν στην πραγματικότητα μέρη της Λογικής. Δυστυχώς, το σύστημά του ήταν προβληματικό, όπως έδειξε ο Russell με το περίφημο παράδοξό του, και έπρεπε να τροποποιηθεί. Σε μια προσπάθεια να βελτιώσουν την κατάσταση, οι Russell και A. Whitehead (1861-1947) ανέπτυξαν τη «θεωρία των τύπων» στο έργο τους *Principia Mathematica*.

Η φορμαλιστική σχολή είχε ως σημαντικότερους εκπροσώπους της τον R. Dedekind (1831-1916), τον G. Peano (1858-1932) και τον D. Hilbert (1862-1943). Σκοπός των ερευνών της σχολής αυτής ήταν η κατασκευή αξιωματικών συστημάτων για επί μέρους κλάδους των Μαθηματικών, παραδείγματος χάρη τη Γεωμετρία, τη Θεωρία Αριθμών κτλ. Η βασική κατεύθυνση ήταν η ίδια με αυτή που είχε ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία*, με έμφαση όμως στην επακριβή διατύπωση των λογικών κανόνων, που επιτρέπεται να χρησιμοποιούνται. Ο Hilbert υπήρξε εμπνευστής του λεγόμενου «προγράμματος του Hilbert», στόχος του οποίου ήταν η τυποποίηση των Μαθηματικών και η απόδειξη ότι οι συνήθεις αποδεικτικές μέθοδοι δεν είναι δυνατό να οδηγήσουν σε αντιφάσεις.

Άλλοι σημαντικοί λογικοί στον αιώνα μας ήταν οι L. Loewenheim (1878-1957), T. Skolem (1887-1963), A. Tarski (1901-1983), A. Church (1903-1995) και K. Goedel (1906-1978). Ειδικά ο Goedel θεωρείται ως ο κορυφαίος θεωρητικός της Λογικής του 20ου αιώνα, αφού απέδειξε δύο από τα θεμελιωδέστερα θεωρήματα, δηλαδή το «θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού» και το «θεώρημα μη πληρότητας της τυπικής αριθμητικής».

Τεχνικές και εργαλεία της Μαθηματικής Λογικής έχουν χρησιμοποιηθεί και χρησιμοποιούνται ακόμη, όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και στην Πληροφορική, τη Φιλοσοφία και τη Γλωσσολογία.

Οι τυπικές γλώσσες που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα είναι οι εξής: η «γλώσσα της προτασιακής λογικής» και οι «πρωτοβάθμιες γλώσσες». Στη γλώσσα της προτασιακής λογικής οδηγούμαστε, κάνοντας μια χοντροκομμένη αφαίρεση σε μια φυσική γλώσσα, ενώ στις πρωτοβάθμιες γλώσσες, κάνοντας μια λεπτότερη επέμβαση στη γλώσσα που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά, δηλαδή σε μια φυσική γλώσσα μαζί με μερικά άλλα σύμβολα. Μιλώντας για τυπικές γλώσσες, χρησιμοποιούμε φυσικές γλώσσες. Στη μελέτη μας, λοιπόν, πρέπει να κάνουμε διάκριση ανάμεσα στη «γλώσσα-αντικείμενο», που είναι η τυπική γλώσσα που μελετάμε, και στη «μετα-γλώσσα», που είναι η φυσική γλώσσα που μεταχειριζόμαστε στη μελέτη μας. Για μας μετα-γλώσσα είναι η ελληνική μαζί με μερικά σύμβολα και γλώσσα-αντικείμενο μια από τις τυπικές γλώσσες, που αναφέραμε προηγουμένως, ο δε τρόπος εργασίας είναι αυτός που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά – αυτός είναι και ένας λόγος για τον οποίο η Λογική που μας ενδιαφέρει καλείται «Μαθηματική».

Μια φυσική γλώσσα έχει δυο πλευρές:

α) τη «συντακτική», δηλ. ένα σύνολο κανόνων που περιγράφουν ποιοι είναι οι επιτρεπτοί τρόποι για την κατασκευή προτάσεων, χωρίς την παραμικρή αναφορά σε ερμηνείες των προτάσεων, και

β) τη «σημασιολογική» ή «σημαντική», δηλ. την απόδοση νοήματος στις προτάσεις και στη συνέχεια την απόδοση τιμής αλήθειας («αληθής» ή «ψευδής») στις προτάσεις.

Το ίδιο συμβαίνει και με τις τυπικές γλώσσες. Η βασική διαφορά είναι ότι με μια τέτοια γλώσσα αποφεύγουμε τις ασάφειες μιας φυσικής γλώσσας, ορίζοντας (στη μετα-γλώσσα!) αυστηρά τις συντακτικές και σημασιολογικές έννοιες.

Μερικά από τα σύμβολα των τυπικών γλωσσών είναι «μεταβλητές», που παίρνουν τιμές σε κάποιο σύνολο προτάσεων, αριθμών κτλ. Στη μετα-γλώσσα χρειαζόμαστε κάτι παρόμοιο και γι' αυτό χρησιμοποιούμε «συντακτικές μεταβλητές», που παίρνουν τιμές σε κάποιο σύνολο (συνδυασμών) συμβόλων της γλώσσας-αντικείμενο.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.1

Αντιστοιχίστε κάθε έργο με το συγγραφέα ή τους συγγραφείς του:

G. Boole	*Principia Mathematica*
G. Frege	*Mathematical Analysis of Logic*
B. Russell	*Begriffschrift*
A. Whitehead	*Formal Logic*

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 1.2

Τι είναι σωστό και τι λάθος από τα παρακάτω;

	Σ	Λ
Ένα επιχείρημα είναι έγκυρο, όταν και οι υποθέσεις και το συμπέρασμά του είναι αληθή.		
Στην αρχαιότητα δεν ασχολήθηκε κανείς με τη Λογική.		
Ο πρώτος επιστήμονας που συνειδητοποίησε τη σπουδαιότητα χρήσης συμβολισμού στη Λογική ήταν ο Leibniz.		
Ο G. Boole μελέτησε την αναλογία μεταξύ λογικών και αριθμητικών πράξεων.		
Ο B. Russell έδειξε ότι το σύστημα που κατασκεύασε ο G. Frege ήταν αντιφατικό.		
Ο στόχος του προγράμματος του Hilbert ήταν να δείξει ότι το σύστημα του Frege δεν ήταν αντιφατικό.		

Το συντακτικό μιας γλώσσας αφορά την απόδοση τιμών αλήθειας στις προτάσεις της.		
Ο A. Tarski θεωρείται ως ο κορυφαίος λογικός του εικοστού αιώνα.		

Δραστηριότητα 1.1

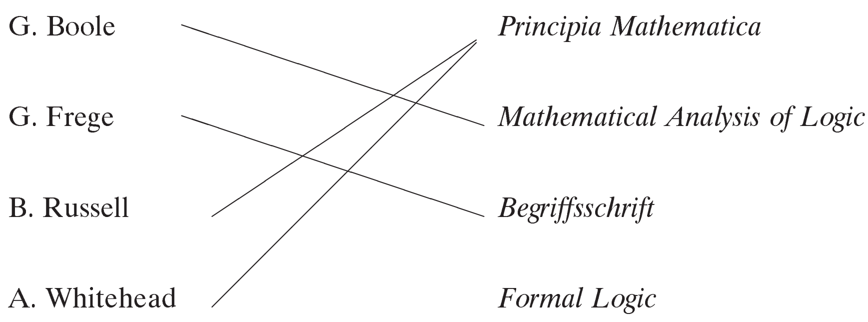
Διαβάστε το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου της Λογικής για το Λύκειο.

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό αναφερθήκαμε στο αντικείμενο της Λογικής, καθώς και στους σημαντικότερους επιστήμονες που ασχολήθηκαν με αυτήν, από την αρχαιότητα μέχρι τον αιώνα μας. Αφού εξηγήσαμε γιατί είναι αναγκαία η χρήση συμβολικών γλωσσών, είδαμε ποιοι επιστήμονες εισήγαγαν τέτοιες γλώσσες στη Λογική. Στη συνέχεια, αναφέραμε τους στόχους των τριών σχολών νεότερης Λογικής, καθώς και τους σημαντικότερους εκπροσώπους τους. Τέλος, συζητήσαμε τη διαφορά ανάμεσα σε μια τυπική και μια φυσική γλώσσα, καθώς και τις δύο όψεις, συντακτική και σημασιολογική, μιας γλώσσας.

Λύσεις Ασκήσεων Αυτοαξιολόγησης

Άσκηση 1.1.



Αν τα καταφέρατε να βρείτε όλες τις σωστές απαντήσεις, μπράβο σας. Αν όχι, δεν πειράζει, ο σκοπός της άσκησης δεν είναι να απομνημονεύσετε τίτλους και συγγραφείς, αλλά να αποκτήσετε κάποια αίσθηση για επιστήμονες και συγγράμματα, που αποτέλεσαν σταθμούς στην ανάπτυξη της Λογικής το 19ο αιώνα.

Άσκηση 1.2.

	Σ	Λ
΄Ενα επιχείρημα είναι έγκυρο, όταν και οι υποθέσεις και το συμπέρασμά του είναι αληθή.		√
Στην αρχαιότητα δεν ασχολήθηκε κανείς με τη Λογική.		√
Ο πρώτος επιστήμονας που συνειδητοποίησε τη σπουδαιότητα χρήσης συμβολισμού στη Λογική ήταν ο Leibniz.	√	
Ο G. Boole μελέτησε την αναλογία μεταξύ λογικών και αριθμητικών πράξεων.	√	
Ο B. Russell έδειξε ότι το σύστημα που κατασκεύασε ο G. Frege ήταν αντιφατικό.	√	
Ο στόχος του προγράμματος του Hilbert ήταν να δείξει ότι το σύστημα του Frege δεν ήταν αντιφατικό.		√
Το συντακτικό μιας γλώσσας αφορά την απόδοση τιμών αλήθειας στις προτάσεις της.		√
Ο A. Tarski θεωρείται ως ο κορυφαίος λογικός του εικοστού αιώνα.		√

Η άσκηση αυτή είναι δυσκολότερη από την πρώτη, μην απογοητευτείτε, λοιπόν, αν δεν βρήκατε όλες τις σωστές απαντήσεις. Ο σκοπός είναι, όπως και στην προηγούμενη, να σας εξοικειώσει με ονόματα και έννοιες μεγάλης σπουδαιότητας για τη Λογική. Ακολουθούν σχόλια για καθεμία από τις οκτώ ερωτήσεις:

1) Όχι, η εγκυρότητα ισχύει, όταν η αλήθεια του συμπεράσματος έπεται αναγκαία από την αλήθεια των υποθέσεων. Αν απαντήσατε σωστά, έχετε κατανοήσει ένα βασικό ορισμό. Αν όχι, δεν πειράζει, προσέξτε, όμως, αυτό είναι ένα βασικό σημείο – αν η έννοια της εγκυρότητας οριζόταν, όπως νομίζατε, τότε από οποιεσδήποτε αληθείς προτάσεις θα συμπεραίναμε λογικά οποιαδήποτε αληθή πρόταση, πράγμα που δεν ισχύει.

2) Ασχολήθηκαν, και μάλιστα σοβαρά, ο Αριστοτέλης και οι μαθητές του, καθώς και πολλά μέλη της Στωϊκής Σχολής, με επιφανέστερο το Χρύσιππο. Η ερώτηση αυτή έχει σκοπό να τονίσει τη σπουδαιότητα των δύο σχολών Λογικής στην αρχαιότητα, δηλαδή της Περιπατητικής και της Στωϊκής.

3) Πράγματι, ο Leibniz προσπάθησε να κατασκευάσει μια αυστηρή καθολική γλώσσα (*characteristica universalis*), με βάση την οποία κάθε επιστημονική και φιλοσοφική επιχειρηματολογία θα αναγόταν σε υπολογισμούς. Πρέπει να σημειωθεί ότι και πριν από το Leibniz έγινε χρήση συμβόλων στη Λογική. Παραδείγματος χάρη, ο Αριστοτέλης χρησιμοποίησε κεφαλαία γράμματα, για να συμβολίσει γενικούς όρους στα πλαίσια της θεωρίας συλλογισμών που ανέπτυξε. Όμως, ο Leibniz ήταν ο πρώτος που εισηγήθηκε καθολική χρήση συμβόλων.

4) Μάλλον θα σας είναι γνωστή η έννοια της «άλγεβρας Boole», κλασικό παράδειγμα της οποίας προκύπτει, αν πάρουμε το δυναμοσύνολο ενός τυχόντος συνόλου X (δηλαδή το σύνολο των υποσυνόλων του X) και τις συνήθεις πράξεις της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος στο σύνολο αυτό. Ο Boole διαπίστωσε ότι οι ίδιες ιδιότητες διέπουν τις συνολοθεωρητικές πράξεις, τις αριθμητικές πράξεις και τις λογικές πράξεις (που αντιπροσωπεύουν οι λογικοί σύνδεσμοι).

5) Ο Russell ανακάλυψε ένα παράδοξο στο σύστημα του Frege. Συγκεκριμένα, ο Russell έδειξε ότι, αν δεχθούμε ότι κάθε ιδιότητα ορίζει ένα σύνολο,

γεγονός που είχε αποδεχθεί ο Frege, τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι κάποιο σύνολο ανήκει και, ταυτόχρονα, δεν ανήκει στον εαυτό του. Αυτό όμως αντικρούει μια βασική αρχή της Λογικής, την *αρχή της αντίφασης*. Παρόμοια παράδοξα ανακάλυψαν ο G. Cantor και άλλοι.

6) Ο στόχος ήταν να δειχθεί ότι οι συνήθεις αποδεικτικές μέθοδοι δεν οδηγούν σε αντιφάσεις. Το πρόγραμμα του Hilbert ονομάστηκε «περατοκρατικό» (finitist), επειδή οι συνήθεις μέθοδοι απόδειξης αφορούν πεπερασμένα αντικείμενα, όπως πεπερασμένες ακολουθίες προτάσεων. Ο Hilbert πίστευε ότι τέτοιες μέθοδοι είναι ασφαλείς και το πρόγραμμά του είχε ως στόχο να αποκαταστήσει την εμπιστοσύνη στις καθιερωμένες αποδεικτικές μεθόδους, η οποία είχε κλονιστεί σοβαρά με την ανακάλυψη των παραδόξων.

7) Το συντακτικό αφορά στους καθαρά μηχανικούς κανόνες, που διέπουν την κατασκευή προτάσεων της γλώσσας, δηλαδή τη θέση του υποκειμένου σε σχέση με εκείνη του ρήματος κτλ. Από την άλλη πλευρά, η σημασιολογία αφορά στο νόημα των προτάσεων.

8) Τη θέση αυτή κατέχει ο K. Goedel, ο οποίος απέδειξε δυο σημαντικότατα θεωρήματα, την απόδειξη ενός από τα οποία θα σκιαγραφήσουμε αργότερα. Τα αποτελέσματα του Goedel αποτελούν πραγματικά ορόσημα και είναι, ιδιαίτερα το δεύτερο, θεμελιώδους σπουδαιότητας για τη Λογική, τα Μαθηματικά και τη Φιλοσοφία.

Βιβλιογραφία

[1] Λήμμα «History of Logic» στο T. Honderich (ed.): *The Oxford Companion to Philosophy*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.

[2] Λήμμα «History of Logic» στο P. Edwards (ed.): *The Encyclopedia of Philosophy*, MacMillan Publ. Co., New York, 1967.

[3] I. M. Bochenski: *A History of Formal Logic*, tr. and ed. Ivo Thomas, Chelsea Publ. Co., New York, 1961.

[4] W. Kneale and M. Kneale: *The Development of Logic*, Clarendon Press, Oxford, 1984.

Προτασιακή Λογική

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στόχος

Στο κεφάλαιο αυτό στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε, χρησιμοποιώντας μια τυπική γλώσσα, δύο τρόπους ελέγχου της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος, επιτρέποντας την ανάλυση των προτάσεων μόνο με βάση τις εμφανίσεις συνδετικών λέξεων, όπως οι «και», «ή» κτλ. Κατ' αρχήν θα αναλύσουμε τη σημασιολογική προσέγγιση, δηλαδή τον τρόπο ελέγχου με βάση τις δυνατές αντιστοιχίσεις τιμών αλήθειας στις προτάσεις του επιχειρήματος. Επίσης, θα μελετήσουμε το ερώτημα πόσα και ποια από τα σύμβολα που αντιστοιχούν σε συνδετικές λέξεις αρκούν για την ανάπτυξη της προτασιακής λογικής. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με τη συντακτική προσέγγιση, δηλαδή το μηχανικό τρόπο ελέγχου ενός επιχειρήματος, με βάση κάποιες αρχικές προτάσεις-αξιώματα και κάποιους κανόνες παραγωγής. Τέλος, θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη ότι οι δύο ανωτέρω τρόποι ελέγχου είναι ισοδύναμοι και θα αναφερθούμε σε μια σημαντική συνέπεια του γεγονότος αυτού.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει το κεφάλαιο αυτό, θα μπορείτε να:

- *διακρίνετε μεταξύ ακολουθιών συμβόλων που αποτελούν προτασιακούς τύπους,*
- *εφαρμόζετε την αρχή της επαγωγής, για να δείξετε ότι κάθε προτασιακός τύπος έχει μια ιδιότητα,*
- *δίνετε παραδείγματα προτασιακών τύπων, ταυτολογιών, συνόλων προτασιακών συνδέσμων που είναι πλήρη και παραδείγματα τυπικών αποδείξεων,*
- *αναφέρετε νόμους της προτασιακής λογικής,*
- *ελέγχετε αν ένας προτασιακός τύπος είναι ή όχι ταυτολογία,*
- *διακρίνετε αν ένας προτασιακός τύπος είναι ή όχι αξίωμα του προτασιακού λογισμού,*
- *αποδεικνύετε ότι ένα σύνολο συνδέσμων είναι πλήρες,*
- *κατασκευάζετε αποδείξεις στον προτασιακό λογισμό,*
- *εφαρμόζετε βασικά θεωρήματα του προτασιακού λογισμού,*
- *ελέγχετε αν ένας προτασιακός τύπος είναι συνέπεια ενός πεπερασμένου συνόλου προτασιακών τύπων,*
- *κατασκευάζετε έναν τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή που είναι ισοδύναμος με ένα δεδομένο προτασιακό τύπο.*

Έννοιες-κλειδιά

- *προτασιακός τύπος,*
- *πίνακας αλήθειας,*
- *ταυτολογική συνεπαγωγή,*
- *ταυτολογία,*
- *συμπάγεια,*
- *συνάρτηση Boole,*
- *πλήρες σύνολο συνδέσμων,*
- *modus ponens,*
- *συνέπεια,*
- *πληρότητα.*
- *δενδροδιάγραμμα,*
- *αποτίμηση,*
- *ικανοποιήσιμο σύνολο,*
- *αντίφαση,*
- *νόμοι προτασιακής λογικής,*
- *κανονική διαζευκτική μορφή,*
- *αξιωματικό σύστημα,*
- *τυπική απόδειξη,*
- *εγκυρότητα,*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Οι πρώτες μελέτες της λογικής προτάσεων έγιναν στην αρχαιότητα, στα πλαίσια της Στωϊκής σχολής. Σημείο εκκίνησης της λογικής αυτής αποτελεί η παραδοχή ότι η εγκυρότητα ενός επιχειρήματος εξαρτάται μόνον από τις εμφανίσεις συνδετικών λέξεων στις προτάσεις, που εμπλέκονται στο επιχείρημα. Παραδείγματος χάρη, κάθε επιχείρημα της μορφής

1. *Αν ....., τότε -.-.-.-.-. .*
2. *.....*
3. *-.-.-.-.-.*

είναι έγκυρο, δηλαδή από οποιεσδήποτε προτάσεις-υποθέσεις με μορφή όπως οι 1, 2 παραπάνω έπεται η πρόταση-συμπέρασμα 3. Το συγκεκριμένο επιχειρηματικό σχήμα είναι έγκυρο μόνον και μόνο λόγω του τρόπου που μεταχειριζόμαστε την έκφραση «αν ....., τότε -.-.-.-.-.».

Η προσέγγισή μας, λοιπόν, με χρήση τυπικής γλώσσας, είναι η εξής: Θα περιοριστούμε σε σύνθετες προτάσεις, που κατασκευάζονται από στοιχειώδεις προτάσεις, μέσω πέντε συγκεκριμένων συνδετικών εκφράσεων. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τρόπους, με βάση τους οποίους είναι δυνατό από σύνολα προτάσεων να μπορούμε να εξάγουμε προτάσεις με λογικά έγκυρο τρόπο. Ειδικότερα, θα μελετήσουμε τη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων με βάση
α) δυνατές ερμηνείες των προτάσεων, δηλαδή δυνατούς χαρακτηρισμούς τους μέσω των εννοιών της αλήθειας και του ψεύδους, και
β) συγκεκριμένους κανόνες παραγωγής προτάσεων από άλλες, δηλαδή διαδικασίες που μας οδηγούν από προτάσεις συγκεκριμένων μορφών σε νέες προτάσεις.
Είναι αξιοσημείωτο ότι οι δύο αυτές προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες, γεγονός που θα αναλύσουμε στο τέλος του κεφαλαίου.

2.1 Η Τυπική Προτασιακή Γλώσσα

Στόχος

Ο αρχικός μας στόχος είναι η εισαγωγή της τυπικής γλώσσα της προτασιακής λογικής και ο καθορισμός των επιτρεπτών τρόπων κατασκευής ακολουθιών από σύμβολα που αντιστοιχούν σε συνήθεις προτάσεις. Στη συνέχεια, θα δώσουμε πίνακες που καθορίζουν τη σημασιολογική συμπεριφορά των συνδέσμων, δηλαδή την αντιστοίχιση μιας τιμής αλήθειας σε μια σύνθετη πρόταση, όταν είναι γνωστές οι τιμές αλήθειας των στοιχειωδών συνιστωσών της.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει αυτή την ενότητα, θα μπορείτε να:

- *περιγράφετε πώς κατασκευάζεται ένας προτασιακός τύπος,*
- *επιλέγετε μεταξύ ακολουθιών συμβόλων αυτές που αποτελούν προτασιακούς τύπους,*
- *αποδεικνύετε ότι κάθε προτασιακός τύπος έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα,*
- *κατασκευάζετε το δενδροδιάγραμμα ενός προτασιακού τύπου,*
- *προσδιορίζετε την τιμή αλήθειας ενός προτασιακού τύπου, όταν γνωρίζετε τις τιμές αλήθειας των μεταβλητών του.*

Έννοιες-κλειδιά

- *έκφραση,*
- *δενδροδιάγραμμα,*
- *αποτίμηση.*
- *προτασιακός τύπος,*
- *πίνακας αλήθειας,*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε μια τυπική γλώσσα, που έχει τρία είδη συμβόλων: μεταβλητές, συνδετικά σύμβολα και σημεία στίξης. Οι μεταβλητές υποτίθεται ότι αντιπροσωπεύουν στοιχειώδεις δηλωτικές προτάσεις της ελληνικής γλώσσας, δηλαδή προτάσεις που είναι γραμματικά και συντακτικά ορθές, δεν περιέχουν συνδετικές εκφράσεις και επιδέχονται το χαρακτηρισμό «αληθείς» ή «ψευδείς». Παραδείγματος χάρη, οι «Σήμερα είναι Παρασκευή» και «Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί» είναι στοιχειώδεις προτάσεις, που συμβολίζονται με μεταβλητές. Τα συνδετικά σύμβολα αντιστοιχούν στις εξής συνδετικές εκφράσεις της ελληνικής γλώσσας: δεν, και, ή, αν ... τότε ..., ... αν και μόνον αν ... . Τέλος, ως σημεία στίξης, δηλαδή όπως το κόμμα και η τελεία στα ελληνικά, θα χρησιμοποιούνται παρενθέσεις. Με τα σύμβολα αυτά κατασκευάζονται εκφράσεις, που αντιστοιχούν σε σύνθετες προτάσεις της ελληνικής γλώσσας, παραδείγματος χάρη στην «Αν ο 5 είναι άρτιος αριθμός, τότε ο -2 είναι φυσικός αριθμός». Στα πλαίσια της κλασικής λογικής, με την οποία ασχολούμαστε εδώ, κάθε πρόταση μπορεί να έχει μόνο μια από τις δυο δυνατές τιμές αλήθειας. Επίσης, στην ενότητα αυτή θα δούμε πώς αντιστοιχούμε τιμή αλήθειας σε μια τυχούσα σύνθετη πρόταση, με βάση τη συμπεριφορά των συνδετικών συμβόλων και τις τιμές αλήθειας των στοιχειωδών συνιστωσών της. Ιδιαίτερα χρήσιμο για το σκοπό αυτό είναι το μοναδικό διάγραμμα που περιγράφει την κατασκευή της πρότασης από στοιχειώδεις προτάσεις.

Πρέπει να τονιστεί ότι η τυπική γλώσσα, που θα ορίσουμε, έχει περιορισμένες δυνατότητες να εκφράσει νοήματα της ελληνικής γλώσσας – όχι μόνο δεν είναι δυνατό να αντιπροσωπευθούν από σύμβολα όλες οι έννοιες των συνδετικών λέξεων που προαναφέρθηκαν, αλλά και ολόκληρες συνδετικές λέξεις. Ας δούμε δυο παραδείγματα:

α) Θεωρούμε την πρόταση «Πήγα στη βιβλιοθήκη και βρήκα το βιβλίο που έψαχνα». Η πρόταση αυτή δε θεωρούμε ότι έχει την ίδια σημασία με την πρόταση «Βρήκα το βιβλίο που έψαχνα και πήγα στη βιβλιοθήκη», αφού η λέξη «και» στο συγκεκριμένο πλαίσιο υπονοεί χρονική διαδοχή, όχι απλή παράθεση δύο προτάσεων. Αυτή την έννοια της λέξης «και» δεν είναι δυνατό να μεταφέρουμε στην τυπική γλώσσα.

β) Θεωρούμε την πρόταση «Πήγα στη βιβλιοθήκη, αλλά δε βρήκα το βιβλίο που έψαχνα». Η πρόταση αυτή δεν εκφράζει ακριβώς ό,τι η πρόταση «Πήγα στη βιβλιοθήκη και δε βρήκα το βιβλίο που έψαχνα», όμως τη συνδετική λέξη «αλλά» μπορούμε μόνο να την προσεγγίσουμε με το σύμβολο που χρησιμοποιούμε και για τη λέξη «και».

Παρ' όλες τις αδυναμίες της, η τυπική γλώσσα που θα εισαχθεί έχει αναμφισβήτητη χρησιμότητα. Με προβλήματα, όπως αυτά που προαναφέραμε, τα οποία έχουν μεγάλη σπουδαιότητα για τις εφαρμογές της Μαθηματικής Λογικής, ασχολείται η Φιλοσοφία της Λογικής (ή, σύμφωνα με κάποιους, η Φιλοσοφική Λογική).

Η γλώσσα της προτασιακής λογικής, που συμβολίζουμε με Γ_0, είναι φτωχή σε σύγκριση με μια φυσική γλώσσα: δεν έχει γράμματα με τα οποία φτιάχνονται λέξεις και στη συνέχεια προτάσεις, αλλά μόνο σύμβολα-προτάσεις, που με τη χρήση μερικών συνδετικών συμβόλων-λέξεων μας δίνουν νέες προτάσεις. Το σύνολο των συμβόλων της έχει τα εξής στοιχεία:

α) $p_0, p_1, p_2, ...$, που καλούνται «προτασιακές μεταβλητές»,

β) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, που καλούνται «σύνδεσμοι» – αντίστοιχα «άρνηση», «σύζευξη», «διάζευξη», «συνεπαγωγή», «ισοδυναμία»,

γ) (,), που καλούνται «παρενθέσεις» – αντίστοιχα «αριστερή παρένθεση» και «δεξιά παρένθεση».

Το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών θα συμβολίζουμε με $M(\Gamma_0)$ και θα χρησιμοποιούμε τα $p, q, r, ...$ ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $M(\Gamma_0)$ (δηλαδή ως μεταβλητές στη μεταγλώσσα).

Οι σύνδεσμοι και οι παρενθέσεις ονομάζονται «λογικά σύμβολα», γιατί, όπως θα δούμε, έχουν καθορισμένο νόημα, ενώ οι προτασιακές μεταβλητές ονομάζονται «μη λογικά σύμβολα», επειδή μπορούν να ερμηνευθούν με διάφορους τρόπους.

Έχοντας δει ποια είναι τα σύμβολα της Γ_0, ας στραφούμε στο συντακτικό μέρος.

Ορισμός 2.1. «Έκφραση» της Γ_0 είναι μια τυχούσα πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολά της, παραδείγματος χάρη $\rightarrow p_0 \vee \neg, \ (p_1 \rightarrow p_2$. □

Μια έκφραση της Γ_0 αντιστοιχεί σε μια έκφραση της ελληνικής γλώσσας, η οποία ίσως έχει κατασκευαστεί με τυχαία παράθεση στοιχειωδών προτάσεων και συνδετικών εκφράσεων. Η έκφραση $\rightarrow p_0 \vee \neg$, παραδείγματος χάρη, μπορεί να αντιστοιχεί στην «Αν τότε ο 5 είναι άρτιος ή δεν», η οποία δεν έχει νόημα.
Με $E(\Gamma_0)$ συμβολίζουμε το σύνολο των εκφράσεων της Γ_0, θα χρησιμοποιούμε δε τα γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $E(\Gamma_0)$.

Φυσικά, μερικές μόνον από τις εκφράσεις της Γ_0 θα παίξουν το ρόλο που παίζουν οι προτάσεις σε μια φυσική γλώσσα, αυτές που περιγράφονται από τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2. Μια έκφραση α καλείται «προτασιακός τύπος», ανν (δηλ. αν και μόνον αν)

α) είναι προτασιακή μεταβλητή ή

β) είναι της μορφής $(\neg\beta)$, $(\beta \wedge \gamma)$, $(\beta \vee \gamma)$, $(\beta \rightarrow \gamma)$, $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, όπου β, γ είναι ήδη κατασκευασμένοι προτασιακοί τύποι. □

Να μερικοί προτασιακοί τύποι: p_1, $(p_0 \wedge p_2)$, $(\neg p_1)$, $(p_3 \vee (p_5 \leftrightarrow p_0))$. Παραδείγματος χάρη, αν η προτασιακή μεταβλητή p_1 αντιπροσωπεύει την πρόταση «Ο 8 είναι περιττός αριθμός», τότε η $(\neg p_1)$ αντιπροσωπεύει την πρόταση «Ο 8 δεν είναι περιττός αριθμός». Επίσης, αν η προτασιακή μεταβλητή p_0 αντιπροσωπεύει την πρόταση «Ο 5 είναι άρτιος αριθμός» και η p_2 την πρόταση «Ο 1/3 είναι ακέραιος αριθμός», τότε ο προτασιακός τύπος $(p_0 \wedge p_2)$ αντιπροσωπεύει την πρόταση «Ο 5 είναι άρτιος αριθμός και ο 1/3 είναι ακέραιος αριθμός». (Η επιλογή συγκεκριμένης προτασιακής μεταβλητής, που αντιπροσωπεύει συγκεκριμένη πρόταση της ελληνικής γλώσσας, δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, όπως θα γίνει σαφές αργότερα.)

Η ιδέα είναι ότι, χρησιμοποιώντας πεπερασμένο πλήθος προτασιακών μεταβλητών και συνδέσμων (οι επαναλήψεις επιτρέπονται!), σύμφωνα με κάποιους κανόνες κατασκευάζουμε προτασιακούς τύπους με οσοδήποτε μεγάλη πολυπλοκότητα (δηλαδή με οσοδήποτε μεγάλο πλήθος εμφανίσεων συνδέσμων) θέλουμε. Οι παρενθέσεις παίζουν μεγάλο ρόλο, αφού καθορίζουν με μοναδικό τρόπο το νόημα κάθε προτασιακού τύπου – δες το Θεώρημα 2.3 στη συνέχεια.

Το σύνολο των προτασιακών τύπων της Γ_0 συμβολίζουμε με $T(\Gamma_0)$. Τα $\varphi, \psi, \chi, ...$ θα χρησιμοποιούμε ως συντακτικές μεταβλητές που παίρνουν τιμές στο $T(\Gamma_0)$. (προσοχή, άλλο το χ και άλλο το x!)

Παρατήρηση. Για ευκολία, πολλές φορές χρησιμοποιούμε [,] ή { , } αντί για (,). □

Η ύπαρξη του συνόλου των προτασιακών τύπων είναι διαισθητικά προφανής: Η ιδέα είναι ότι ξεκινάμε με τους προτασιακούς τύπους πολυπλοκότητας 0, δηλαδή τις προτασιακές μεταβλητές, και, για κάθε φυσικό αριθμό n, έχοντας κατασκευάσει προτασιακούς τύπους πολυπλοκότητας $\leq n$ μπορούμε να κατασκευάσουμε προτασιακούς τύπους πολυπλοκότητας $\leq n+1$. Για να αποδείξουμε με συνολοθεωρητικά επιχειρήματα ότι υπάρχει το σύνολο αυτό, χρειαζόμαστε το εξής βασικό αποτέλεσμα από τη Θεωρία Συνόλων:

Θεώρημα 2.1. (Θεώρημα Αναδρομής) Αν A τυχόν σύνολο, $a \in A$ και $g : A \to A$, τότε υπάρχει $f : \mathbf{N} \to A$ τέτοια που

$$\begin{aligned} & f(0) = a \\ \text{και} \quad & f(n+1) = g(f(n)) \text{ για κάθε } n \in \mathbf{N}. \ \square \end{aligned}$$

Στην περίπτωσή μας, θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P}(E(\Gamma_0))$ (δηλ. το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $E(\Gamma_0)$), το στοιχείο του $M(\Gamma_0)$ και τη συνάρτηση $h : \mathcal{P}(E(\Gamma_0)) \to \mathcal{P}(E(\Gamma_0))$, που ορίζεται ως

$$\begin{aligned} h(X) = \{\alpha : \alpha \text{ της μορφής } (\neg\beta), (\beta \wedge \gamma), (\beta \vee \gamma), (\beta \to \gamma), (\beta \leftrightarrow \gamma), \\ \text{όπου } \beta, \gamma \in X\}. \end{aligned}$$

Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbf{N} \to \mathcal{P}(E(\Gamma_0))$ τέτοια που

$$\begin{aligned} & f(0) = M(\Gamma_0) \\ \text{και} \quad & f(n+1) = f(n) \cup h(f(n)) \text{ για κάθε } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Οι προτασιακοί τύποι είναι, λοιπόν, τα στοιχεία των συνόλων $M(\Gamma_0)$, $h(M(\Gamma_0))$, $h(M(\Gamma_0) \cup h(M(\Gamma_0)))$, $\ldots$, δηλαδή τα στοιχεία του συνόλου $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} f(n)$.

Επειδή το $T(\Gamma_0)$ ορίστηκε «αναδρομικά», όταν θέλουμε να δείξουμε ότι όλοι οι προτασιακοί τύποι έχουν μια ιδιότητα, δουλεύουμε «επαγωγικά», όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα. Η κατάσταση είναι εντελώς ανάλογη με ό,τι συμβαίνει στους φυσικούς αριθμούς: Έστω ότι έχουμε ορίσει αναδρομικά μια ακολουθία αριθμών $a_0, a_1, \ldots$ Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι όλα τα στοιχεία της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ έχουν μια ιδιότητα, τότε χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής, δηλαδή δείχνουμε ότι ο a_0 έχει την ιδιότητα και ότι, για κάθε φυσικό n, αν ο a_n έχει την ιδιότητα, το ίδιο συμβαίνει και για τον a_{n+1}.

Θεώρημα 2.2. (Αρχή της Επαγωγής για το $T(\Gamma_0)$) Αν $A \subseteq T(\Gamma_0)$ τέτοιο που

α) $M(\Gamma_0) \subseteq A$ και

β) για κάθε $\varphi, \psi \in A$, οι $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ανήκουν στο A,

τότε $A = T(\Gamma_0)$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq T(\Gamma_0)$, για το οποίο ισχύουν τα α), β) ανωτέρω. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : T(\Gamma_0) \rightarrow \mathbf{N}$ που ορίζεται ως εξής:

$$f(\varphi) = \text{αριθμός εμφανίσεων συνδέσμων στο } \varphi, \text{ για τυχόντα } \varphi.$$

Θα δείξουμε ότι $A = T(\Gamma_0)$. Πράγματι, έστω ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του $T(\Gamma_0)$. Τότε, το $T(\Gamma_0) - A$ είναι μη κενό, οπότε το $f[T(\Gamma_0) - A]$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbf{N}$. Λόγω της αρχής του ελαχίστου φυσικού, λοιπόν, το $f[T(\Gamma_0) - A]$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το n. Από τον ορισμό της f, υπάρχει $\varphi \in T(\Gamma_0) - A$ τέτοιο που $f(\varphi) = n$. Λόγω της υπόθεσης α), ο φ δεν μπορεί να είναι προτασιακή μεταβλητή, άρα είναι της μορφής $(\neg\psi)$ ή $(\psi \wedge \chi)$ ή $(\psi \vee \chi)$ ή $(\psi \rightarrow \chi)$ ή $(\psi \leftrightarrow \chi)$. Έστω ότι αυτός είναι της μορφής $(\neg\psi)$. Τότε $f(\psi) = n-1$, οπότε $\psi \in A$ και άρα $(\neg\psi) \in A$ (με βάση το β)), δηλ. $\varphi \in A$, που είναι άτοπο. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι ο φ είναι της μορφής $(\psi \wedge \chi)$ κτλ. $\square$

Παράδειγμα 2.1. Θ' αποδείξουμε ότι κάθε προτασιακός τύπος περιέχει τον ίδιο αριθμό δεξιών και αριστερών παρενθέσεων. Έστω A το σύνολο των προτασιακών τύπων που έχουν αυτή την ιδιότητα. Προφανώς $M(\Gamma_0) \subseteq A$ (αφού κάθε προτασιακή μεταβλητή περιέχει 0 δεξιές και 0 αριστερές παρενθέσεις). Έστω τώρα ότι $\varphi, \psi \in A$. Ο $(\neg\varphi)$ έχει μια δεξιά και μια αριστερή παρένθεση παραπάνω από τον φ, άρα περιέχει κι αυτός τον ίδιο αριθμό δεξιών και αριστερών παρενθέσεων, οπότε $(\neg\varphi) \in A$. Όμοια βλέπουμε ότι $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in A$, οπότε $A = T(\Gamma_0)$, σύμφωνα με την αρχή της επαγωγής. □

Σημείωση. Όταν εφαρμόζουμε την αρχή της επαγωγής για το $T(\Gamma_0)$, συνήθως λέμε ότι «δουλεύουμε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ» και δείχνουμε ότι
α) κάθε προτασιακή μεταβλητή έχει την ιδιότητα και
β) αν οι προτασιακοί τύποι φ, ψ έχουν την ιδιότητα, τότε την έχουν και οι προτασιακοί τύποι $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
Για το β) συνήθως ελέγχουμε μόνο δυο περιπτώσεις, δηλαδή για το σύνδεσμο $\neg$ και ένα διθέσιο σύνδεσμο, παραδείγματος χάρη τον $\wedge$, αφού οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.1

Δείξτε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ ισχύει $m_\varphi = n_\varphi + 1$, όπου m_φ είναι ο αριθμός εμφανίσεων προτασιακών μεταβλητών και n_φ είναι ο αριθμός εμφανίσεων διθέσιων συνδέσμων στο φ (αν ένα σύμβολο εμφανίζεται πολλές φορές, τότε μετράμε ξεχωριστά κάθε εμφάνιση).

Ως συνέπεια του παραπάνω παραδείγματος αποδεικνύεται ότι ο τρόπος που χρησιμοποιούμε τις παρενθέσεις δεν οδηγεί σε ασάφειες, με την έννοια ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ υπάρχει μοναδική διαδικασία κατασκευής του φ από τις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται σ' αυτόν. Για να αποδείξουμε το γεγονός αυτό, θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.1. Για τυχόντα προτασιακό τύπο φ και κάθε έκφραση α, αν η α είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του φ, δηλαδή η α αρχίζει και συνεχίζει με τα ίδια σύμβολα που έχει ο φ, αλλά δεν περιλαμβάνει όλα τα σύμβολα του φ, τότε η α δεν είναι προτασιακός τύπος.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ.

Ελέγχουμε πρώτα ότι όλες οι προτασιακές μεταβλητές έχουν την ιδιότητα, πράγμα που ισχύει προφανώς, διότι η κενή έκφραση, που αποτελεί το μόνο γνήσιο αρχικό τμήμα μιας προτασιακής μεταβλητής, δεν είναι προτασιακός τύπος.

Έστω τώρα ότι ο φ έχει την ιδιότητα. Ισχύει άραγε ότι την έχει και ο $(\neg\varphi)$; Έστω α γνήσιο αρχικό τμήμα του $(\neg\varphi)$. Τότε το α είναι η έκφραση (ή η έκφραση $(\neg$ ή έκφραση της μορφής $(\neg\beta$, όπου β είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του φ, ή η έκφραση $(\neg\varphi$. Καμιά όμως από τις εκφράσεις αυτές δεν είναι προτασιακός τύπος, αφού δεν ικανοποιεί την ιδιότητα του Παραδείγματος 2.1 παραπάνω. Συνεπώς, ο $(\neg\varphi)$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.
Όμοια δείχνουμε ότι, αν οι φ, ψ έχουν την ιδιότητα, τότε οι $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$ κ.ο.κ. την έχουν επίσης. Το ζητούμενο έπεται. □

Θεώρημα 2.3. (Θεώρημα Μοναδικής Αναγνωσιμότητας) Έστω οι συναρτήσεις $G_\neg : T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$, $G_\wedge, G_\vee, G_\to, G_\leftrightarrow : T(\Gamma_0) \times T(\Gamma_0) \to T(\Gamma_0)$ που ορίζονται ως $G_\neg(\varphi) = (\neg\varphi)$, $G_\wedge(\varphi,\psi) = (\varphi \wedge \psi)$ και όμοια για τις $G_\vee$, $G_\to$, $G_\leftrightarrow$. Τότε

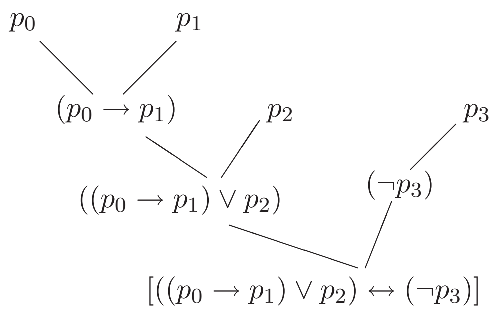
α) το σύνολο $M(\Gamma_0)$ και τα πεδία τιμών των $G_\neg$, $G_\wedge$ κτλ. είναι ξένα ανά δύο

β) οι $G_\neg$, $G_\wedge$ κτλ. είναι 1-1 συναρτήσεις.

Απόδειξη. α) Έστω, παραδείγματος χάρη, ότι για κάποιους προτασιακούς τύπους φ, ψ, χ ισχύει $G_\neg(\varphi) = G_\wedge(\psi,\chi)$, δηλαδή ότι ο $(\neg\varphi)$ ταυτίζεται με τον $(\psi \wedge \chi)$. Τότε, η ακολουθία συμβόλων $\neg\varphi)$ θα ταυτίζεται με την $\psi \wedge \chi)$, άρα το πρώτο σύμβολο του προτασιακού τύπου ψ πρέπει να είναι το $\neg$, πράγμα που είναι αδύνατο (ο ψ θα μπορούσε να είναι μόνο της μορφής $(\neg\psi_1)$). Άρα, τα πεδία τιμών των $G_\neg$, $G_\wedge$ έχουν κενή τομή.
β) Όμοια, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1. □

Όπως προαναφέραμε, το προηγούμενο θεώρημα εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του τρόπου κατασκευής κάθε προτασιακού τύπου από προτασιακές μεταβλητές μέσω των συναρτήσεων $G_\neg$, $G_\wedge$ κτλ. Μ' άλλα λόγια, σε κάθε προτασιακό τύπο αντιστοιχεί ένα μοναδικό «δενδροδιάγραμμα», δηλαδή ένα διάγραμμα που απεικονίζει την κατασκευή του από προτασιακές μεταβλητές με τη βοήθεια των συνδέσμων. Μάλιστα μπορούμε να δώσουμε ένα αλγόριθμο που, δεδομένου ενός προτασιακού τύπου, μας δίνει το μοναδικό δενδροδιάγραμμα που του αντιστοιχεί. Ο αλγόριθμος αυτός μας υποδεικνύει τη διαγραφή των εξωτερικών παρενθέσεων ενός τύπου και τη μετάβαση σε ένα υποτύπο του, αν ο αρχικός είχε ως κύριο σύνδεσμο τον $\neg$ ή δυο υποτύπους του, αν ο αρχικός είχε ως κύριο σύνδεσμο κάποιον από τους $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Η διαδικασία αποσύνθεσης ενός προτασιακού τύπου είναι αντίστροφη από τη διαδικασία κατασκευής του, δηλαδή προκύπτουν πρώτα τα μέρη που κατασκευάστηκαν τελευταία, μετά εκείνα που κατασκευάστηκαν προτελευταία κ.ο.κ., μέχρι να καταλήξουμε στις προτασιακές μεταβλητές, από τις οποίες κατασκευάστηκε ο προτασιακός τύπος. Τα δενδροδιαγράμματα θα μας φανούν χρήσιμα, όταν θα μιλήσουμε για τη σημασιολογική πλευρά της Γ_0.

Παράδειγμα 2.2. Στον προτασιακό τύπο $[((p_0 \rightarrow p_1) \vee p_2) \leftrightarrow (\neg p_3)]$ αντιστοιχεί το ακόλουθο δενδροδιάγραμμα:



Πράγματι, αν διαγράψουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις του προτασιακού τύπου, θα προκύψουν οι προτασιακοί τύποι $((p_0 \rightarrow p_1) \vee p_2)$ και $(\neg p_3)$, από τους οποίους κατασκευάστηκε με χρήση του $\leftrightarrow$. Συνεχίζοντας, ο $(\neg p_3)$ κατασκευάστηκε από τον p_3, που είναι προτασιακή μεταβλητή. Από την άλλη πλευρά, ο $((p_0 \rightarrow p_1) \vee p_2)$ αποσυντίθεται στους προτασιακούς τύπους $(p_0 \rightarrow p_1)$ και p_2 κ.ο.κ. $\square$

Συχνά, οι παρενθέσεις που περιέχει ένας προτασιακός τύπος είναι τόσο πολλές που δεν μπορούμε εύκολα να συλλάβουμε τη δομή του. Γι' αυτό παραλείπουμε παρενθέσεις, σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες, οι οποίοι εξασφαλίζουν ότι δεν θα οδηγηθούμε σε ασάφεια, από αυτή την παράλειψη:

α) Οι εξωτερικές παρενθέσεις ενός προτασιακού τύπου παραλείπονται.

β) Ο σύνδεσμος $\neg$ θεωρείται ισχυρότερος από τους υπόλοιπους συνδέσμους και οι $\wedge, \vee$ θεωρούνται ισχυρότεροι από τους $\rightarrow, \leftrightarrow$.

γ) Τα $\wedge, \vee$ θεωρούνται ισοδύναμα μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει για τα $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Παράδειγμα 2.3. Σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες, γράφοντας $p_0 \wedge p_1$ εννοούμε τον $(p_0 \wedge p_1)$, γράφοντας $\neg p_0 \vee p_1$ εννοούμε τον $((\neg p_0) \vee p_1)$ και γράφοντας $p_2 \wedge p_1 \rightarrow p_0 \vee p_4$ εννοούμε τον $(p_2 \wedge p_1) \rightarrow (p_0 \vee p_4)$. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.2

Ποιος είναι ο προτασιακός τύπος, ο οποίος, μετά από παράλειψη παρενθέσεων, γράφεται ως $p_1 \wedge p_0 \rightarrow (\neg p_2 \vee p_3 \leftrightarrow p_1)$; Βρείτε το δενδροδιάγραμμα αυτού του τύπου.

Ας δούμε τώρα τους κανόνες απόδοσης «τιμής αλήθειας» σε κάθε προτασιακό τύπο της Γ_0.

Ορισμός 2.3. «Αποτίμηση» (ή «εκτίμηση») καλείται μια συνάρτηση $a : M(\Gamma_0) \rightarrow \{A, \Psi\}$, όπου τα A, Ψ καλούνται «τιμές αλήθειας» και αντιστοιχούν στις έννοιες «αληθής», «ψευδής». □

Σημειώσεις.

α) Μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τα 1, 0 ή τα T, F αντί για τα Α, Ψ.

β) Από τον προηγούμενο ορισμό φαίνεται ότι περιοριζόμαστε σε δίτιμη λογική. Αντί για δύο, θα μπορούσαμε να πάρουμε 3, 4 ή άπειρες τιμές αλήθειας, αυτές όμως οι παραλλαγές δε θα μας απασχολήσουν καθόλου. Στην καλούμενη «Ασαφή» ή «Fuzzy» Λογική, οι τιμές αλήθειας είναι αριθμοί στο διάστημα [0,1], δηλαδή στο σύνολο των πραγματικών αριθμών x για τους οποίους ισχύει $0 \leq x \leq 1$. □

Όταν μας έχει δοθεί μια αποτίμηση a, είναι διαισθητικά προφανές ότι μπορούμε να αποδώσουμε μια τιμή αλήθειας σε κάθε προτασιακό τύπο, δηλαδή να ορίσουμε μια συνάρτηση $\overline{a} : T(\Gamma_0) \rightarrow \{A, \Psi\}$, σύμφωνα με τους κανόνες-«πίνακες αλήθειας» παρακάτω.

$\overline{a}(\varphi)$	$\overline{a}(\neg\varphi)$
A	Ψ
Ψ	A

$\overline{a}(\varphi)$	$\overline{a}(\psi)$	$\overline{a}(\varphi \wedge \psi)$	$\overline{a}(\varphi \vee \psi)$	$\overline{a}(\varphi \rightarrow \psi)$	$\overline{a}(\varphi \leftrightarrow \psi)$
A	A	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	A	A

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται για τη στήλη που αντιστοιχεί στην συνεπαγωγή, διότι ο τρόπος που χειριζόμαστε το σύνδεσμο «αν ..., τότε ... » στις φυσικές γλώσσες είναι τέτοιος που δεν είναι σαφές σε ποια τιμή αλήθειας οδηγεί, όταν η υπόθεση, δηλαδή η πρόταση μετά το «αν», είναι ψευδής.

Η αυστηρή απόδειξη ότι κάθε αποτίμηση a επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μια συνάρτηση $\overline{a}$ στο $T(\Gamma_0)$ στηρίζεται στο γεγονός ότι το σύνολο $T(\Gamma_0)$ ορίστηκε αναδρομικά από το $M(\Gamma_0)$ με τη βοήθεια της συνάρτησης h έτσι, ώστε να ισχύει η μοναδική αναγνωσιμότητα προτασιακών τύπων. Η απόδειξη μοιάζει μ' εκείνη του θεωρήματος αναδρομής για το $\mathbf{N}$ – επεκτείνουμε την a πρώτα στο σύνολο $h(M(\Gamma_0))$, κατόπιν στο $h(M(\Gamma_0) \cup h(M(\Gamma_0)))$ κ.ο.κ., παίρνοντας τη ζητούμενη συνάρτηση ως όριο αυτής της ακολουθίας συναρτήσεων. Δηλαδή, γνωρίζοντας τις τιμές αλήθειας των προτασιακών τύπων, μπορούμε να βρούμε τις τιμές αλήθειας των προτασιακών τύπων με πολυπλοκότητα 1, με πολυπλοκότητα 2 κτλ.

Θεώρημα 2.4. Έστω a τυχούσα αποτίμηση. Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\overline{a}$: $T(\Gamma_0) \rightarrow \{A, \Psi\}$ τέτοια που

1) η $\overline{a}$ είναι επέκταση της a και

2) για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ ισχύει

$$\begin{aligned}
&\overline{a}(\neg\varphi) = F_{\neg}(\overline{a}(\varphi)),\\
&\overline{a}(\varphi \wedge \psi) = F_{\wedge}(\overline{a}(\varphi), \overline{a}(\psi)),\\
&\overline{a}(\varphi \vee \psi) = F_{\vee}(\overline{a}(\varphi), \overline{a}(\psi)), \overline{a}(\varphi \leftrightarrow \psi) = F_{\rightarrow}(\overline{a}(\varphi), \overline{a}(\psi)),\\
&\overline{a}(\varphi \leftrightarrow \psi) = F_{\leftrightarrow}(\overline{a}(\varphi), \overline{a}(\psi)),
\end{aligned} \qquad (*)$$

όπου $F_\neg : \{A, \Psi\} \to \{A, \Psi\}$ και $F_\wedge, F_\vee, F_\to, F_\leftrightarrow : \{A, \Psi\}^2 \to \{A, \Psi\}$ οι συναρτήσεις που αντιστοιχούν στους προηγούμενους πίνακες αλήθειας.

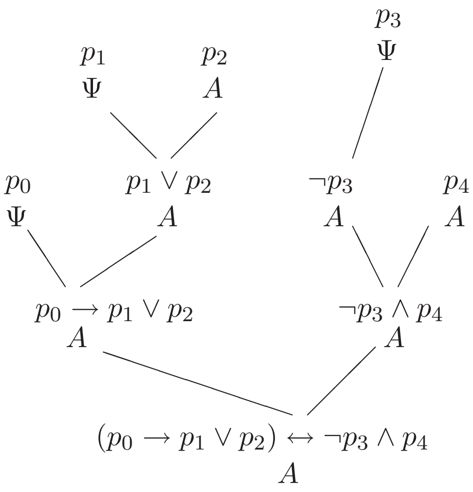
Απόδειξη. Καλούμε «αποδεκτή συνάρτηση» κάθε συνάρτηση $b : T \to \{A, \Psi\}$ τέτοια που $M(\Gamma_0) \subseteq T \subseteq T(\Gamma_0)$ και ισχύουν το 1) ανωτέρω και το

3) για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ, αν $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi, \varphi \leftrightarrow \psi \in T$, τότε οι προτασιακοί τύποι φ, ψ ανήκουν στο και ισχύουν οι προηγούμενες σχέσεις (*).

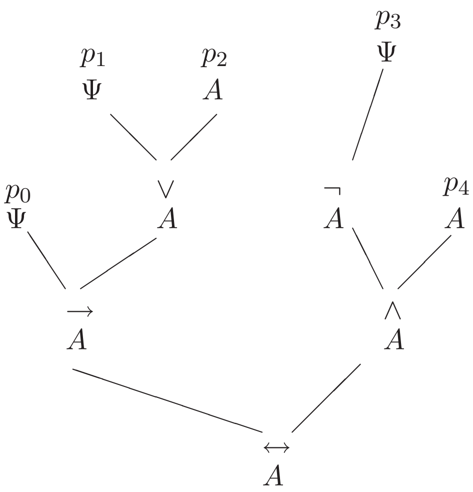
Υπάρχει τουλάχιστο μια τέτοια συνάρτηση, η a. Θεωρούμε τώρα το σύνολο όλων των αποδεκτών συναρτήσεων και θέτουμε $\overline{a} = \bigcup\{b : b \in A\}$. Με συνολοθεωρητικά επιχειρήματα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μοναδικής αναγνωσιμότητας, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σύνολο $\overline{a}$ είναι η μοναδική αποδεκτή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $T(\Gamma_0)$. □

Όταν έχουμε μια αποτίμηση a και έναν προτασιακό τύπο φ, για να βρούμε την $\overline{a}(\varphi)$, συνήθως χρησιμοποιούμε το δενδροδιάγραμμα του φ με τον εξής τρόπο: Γράφουμε κατ' αρχήν κάτω από κάθε προτασιακή μεταβλητή την τιμή αλήθειας, που της αντιστοιχεί η a. Στη συνέχεια, με βάση τους πίνακες αλήθειας των συνδέσμων, υπολογίζουμε τις τιμές αλήθειας των υποτύπων του φ όλο και μεγαλύτερης πολυπλοκότητας, μέχρι να φτάσουμε στον ίδιο το φ.

Παράδειγμα 2.4. Αν a αποτίμηση τέτοια που $a(p_2) = a(p_4) = A$ και $a(p_0) = a(p_1) = a(p_3) = \Psi$, βρίσκουμε την $\overline{a}((p_0 \to p_1 \vee p_2) \leftrightarrow \neg p_3 \wedge p_4)$ ως εξής:



Για ευκολία, γράφουμε μόνο τις προτασιακές μεταβλητές και τους συνδέσμους:



Για μεγαλύτερη ευκολία, συμπιέζουμε το δενδροδιάγραμμα, κάνοντάς το μια μόνο γραμμή:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
(& p_0 & \to & p_1 & \vee & p_2 &) & \leftrightarrow & \neg & p_3 & \wedge & p_4 \\
 & \Psi & A & \Psi & A & A & & A & A & \Psi & A & A
\end{array}$$

□

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.3

Θεωρούμε τον προτασιακό τύπο $p_1 \wedge p_0 \rightarrow \neg p_2 \vee (p_3 \leftrightarrow p_1)$ και την αποτίμηση a τέτοια που $a(p_1) = a(p_3) = A$, $a(p_0) = a(p_2) = \Psi$. Βρείτε την τιμή αλήθειας, που η a αντιστοιχεί στον προτασιακό τύπο αυτό.

Διαισθητικά, είναι προφανές ότι η τιμή που δίνει μια αποτίμηση a στον τυχόντα προτασιακό τύπο φ εξαρτάται μόνο από τις τιμές αλήθειας που η a αντιστοιχεί στις πεπερασμένες το πλήθος προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στο φ. Αυστηρή απόδειξη για το γεγονός αυτό μπορεί να δοθεί με χρήση της αρχής της επαγωγής.

Δραστηριότητα 2.1

Αποδείξτε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ και αποτιμήσεις a_1, a_2, αν οι a_1, a_2 συμφωνούν στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στο φ, τότε $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)$.

Αρκετά, όμως, είπαμε για την Γ_0. Ας δούμε πώς μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για τη μελέτη αποδείξεων.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή ορίσαμε μια τυπική γλώσσα, με τα σύμβολα της οποίας κατασκευάζουμε, με βάση συγκεκριμένους κανόνες, εκφράσεις που αντιπροσωπεύουν προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. Στη συνέχεια είδαμε πώς γίνεται η αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις εκφράσεις αυτές, με βάση πίνακες που περιγράφουν το ρόλο των συμβόλων συνδέσμων της τυπικής γλώσσας.

2.2 Ταυτολογικές Συνεπαγωγές

Στόχος

Αρχικός στόχος στην ενότητα αυτή είναι η παρουσίαση της σημασιολογικής προσέγγισης του ελέγχου της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος, καθώς και μερικές βασικές ιδιότητές της. Επίσης, θα δοθούν παραδείγματα έγκυρων επιχειρημάτων, καθώς και ένας κατάλογος βασικών νόμων της προτασιακής λογικής.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει αυτή την ενότητα, θα μπορείτε να:

- *κατασκευάζετε πίνακες αλήθειας προτασιακών τύπων,*
- *ελέγχετε αν κάποιο πεπερασμένο σύνολο προτασιακών τύπων συνεπάγεται ταυτολογικά κάποιο προτασιακό τύπο,*
- *αναφέρετε μερικές ταυτολογίες και νόμους της προτασιακής λογικής.*

Έννοιες-κλειδιά

- *ικανοποιήσιμο σύνολο προτασιακών τύπων,*
- *ταυτολογική συνεπαγωγή,*
- *ταυτολογικά ισοδύναμοι προτασιακοί τύποι,*
- *ταυτολογία,*
- *αντίφαση,*
- *συμπάγεια,*
- *νόμοι προτασιακής λογικής.*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Σύμφωνα με τη σημασιολογική προσέγγιση, ένα επιχείρημα είναι έγκυρο, όταν το συμπέρασμα είναι κατ' ανάγκην αληθές όταν (όλες) οι υποθέσεις γίνονται αληθείς. Εδώ βέβαια οι διαισθητικές έννοιες της αλήθειας και του ψεύδους δίνονται μέσω μιας αποτίμησης.

Ένα σοβαρό ερώτημα, που θα μας απασχολήσει, είναι το εξής: Είναι δυνατό να ελέγξουμε αποτελεσματικά αν από κάποιο σύνολο προτασιακών τύπων – υποθέσεων έπεται λογικά, ως συμπέρασμα, ένας προτασιακός τύπος;

Ορισμός 2.4. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$, φ προτασιακός τύπος και a αποτίμηση. Θα λέμε τα εξής:

α) «Η αποτίμηση a ικανοποιεί το φ», ανν $\overline{a}(\varphi) = A$ και «η αποτίμηση a ικανοποιεί το T», ανν η a ικανοποιεί κάθε στοιχείο του T.

β) «Το T είναι ικανοποιήσιμο», ανν υπάρχει μια αποτίμηση που το ικανοποιεί.

γ) Ο φ είναι «ταυτολογία», ανν κάθε αποτίμηση ικανοποιεί τον φ.

δ) Ο φ είναι «αντίφαση», ανν ο $\neg\varphi$ είναι ταυτολογία.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.4

Ποια από τα ακόλουθα σύνολα είναι ικανοποιήσιμα και γιατί;

$$M(\Gamma_0),\ \ T(\Gamma_0),\ \ \{p_0, p_0 \to p_1, \neg p_1\},\ \ \{p_i \to p_{i+1} : i \in \mathbf{N}\}.$$

Ορισμός 2.5. Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και φ προτασιακός τύπος. Θα λέμε ότι «το T ταυτολογικά συνεπάγεται τον φ» και θα γράφουμε $T \models \varphi$, ανν κάθε αποτίμηση, που ικανοποιεί το T, ικανοποιεί και το φ. Θα γράφουμε $T \not\models \varphi$, όταν δεν ισχύει $T \models \varphi$. □

Η ιδέα είναι ότι η έννοια «το T ταυτολογικά συνεπάγεται τον φ» αντιπροσωπεύει την έννοια «το συμπέρασμα φ αποδεικνύεται, με τη σημασιολογική έννοια, από τις υποθέσεις T».

Παρατηρήσεις.

1) Προφανώς $T \models \varphi$ για κάθε $\varphi \in T$. Πράγματι, αν μια αποτίμηση ικανοποιεί

το T, τότε ικανοποιεί κάθε στοιχείο του.
2) Αφού κάθε αποτίμηση ικανοποιεί το $\emptyset$, για κάθε προτασιακό τύπο φ έχουμε:

$$\emptyset \models \varphi, \text{ ανν } \text{ ο } \varphi \text{ είναι ταυτολογία.}$$

Πράγματι, έστω ότι $\emptyset \models \varphi$, αλλά ο φ δεν είναι ταυτολογία. Τότε, υπάρχει αποτίμηση a που δεν ικανοποιεί το φ. Όμως, η a ικανοποιεί (τετριμμένα) το $\emptyset$, αφού δεν υπάρχει στοιχείο του $\emptyset$, το οποίο δεν ικανοποιείται από την a. Επίσης, κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το $\emptyset$ ικανοποιεί και το φ. Άρα η a ικανοποιεί τον φ, δηλαδή άτοπο. Όμοια ελέγχουμε ότι, αν ο φ είναι ταυτολογία, τότε $\emptyset \models \varphi$.
3) Αν το T είναι μη ικανοποιήσιμο, τότε $T \models \varphi$, για κάθε προτασιακό τύπο φ. Πράγματι, έστω ότι το T είναι μη ικανοποιήσιμο, αλλά υπάρχει προτασιακός τύπος φ τέτοιος που $T \not\models \varphi$. Τότε, υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί το T αλλά όχι και τον φ. Άρα υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί το T, δηλαδή άτοπο. □

Συμβολισμός.
α) Αν $T = \{\psi\}$ και $T \models \varphi$, τότε γράφουμε απλά $\psi \models \varphi$ και λέμε ότι «ο ψ ταυτολογικά συνεπάγεται τον φ».
β) Αν $\varphi \models \psi$ και $\psi \models \varphi$, τότε γράφουμε $\varphi \equiv \psi$ και λέμε ότι «οι φ, ψ είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι». □

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι, αν σε μια ταυτολογία αντικαταστήσουμε όλες τις προτασιακές μεταβλητές της με τυχόντες προτασιακούς τύπους, τότε ο νέος προτασιακός τύπος είναι επίσης ταυτολογία. Αυτό οφείλεται στο ότι και μια προτασιακή μεταβλητή και ένας προτασιακός τύπος συνεισφέρουν μια από τις τιμές αλήθειας Α, Ψ, κατά τη διαδικασία προσδιορισμού της τιμής αλήθειας ενός προτασιακού τύπου.

Δραστηριότητα 2.2

Έστω $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ ακολουθία προτασιακών τύπων. Για τυχόντα προτασιακό τύπο φ, συμβολίζουμε με φ^* τον προτασιακό τύπο που παίρνουμε, αντικαθιστώντας την p_0 με φ_0, την p_1 με φ_1 κτλ.

α) Έστω a μια αποτίμηση. Παίρνουμε μια αποτίμηση b τέτοια που $b(p_i) = \overline{a}(\varphi_i)$, για $i = 0, 1, 2, \ldots$ Δείξτε ότι $\overline{b}(\varphi) = \overline{a}(\varphi^*)$.

β) Δείξτε ότι, αν ο φ είναι ταυτολογία, τότε ο φ^* είναι ταυτολογία.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι η συνήθης σημασιολογική μέθοδος της «σε άτοπο απαγωγής» μεταφέρεται στο πλαίσιό μας.

Θεώρημα 2.5. Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_0)$

$$T \models \varphi, \text{ ανν το } T \cup \{\neg\varphi\} \text{ δεν είναι ικανοποιήσιμο.}$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι $T \models \varphi$, αλλά το $T \cup \{\neg\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο. Τότε, υπάρχει αποτίμηση a, που ικανοποιεί το $T \cup \{\neg\varphi\}$. Έχουμε καταλήξει τώρα σε άτοπο, διότι πρέπει $\overline{a}(\varphi) = A$, αφού η a ικανοποιεί το T και $T \models \varphi$, και ταυτόχρονα $\overline{a}(\varphi) = \Psi$, αφού η a ικανοποιεί τον $\neg\varphi$. Συνεπώς, ισχύει το ζητούμενο.
($\Leftarrow$) Έστω ότι το $T \cup \{\neg\varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, αλλά $T \not\models \varphi$. Τότε υπάρχει αποτίμηση a που ικανοποιεί το T, αλλά δεν ικανοποιεί το φ. Άρα υπάρχει αποτίμηση που ικανοποιεί το και τον $\neg\varphi$, δηλαδή το $T \cup \{\neg\varphi\}$, πράγμα αδύνατο. Το ζητούμενο έπεται. □

Συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι ότι το να ελέγξουμε κατά πόσον οι υποθέσεις συνεπάγονται ταυτολογικά το συμπέρασμα φ είναι ισοδύναμο με το να ελέγξουμε αν υπάρχει αποτίμηση, που ικανοποιεί το σύνολο $T \cup \{\neg\varphi\}$.

Υπάρχει άραγε τρόπος, για δεδομένα T και φ, να ελέγξουμε στην πράξη αν $T \models \varphi$ ή όχι; Ναι, υπάρχει, μόνο όμως για την περίπτωση που το T είναι πεπερασμένο. Αν το T είναι άπειρο, έχουμε μια μικρή βοήθεια από το ακόλουθο θεώρημα που θ' αποδείξουμε αργότερα:

Θεώρημα 2.6. (Θεώρημα Συμπάγειας Προτασιακής Λογικής) Έστω T άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποιήσιμο, τότε το T είναι ικανοποιήσιμο. □

Όμως, η βοήθεια αυτή είναι θεωρητική, αφού δεν είναι ποτέ δυνατό να ελέγξουμε όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του (άπειρου) συνόλου $T \cup \{\neg\varphi\}$, αν είναι ικανοποιήσιμα ή όχι.

Στη συνέχεια, θα δούμε τον αλγόριθμο, με βάση τον οποίο αποφασίζουμε αν ένα πεπερασμένο σύνολο προτασιακών τύπων ταυτολογικά συνεπάγεται έναν προτασιακό τύπο ή όχι. Έστω, λοιπόν, ότι έχουμε ένα πεπερασμένο $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και έναν προτασιακό τύπο φ. Σύμφωνα με τη Δραστηριότητα 2.1, μας ενδιαφέρουν μόνο οι τιμές αλήθειας, που μια αποτίμηση αντιστοιχεί στις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στα στοιχεία του $T \cup \{\varphi\}$. Έστω, ότι n διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές, $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, εμφανίζονται στα στοιχεία του $T \cup \{\varphi\}$. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα αλήθειας με 2^n σειρές (αφού κάθε προτασιακή μεταβλητή μπορεί να πάρει δυο τιμές, υπάρχουν $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ δυνατοί συνδυασμοί τιμών αλήθειας για τις n προτασιακές μεταβλητές) και m στήλες, όπου m ο αριθμός των διαφορετικών προτασιακών τύπων, που εμφανίζονται στα δενδροδιαγράμματα των στοιχείων του $T \cup \{\varphi\}$. Για να είμαστε σίγουροι ότι θα καλύψουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών αλήθειας των προτασιακών μεταβλητών, συμπληρώνουμε τις στήλες τους ως εξής: Στην πρώτη στήλη βάζουμε στις πρώτες $2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$ γραμμές τιμή A και στις υπόλοιπες τιμή Ψ. Στη δεύτερη στήλη βάζουμε πρώτα $2^{n-2} = \frac{2^n}{4}$ τιμές A, μετά $2^{n-2} = \frac{2^n}{4}$ τιμές Ψ, μετά $2^{n-2} = \frac{2^n}{4}$ τιμές A και τέλος $2^{n-2} = \frac{2^n}{4}$ τιμές Ψ. Συνεχίζοντας έτσι, θα φτάσουμε στη στήλη της τελευταίας μεταβλητής, όπου θα συμπληρώσουμε τις τιμές A και Ψ εναλλάξ μέχρι τέλους. Αφού προσδιορίσουμε τις τιμές αλήθειας σ' όλες τις στήλες, εξετάζουμε τις σειρές, για να δούμε αν κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το T ικανοποιεί και το φ ή όχι.

Παράδειγμα 2.5. Θα δείξουμε ότι $\{p \to (q \to r), q\} \models p \to r$.

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \to r$
A	A	A	A	A	A
A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	A	A	A	A	A
Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	Ψ	A	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A

Από τη δεύτερη, την πέμπτη και την έκτη στήλη βλέπουμε ότι ο $p \to r$ παίρνει τιμή αλήθειας A κάθε φορά που οι $p \to (q \to r)$ και q παίρνουν τιμή A, οπότε ισχύει το ζητούμενο. □

Προσοχή! Το γεγονός ότι ο προτασιακός τύπος παίρνει τιμή και σε περιπτώσεις που ένας τουλάχιστον από τους $p \to (q \to r)$ και q παίρνει τιμή Ψ, δε μας αφορά.

Όμοια ελέγχουμε, αν ένας προτασιακός τύπος είναι ταυτολογία.

Παράδειγμα 2.6. Θα δείξουμε ότι ο προτασιακός τύπος $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ είναι ταυτολογία.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
A	A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	A	A	A
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	Ψ	A	A	Ψ	A	A	A

Από την τελευταία στήλη βλέπουμε ότι ο προτασιακός τύπος που μας ενδιαφέρει παίρνει πάντα τιμή A, άρα είναι ταυτολογία. □

Μερικές φορές μπορούμε να ελέγξουμε ότι ένας προτασιακός τύπος είναι ή δεν είναι ταυτολογία, χωρίς να κατασκευάσουμε όλο τον πίνακα αλήθειας του. Ας δούμε δύο τέτοια παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.7. Για να δούμε ότι ο προτασιακός τύπος

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

είναι ταυτολογία, εργαζόμαστε ως εξής:

1) Υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι η p έχει τιμή αλήθειας A. Τότε βλέπουμε ότι ο προτασιακός τύπος παίρνει τιμή A, χωρίς να ξέρουμε τίποτε για τις τιμές των q, r.

2) Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η p έχει τιμή αλήθειας Ψ. Αυτό δεν αρκεί για να βρούμε τι τιμή παίρνει όλος ο προτασιακός τύπος. Γι' αυτό υποθέτουμε ότι και η q έχει τιμή αλήθειας Ψ, οπότε ο προτασιακός τύπος παίρνει τιμή A.

3) Τέλος, υποθέτουμε ότι η p έχει τιμή Ψ και η q τιμή A. Λόγω συμμετρίας των q και r, αν υποθέσουμε ότι η r έχει τιμή Ψ, τότε είμαστε στην περίπτωση 2). Γι' αυτό υποθέτουμε ότι η r έχει τιμή A. Τότε ο προτασιακός τύπος παίρνει πάλι τιμή A. Σχηματικά:

p	$\vee$	$(q$	$\wedge$	$r)$	$\leftrightarrow$	$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\vee$	$r)$
A	A				A	A	A		A	A	A	
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ		A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ		
Ψ	A	A	A	A	A	Ψ	A	A	A	Ψ	A	A

□

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.5

Εξετάστε αν ο καθένας από τους παρακάτω προτασιακούς τύπους συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο:

$$p_0 \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2), \;\; (p_0 \wedge (p_1 \wedge p_2)) \vee (\neg p_0 \wedge (\neg p_1 \wedge \neg p_2)).$$

Παράδειγμα 2.8. Έστω τώρα ότι θέλουμε να δείξουμε ότι ο προτασιακός τύπος $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$ δεν είναι ταυτολογία. Αρκεί να βρούμε μια αποτίμηση που ν' αντιστοιχεί στον τύπο αυτό την τιμή Ψ. Μια τέτοια αποτίμηση θα δίνει στον $p \wedge q \rightarrow r$ τιμή A και στον $p \vee q \rightarrow r$ τιμή Ψ. Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε ότι μια αποτίμηση a, για την οποία $a(p) = A$, $a(q) = a(r) = \Psi$, δίνει στον αρχικό προτασιακό τύπο τιμή Ψ. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.6

Είναι ο προτασιακός τύπος $((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow p_0) \rightarrow p_0$ ταυτολογία;

Ένας κατάλογος με γνωστές ταυτολογίες, που καλούνται «νόμοι της προτασιακής λογικής», είναι ο εξής:

Νόμοι αντιμεταθετικότητας:	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
	$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
Νόμοι προσεταιριστικότητας:	$p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
	$p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
Νόμοι επιμεριστικότητας:	$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Νόμος διπλής άρνησης:	$\neg\neg p \leftrightarrow p$
Νόμος άρνησης συνεπαγωγής:	$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$
Νόμοι De Morgan:	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Νόμος αποκλεισμού τρίτου:	$p \vee \neg p$
Νόμος αντιθετοαναστροφής:	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Νόμος εξαγωγής:	$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
Νόμοι αντικατάστασης:	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
	$(p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$
	$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$.

Αν παρατηρήσετε προσεκτικά τους νόμους αυτούς, θα διαπιστώσετε ότι οι περισσότεροι είναι ανάλογοι νόμων που ισχύουν για τις συνολοθεωρητικές (ή αριθμητικές) πράξεις – θυμηθείτε την άποψη της αλγεβρικής σχολής Λογικής, που αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο. Οι σύνδεσμοι $\neg, \wedge, \vee$ είναι ανάλογοι (αντίστοιχα) των συνολοθεωρητικών πράξεων $'$ (συμπλήρωμα), $\cap$ (τομή) και $\cup$ (ένωση). Πράγματι, για τυχόντα σύνολα X, Y, τα σύνολα X', $X \cap Y$, $X \cup Y$ ορίζονται αντίστοιχα ως $\{x|$ δεν ισχύει $x \in X\}$, $\{x|x \in X$ και $x \in Y\}$, $\{x|x \in X$ ή $x \in Y\}$, οπότε καθίσταται άμεση η συσχέτιση των πράξεων $', \cap, \cup$ με (τις λέξεις «δεν», « και», «ή» και άρα με) τους συνδέσμους $\neg, \wedge, \vee$. Έτσι, παραδείγματος χάρη, ο πρώτος νόμος επιμεριστικότητας αντιστοιχεί στο συνολοθεωρητικό νόμο $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$, ενώ ο πρώτος νόμος De Morgan έχει ως συνολοθεωρητικό αντίστοιχο τον $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$.

Σημειώσεις.

α) Σημαντικοί είναι και οι «νόμοι απορρόφησης» – δες Άσκηση 2.5.

β) Με βάση το νόμο προσεταιριστικότητας, αν σε κάποιο προτασιακό τύπο υπάρχει μόνο ο σύνδεσμος $\wedge$ (ή ο $\vee$), δε χρειάζονται καθόλου οι παρενθέσεις.

γ) Αρκετοί από τους παραπάνω νόμους γενικεύονται, με την έννοια ότι ισχύουν για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος προτασιακών μεταβλητών αντί για 2 ή 3 μεταβλητές. Παραδείγματος χάρη, ισχύουν οι νόμοι

$$\neg(p \wedge q \wedge r) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r$$
$$p \wedge (q \vee r \vee s) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s). \qquad \square$$

Με βάση τη Δραστηριότητα 2.2, από τους παραπάνω νόμους μπορούμε να πάρουμε νέους, αντικαθιστώντας τις προτασιακές μεταβλητές με οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους θέλουμε. Έτσι, για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ γνωρίζουμε ότι

$$\models \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi, \ \models \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi, \ \models (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi) \ \text{κτλ.}$$

Σημειώνουμε ότι, με βάση την Άσκηση 2.3, από τους νόμους αυτούς προκύπτουν ζεύγη ταυτολογικά ισοδύναμων προτασιακών τύπων, παραδείγματος χάρη τα

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi, \ \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi.$$

Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα είναι ο εξής «νόμος αντικατάστασης»:

Αν σε κάποιο προτασιακό τύπο φ αντικαταστήσουμε έναν υποτύπο του με κάποιον ταυτολογικά ισοδύναμο προτασιακό τύπο, τότε ο προτασιακός τύπος που προκύπτει είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με το φ. (Δες σχετικά την Άσκηση 2.6.)

Άμεση συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι μπορούμε να απλοποιούμε προτασιακούς τύπους, αντικαθιστώντας τμήματά τους με άλλα, που είναι ταυτολο- γικά ισοδύναμα προς τα αρχικά, με βάση νόμους της προτασιακής λογικής.

Παράδειγμα 2.9. Θα απλοποιήσουμε τον προτασιακό τύπο

$$((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
& ((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi) & \\
\equiv\; & (\varphi \wedge \neg\psi) \vee ((\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)) & \text{(νόμος προσετ/κότητας)} \\
\equiv\; & (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)) & \text{(νόμος επιμεριστικότητας)} \\
\equiv\; & (\varphi \wedge \neg\psi) \vee \neg\varphi & \text{(νόμος αποκλεισμού τρίτου} \\
& & \text{και νόμος απορρόφησης)} \\
\equiv\; & (\varphi \vee \neg\varphi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\varphi) & \text{(νόμος επιμεριστικότητας)} \\
\equiv\; & \neg\psi \vee \neg\varphi & \text{(νόμος αποκλεισμού τρίτου} \\
& & \text{και νόμος απορρόφησης)} \\
\equiv\; & \neg(\psi \wedge \varphi) & \text{(νόμος de Morgan)}
\end{aligned}$$

□

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.7

Χρησιμοποιώντας νόμους της προτασιακής λογικής, απλοποιήστε τον ακόλουθο προτασιακό τύπο:

$$[p_1 \wedge ((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2))] \vee \neg(p_3 \vee \neg p_1).$$

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή ορίστηκε μια έννοια λογικής συνεπαγωγής και δόθηκε ένας αλγόριθμος, με βάση τον οποίο ελέγχουμε αν ένα τυχόν πεπερασμένο σύνολο υποθέσεων οδηγεί με λογικά έγκυρο τρόπο σε ένα συμπέρασμα. Επίσης, δόθηκε ένας κατάλογος με βασικούς νόμους της προτασιακής λογικής και παράδειγμα εφαρμογής τους για την απλοποίηση ενός προτασιακού τύπου.

2.3 Πλήρη Σύνολα Συνδέσμων

Στόχος

Στην ενότητα αυτή ο βασικός στόχος μας είναι να ασχοληθούμε με το κατά πόσον η σημασιολογία της λογικής προτάσεων μεταβάλλεται, αν χρησιμοποιήσουμε λιγότερους από τους πέντε αρχικούς συνδέσμους της τυπικής γλώσσας ή αν χρησιμοποιήσουμε κάποιους άλλους συνδέσμους. Θα δοθούν παραδείγματα περιπτώσεων, στις οποίες δεν αλλάζει η σημασιολογία, και παραδείγματα, στα οποία αλλάζει.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει αυτή την ενότητα, θα μπορείτε να:

- *κατασκευάζετε την κανονική διαζευκτική μορφή ενός οποιουδήποτε προτασιακού τύπου,*
- *αναφέρετε παραδείγματα συνόλων συνδέσμων, που είναι πλήρη, και άλλων, που δεν είναι,*
- *αποδεικνύετε ότι ένα σύνολο συνδέσμων είναι πλήρες,*
- *βρείτε, αν σας δοθεί ένας προτασιακός τύπος, έναν ταυτολογικά ισοδύναμο προτασιακό τύπο, που περιέχει συνδέσμους από ένα πλήρες σύνολο συνδέσμων.*

Έννοιες-κλειδιά

- *κανονική διαζευκτική μορφή,*
- *συνάρτηση Boole,*
- *πλήρες (ή επαρκές) σύνολο συνδέσμων.*

Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Ας θεωρήσουμε μια τυπική γλώσσα, που έχει για σύμβολα τις προτασιακές μεταβλητές, τις παρενθέσεις και μερικούς από τους πέντε συνδέσμους, ίσως μαζί με μερικούς άλλους, και της οποίας το σύνολο των προτασιακών τύπων ορίζεται με παρόμοιο τρόπο, όπως εκείνο της Γ_0. *Άραγε, η νέα αυτή γλώσσα είναι σημασιολογικά πλουσιότερη από τη* Γ_0, *φτωχότερη από τη* Γ_0 *ή ισοδύναμη με τη* Γ_0; *Δηλαδή αληθεύει ότι κάθε προτασιακός τύπος της* Γ_0 *είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με κάποιον προτασιακό τύπο της νέας γλώσσας; Ο σκοπός μας σ' αυτή την ενότητα είναι ν' απαντήσουμε σ' αυτή την ερώτηση.*

Κατ' αρχήν χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός 2.6. Έστω $k \in \mathbf{N}$. «Συνάρτηση Boole με $k+1$ μεταβλητές» καλείται κάθε συνάρτηση $f : \{A, \Psi\}^{k+1} \to \{A, \Psi\}$, όπου $\{A, \Psi\}^{k+1}$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο $\{A, \Psi\} \times \cdots \times \{A, \Psi\}$ ($k+1$ φορές), δηλαδή το σύνολο με στοιχεία όλες τις δυνατές $k+1$-άδες $< \tau_1, \ldots, \tau_{k+1} >$, όπου τ_i είναι Α ή Ψ. □

Είναι προφανές ότι σε κάθε προτασιακό τύπο με $k+1$ διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές αντιστοιχεί μια συνάρτηση Boole με $k+1$ μεταβλητές. Πράγματι, έστω φ τυχών προτασιακός τύπος με $k+1$ προτασιακές μεταβλητές. Κατασκευάζουμε τον πίνακα αλήθειας του φ και κατόπιν ορίζουμε τη συνάρτηση $f_\varphi : \{A, \Psi\}^{k+1} \to \{A, \Psi\}$ με $f_\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_{k+1}) =$ τιμή αλήθειας του φ, όταν οι προτασιακές μεταβλητές του πάρουν τιμές $\tau_1, \ldots, \tau_{k+1}$. Ισχύει μήπως και το αντίθετο; Η απάντηση είναι «ναι», όπως φαίνεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.7. Αν f είναι μια συνάρτηση Boole με $k+1$ μεταβλητές, $k \in \mathbf{N}$, τότε υπάρχει προτασιακός τύπος φ, στον οποίο εμφανίζονται οι p_0, ..., p_k, τέτοιος που για κάθε αποτίμηση a να ισχύει

$$\overline{a}(\varphi) = f(a(p_0), ..., a(p_k)),$$

δηλαδή ο πίνακας αλήθειας του φ να περιγράφει πλήρως την f.

Πριν από την απόδειξη του θεωρήματος, ας δούμε ένα παράδειγμα που περιέχει τις βασικές ιδέες της απόδειξης.

Παράδειγμα 2.10. Έστω f η συνάρτηση Boole με τρεις μεταβλητές, που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} f(\Psi,\Psi,\Psi)=\Psi & f(A,\Psi,\Psi)=A \\ f(\Psi,\Psi,A)=A & f(A,\Psi,A)=\Psi \\ f(\Psi,A,\Psi)=A & f(A,A,\Psi)=\Psi \\ f(\Psi,A,A)=\Psi & f(A,A,A)=A. \end{array}$$

(για απλότητα, γράφουμε $f(\Psi,\Psi,\Psi)$ αντί για $f(<\Psi,\Psi,\Psi>)$ κτλ.).

Προσδιορίζουμε κατ' αρχήν τα στοιχεία του $\{A,\Psi\}^3$, στα οποία η f αντιστοιχεί την τιμή A. Αυτά είναι τα εξής:

$$<\Psi,\Psi,A>, <\Psi,A,\Psi>, <A,\Psi,\Psi>, <A,A,A> \quad (\dagger).$$

Σε καθεμία από αυτές τις διατεταγμένες τριάδες αντιστοιχούμε έναν προτασιακό τύπο, στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι p_0, p_1, p_2 ως εξής:
Αν το πρώτο στοιχείο της τριάδας είναι A, τότε παίρνουμε την p_0, ενώ αν είναι Ψ, παίρνουμε την $\neg p_0$. Όμοια, για τα άλλα δύο στοιχεία της τριάδας και τελικά παίρνουμε τη σύζευξη των τριών στοιχειωδών προτασιακών τύπων που προκύπτουν.
Έτσι, στην τριάδα $<\Psi,\Psi,A>$ αντιστοιχεί ο προτασιακός τύπος $\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$.
Η διάζευξη των προτασιακών τύπων, που αντιστοιχούν στις διατεταγμένες τριάδες $(\dagger)$, είναι ο προτασιακός τύπος

$$(\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_0 \wedge p_1 \wedge p_2),$$

του οποίου ο πίνακας αλήθειας πράγματι περιγράφει πλήρως την f. □

Σημείωση. Αντί για τις προτασιακές μεταβλητές p_0, p_1, p_2, θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει οποιεσδήποτε τρεις μεταβλητές. Επίσης, δεν παίζει ρόλο με ποια σειρά θα πάρουμε τους τέσσερις όρους της διάζευξης (με βάση όσα αναφέρθηκαν μετά τον κατάλογο των νόμων στην προηγούμενη ενότητα). □

Ας γυρίσουμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος.

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Έστω ότι το πεδίο τιμών της f είναι το $\{\Psi\}$. Τότε ο πίνακας αλήθειας του

$$(p_0 \wedge \neg p_0) \vee (p_1 \wedge \neg p_1) \vee ... \vee (p_k \wedge \neg p_k)$$

περιγράφει πλήρως την f.
Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι υπάρχουν κάποιες διατεταγμένες $k+1$-άδες, τις οποίες η f αντιστοιχεί στο A. Δουλεύοντας όπως στο παράδειγμα, ορίζουμε τον προτασιακό τύπο φ να είναι ο $\psi_0 \vee \psi_1 \vee ... \vee \psi_n$, όπου $\psi_i = \chi_{i0} \wedge ... \wedge \chi_{ik}$, $i = 0, ..., n$ και

$$\chi_{ij} = \begin{cases} p_j, & \text{αν } \tau_{ij} = A \\ \neg p_j, & \text{αν } \tau_{ij} = \Psi. \end{cases}$$

Επαληθεύεται ότι ο φ έχει την ιδιότητα που θέλουμε. □

Παρατηρήσεις.
α) Όταν ο πίνακας αλήθειας του φ περιγράφει πλήρως τη συνάρτηση Boole f, θα λέμε ότι «ο φ αντιπροσωπεύει την f».
β) Στο πρώτο μέρος της απόδειξης παραπάνω, θα μπορούσαμε να είχαμε πάρει ως προτασιακό τύπο φ οποιονδήποτε από τους $p_0 \wedge \neg p_0, \ldots, p_k \wedge \neg p_k$ ή ακόμη και οποιαδήποτε αντίφαση. Όμως, επιλέξαμε το συγκεκριμένο τύπο, για να υπάρχει ομοιομορφία με τον προτασιακό τύπο του δεύτερου μέρους, στον οποίο εμφανίζονται όλες οι $p_0, \ldots, p_k$.
γ) Πάντα υπάρχουν περισσότεροι από ένας προτασιακοί τύποι, που αντιπροσωπεύουν την ίδια συνάρτηση Boole f – αν ο φ αντιπροσωπεύει την f, τότε κάθε προτασιακός τύπος, ταυτολογικά ισοδύναμος με τον φ, επίσης αντιπροσωπεύει την f. Στο παράδειγμα που προαναφέραμε, ο $p_0 \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2)$ επίσης αντιπροσωπεύει την f. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.8

Έστω f η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{lll} f(\Psi,\Psi,\Psi)=A & f(\Psi,A,A)=\Psi & f(A,A,\Psi)=\Psi \\ f(\Psi,\Psi,A)=A & f(A,\Psi,\Psi)=\Psi & f(A,A,A)=\Psi \\ f(\Psi,A,\Psi)=A & f(A,\Psi,A)=\Psi. & \end{array}$$

Βρείτε έναν προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή που αντιπροσωπεύει την f. Υπάρχει συντομότερος προτασιακός τύπος που αντιπροσωπεύει την f;

Ορισμός 2.7. Θα λέμε ότι ένας προτασιακός τύπος είναι σε «κανονική διαζευκτική μορφή», ανν έχει τη μορφή που είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη, δηλαδή είναι της μορφής $\psi_0 \vee \psi_1 \vee ... \vee \psi_n$, όπου $\psi_i = \chi_{i0} \wedge ... \wedge \chi_{ik}$, $i = 0, ..., n$, και χ_{ij} είναι μια προτασιακή μεταβλητή ή άρνηση προτασιακής μεταβλητής. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.9

Βρείτε έναν προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή, που είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον προτασιακό τύπο

$$p_0 \rightarrow ((p_2 \rightarrow \neg p_0) \vee p_3).$$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.7 είναι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.1. Κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο σε κανονική διαζευκτική μορφή.

Απόδειξη. Έστω φ τυχών προτασιακός τύπος. Θεωρούμε τη συνάρτηση Boole f_φ, που αντιστοιχεί στον (πίνακα αλήθειας του) φ. Από το Θεώρημα 2.7, υπάρχει προτασιακός τύπος φ^* σε κανονική διαζευκτική μορφή, του οποίου ο πίνακας αλήθειας αντιπροσωπεύει την f_φ. Τότε, $\varphi \equiv \varphi^*$ και ο φ^* είναι της μορφής που θέλουμε. □

Τώρα είμαστε σε θέση ν' απαντήσουμε στο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή της ενότητας σε δύο περιπτώσεις, την περίπτωση όπου παίρνουμε τους πέντε αρχικούς συνδέσμους μαζί με κάποιους νέους και την περίπτωση όπου παίρνουμε μόνο μερικούς από τους αρχικούς συνδέσμους.

Πρώτη περίπτωση: Έστω λοιπόν ότι παίρνουμε, εκτός από τους αρχικούς συνδέσμους, και τον νέο σύνδεσμο # και αναπτύσσουμε τη νέα γλώσσα Γ_0', όπως την Γ_0 (δηλαδή δίνουμε ορισμό για τους προτασιακούς τύπους, καθορίζουμε τον πίνακα αλήθειας του # κτλ.).

Έστω τώρα $\varphi_{\#}$ τυχών προτασιακός τύπος της Γ_0'. Ο πίνακας αλήθειάς του περιγράφεται πλήρως από μια συνάρτηση Boole, έστω την f. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.7, υπάρχει προτασιακός τύπος ψ της Γ_0 (και μάλιστα σε κανονική διαζευκτική μορφή) που αντιπροσωπεύει την f. Συνεπώς, οι $\varphi_{\#}$, ψ έχουν ακριβώς τον ίδιο πίνακα αλήθειας, οπότε είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι.

Άρα η Γ_0' είναι ταυτολογικά ισοδύναμη με την Γ_0. Φυσικά, το ίδιο ισχύει και αν πάρουμε περισσότερους από ένα νέους συνδέσμους.

Δεύτερη περίπτωση: Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1, αν κρατήσουμε μόνο τους $\neg, \wedge, \vee$, έχουμε σημασιολογικά ισοδύναμη γλώσσα. Όπως θα δούμε, μπορούμε να κρατήσουμε λιγότερους. Για να προχωρήσουμε, όμως, χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός 2.8. Έστω C σύνολο συνδέσμων. Θα λέμε ότι το C είναι «πλήρες» (ή «επαρκές»), ανν κάθε προτασιακός τύπος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με έναν προτασιακό τύπο, που περιέχει μόνο συνδέσμους που ανήκουν στο C. □

Η ιδέα είναι ότι ένα σύνολο συνδέσμων C είναι πλήρες, αν οι πέντε αρχικοί σύνδεσμοι μπορούν να εκφραστούν μέσω των στοιχείων του C.

Όπως είδαμε, το $\{\neg, \wedge, \vee\}$ είναι πλήρες. Παραλείποντας ένα από τους $\wedge, \vee$, έχουμε πάλι ένα πλήρες σύνολο.

Πρόταση 2.1. Τα $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ είναι πλήρη.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το $\{\neg, \wedge\}$ είναι πλήρες – η απόδειξη για το $\{\neg, \vee\}$ είναι όμοια.

Έστω λοιπόν φ τυχών προτασιακός τύπος. Με βάση το Πόρισμα 2.1, υπάρχει προτασιακός τύπος φ^*, στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \wedge, \vee$, τέτοιος που

$\varphi \equiv \varphi^*$.

Ο τρίτος νόμος της αντικατάστασης δίνει $\psi \vee \chi \equiv \neg(\neg\psi \wedge \neg\chi)$. Συνεπώς, ξεκινώντας από το μικρότερο κομμάτι του φ^*, στο οποίο εμφανίζεται ο $\vee$, και προχωρώντας σε μεγαλύτερα, μπορούμε ν' απαλλαγούμε από τις εμφανίσεις του συνδέσμου αυτού στο φ^*. Δηλαδή αντικαθιστούμε υποτύπους του φ^*, που περιέχουν τον $\vee$, με ταυτολογικά ισοδύναμους προτασιακούς τύπους που δεν τον περιέχουν. Έτσι, παίρνουμε έναν προτασιακό τύπο φ^{**}, στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \wedge$, τέτοιο που $\varphi \equiv \varphi^{**}$. Οι φ, φ^{**} είναι ταυτολογικά ισοδύναμοι με βάση την Άσκηση 2.6. □

Παρατηρήσεις.

α) Για να δώσουμε μια αυστηρή απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαγωγής για το $T(\Gamma_0)$, κατάλληλα τροποποιημένη (δηλαδή αντί για το $T(\Gamma_0)$ θα ισχύει για το σύνολο $T'(\Gamma_0)$ όλων των προτασιακών τύπων, στους οποίους εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \wedge, \vee$). Δηλαδή να δείξουμε, με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ, ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ, στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \wedge, \vee$, υπάρχει προτασιακός τύπος φ^{**}, στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \wedge$, τέτοιος που $\varphi \equiv \varphi^{**}$.

β) Λόγω της Πρότασης 2.1, θα μπορούσαμε να πάρουμε μόνο δύο συνδέσμους από την αρχή και να εισαγάγουμε τους άλλους τρεις ως συντομογραφίες, για λόγους ευκολίας. □

Έχοντας ένα πλήρες σύνολο συνδέσμων C και έναν προτασιακό τύπο φ, για να βρούμε έναν προτασιακό τύπο, που περιέχει συνδέσμους μόνο από το C και είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον φ, χρησιμοποιούμε τους νόμους αντικατάστασης, ακολουθώντας τη διαδικασία της απόδειξης της προηγούμενης πρότασης.

Παράδειγμα 2.11. Θα βρούμε έναν προτασιακό τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \vee$ και ο οποίος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον $p \vee q \to (q \leftrightarrow r)$. Σχηματικά προχωρούμε ως εξής:

$$
\begin{array}{lll}
 & p \vee q \to (q \leftrightarrow r) & \\
\equiv & p \vee q \to (q \to r) \wedge (r \to q) & \text{2ος νόμος αντικ/στασης} \\
\equiv & p \vee q \to (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) & \text{1ος νόμος αντικ/στασης}
\end{array}
$$

$$\begin{aligned} &\equiv \quad p \vee q \to \neg(\neg(\neg q \vee r) \vee \neg(\neg r \vee q)) && \text{4ος νόμος αντικ/στασης} \\ &\equiv \quad \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg(\neg q \vee r) \vee \neg(\neg r \vee q)) && \text{1ος νόμος αντικ/στασης.} \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.10

Βρείτε έναν προτασιακό τύπο, στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι $\neg, \wedge$ και ο οποίος είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με τον

$$p_0 \to ((p_2 \to \neg p_0) \vee p_3).$$

Το να δείξουμε ότι ένα σύνολο συνδέσμων C δεν είναι πλήρες είναι πιο δύσκολο από το να δείξουμε ότι είναι. Η μέθοδος που ακολουθούμε είναι η εξής: Δείχνουμε ότι ο πίνακας αλήθειας κάθε προτασιακού τύπου, που περιέχει συνδέσμους μόνο από το C, έχει κάποια ιδιομορφία. Κατόπιν, βρίσκουμε έναν προτασιακό τύπο, που περιέχει ένα σύνδεσμο, που δεν ανήκει στο C και του οποίου ο πίνακας αλήθειας δεν έχει αυτή την ιδιομορφία.

Παράδειγμα 2.12. Θα δείξουμε ότι το $\{\wedge, \to\}$ δεν είναι πλήρες.

Παρατηρούμε ότι κάθε προτασιακός τύπος, που περιέχει μόνο τους συνδέσμους $\wedge, \to$, παίρνει τιμή A, όταν όλες οι προτασιακές μεταβλητές, που εμφανίζονται σ' αυτόν, παίρνουν τιμή A. Αυτό οφείλεται ουσιαστικά στους πίνακες αλήθειας των συνδέσμων αυτών και μπορούμε να το δούμε κατασκευάζοντας μερικούς πίνακες αλήθειας τέτοιων προτασιακών τύπων. (Για να το αποδείξουμε, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαγωγής για το σύνολο των προτασιακών τύπων, στους οποίους εμφανίζονται μόνο οι $\wedge, \to$.) Για τον προτασιακό τύπο $\neg p_0$ όμως δεν ισχύει αυτό, δηλαδή ο σύνδεσμος $\neg$ δεν εκφράζεται μέσω των $\wedge, \to$. Συνεπώς, ισχύει το ζητούμενο. $\square$

Θα κλείσουμε την παράγραφο με μια συζήτηση σχετικά με n-θέσιους συνδέσμους, για $n \leq 2$, που θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε. Προφανώς, ο πίνακας αλήθειας ενός n-θέσιου συνδέσμου περιγράφεται πλήρως από μια συνάρτηση Boole με n μεταβλητές. Αλλά, το πλήθος τέτοιων συναρτήσεων είναι 2^{2^n}, αφού το πεδίο ορισμού μιας τέτοιας συνάρτησης έχει 2^n στοιχεία και οι τιμές της κυμαίνονται στο σύνολο $\{A, \Psi\}$. Άρα, υπάρχουν 2^{2^n} πιθανοί n-θέσιοι σύνδεσμοι.

$\underline{n = 0}$. Υπάρχουν δυο 0-θέσιοι σύνδεσμοι, οι $\top$ και $\bot$, που αποτελούν από μόνοι τους προτασιακούς τύπους τέτοιους που για κάθε αποτίμηση a: $\overline{a}(\top) = A$ και

$\overline{a}(\bot) = \Psi$.

$\underline{n=1}$. Υπάρχουν τέσσερις 1-θέσιοι σύνδεσμοι: οι δύο αντιστοιχούν στις σταθερές συναρτήσεις με τιμή A, Ψ αντίστοιχα, ένας αντιστοιχεί στην ταυτοτική συνάρτηση και ο τέταρτος είναι ο $\neg$, που έχουμε ήδη δει.

$\underline{n=2}$. Υπάρχουν 16 δυνατοί 2-θέσιοι σύνδεσμοι, από τους οποίους μόνο οι 10 είναι ουσιαστικά διθέσιοι – οι υπόλοιποι είναι ουσιαστικά 0-θέσιοι ή 1-θέσιοι. Εκτός από αυτούς που έχουμε δει, πρέπει ν' αναφέρουμε τους $+$, $\downarrow$, $|$, που αντιστοιχούν στις ελληνικές εκφράσεις ((... ή ... αλλά όχι και τα δύο (αποκλειστική διάζευξη), «ούτε ... ούτε ...», «δεν ... ή δεν ...» και έχουν τους εξής πίνακες αλήθειας:

$\overline{a}(\varphi)$	$\overline{a}(\psi)$	$\overline{a}(\varphi + \psi)$	$\overline{a}(\varphi \downarrow \psi)$	$\overline{a}(\varphi \vert \psi)$
A	A	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	A
Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A

Παράδειγμα 2.13. Το $\{|\}$ είναι πλήρες (υποθέτουμε ότι έχουμε τροποποιήσει τον ορισμό του συνόλου των προτασιακών τύπων κτλ.).
Προφανώς για κάθε φ, ψ έχουμε

$$\neg\varphi \equiv \varphi|\varphi \quad \text{και} \quad \varphi \lor \psi \equiv (\varphi|\varphi)|(\psi|\psi).$$

Αφού το $\{\neg, \lor\}$ είναι πλήρες, το ίδιο ισχύει και για το $\{|\}$. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.11

Δείξτε ότι το $\{\downarrow\}$ είναι πλήρες.

Είδαμε ότι κάποιοι συνδυασμοί διθέσιων συνδέσμων δεν αποτελούν πλήρη σύνολα, ενώ καθένας από τους $|, \downarrow$ αποτελεί μόνος του πλήρες σύνολο. Άραγε, υπάρχει άλλος διθέσιος σύνδεσμος $*$, τέτοιος που το $\{*\}$ να είναι πλήρες; Η απάντηση είναι «όχι» και αυτό αποδεικνύεται όπως έπεται.

Πρόταση 2.2. Για κάθε διθέσιο σύνδεσμο $*$ διαφορετικό από τους $|$, $\downarrow$, το $\{*\}$ δεν είναι πλήρες.

Απόδειξη. Έστω $*$ διθέσιος σύνδεσμος τέτοιος που το $\{*\}$ είναι πλήρες, αλλά ο $*$ είναι διαφορετικός από τους $|, \downarrow$.

Αν $*(A, A) = A$, τότε κάθε προτασιακός τύπος, στον οποίο εμφανίζεται μόνο ο $*$, θα έπαιρνε τιμή A, όταν όλες οι προτασιακές μεταβλητές του έπαιρναν τιμή A. Όμως, ο $\neg p_0$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Άρα $*(A, A) = \Psi$.

Όμοια βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει $*(\Psi, \Psi) = A$. Για τις τιμές $*(A, \Psi)$, $*(\Psi, A)$ έχουμε συνολικά τέσσερις περιπτώσεις:

$$\text{α) } A,\ A \quad \text{β) } A,\ \Psi \quad \text{γ) } \Psi, A \quad \text{δ) } \Psi,\ \Psi.$$

Επειδή ο $*$ είναι διαφορετικός από τους $|, \downarrow$, οι περιπτώσεις α) και δ) δεν μπορεί να ισχύουν. Αν ισχύει η γ), τότε $*(\varphi, \psi) \equiv \neg\varphi$. Αν ισχύει η β), τότε $*(\varphi, \psi) \equiv \neg\psi$. Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, ο $*$ θα μπορούσε να οριστεί από τον $\neg$. Όμως, το $\{\neg\}$ δεν είναι πλήρες, άρα το $\{*\}$ δεν είναι πλήρες. □

Παρατηρήσεις.

α) Αν από τους 10 **ουσιαστικά** διθέσιους συνδέσμους εξαιρέσουμε τους $\leftrightarrow$, $+$, οποιοσδήποτε από τους υπόλοιπους 8 αποτελεί μαζί με τον $\neg$ πλήρες σύνολο.

β) Πρέπει να σημειώσουμε ότι η πληρότητα των περισσότερων συνόλων συνδέσμων δεν έχει πρακτικό, αλλά θεωρητικό ενδιαφέρον. Παραδείγματος χάρη, δεν έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε την πληρότητα του συνόλου $\{\downarrow\}$, για να μετατρέψουμε κάθε προτασιακό τύπο στον ταυτολογικά ισοδύναμό του, που περιέχει μόνο $\downarrow$, αφού έτσι θα χάσουμε το πλεονέκτημα να βλέπουμε τον αρχικό τύπο μέσω των πέντε συνδέσμων, που μας είναι πολύ πιο οικείοι από ότι ο $\downarrow$. Από την άλλη πλευρά, η πληρότητα του $\{\downarrow\}$ αποτελεί ένα κομψό θεωρητικό αποτέλεσμα.

Δραστηριότητα 2.3

Βρείτε τους πίνακες αλήθειας των εννέα διθέσιων συνδέσμων που δεν έχουμε αναφέρει.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή είδαμε ομάδες συνδέσμων, καθεμία από τις οποίες μπορεί να υιοθετηθεί αντί για την αρχική ομάδα με πέντε μέλη, χωρίς να αλλάξει ουσιαστικά η σημασιολογία της γλώσσας Γ_0. *Επίσης, είδαμε παραδείγματα ομάδων συνδέσμων, τα οποία οδηγούν σε σημασιολογία ασθενέστερη από αυτή που ορίσαμε αρχικά.*

2.4 Προτασιακός Λογισμός

Στόχος

Κύριος στόχος στην ενότητα αυτή είναι η παρουσίαση μιας συντακτικής προσέγγισης του ελέγχου επιχειρημάτων, στα πλαίσια ενός αξιωματικού (παραγωγικού) συστήματος. Θα οριστεί μια έννοια απόδειξης, που εξαρτάται μόνο από τη μορφή των προτασιακών τύπων, και θα δοθούν παραδείγματα τέτοιων αποδείξεων. Τέλος, θα αποδειχθούν θεωρήματα, που αφορούν το σύστημα αυτό και διευκολύνουν την κατασκευή τέτοιων αποδείξεων.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει την ενότητα αυτή, θα μπορείτε να:

- *διακρίνετε αν ένας προτασιακός τύπος είναι ή όχι αξίωμα του προτασιακού λογισμού,*
- *κατασκευάζετε αποδείξεις στα πλαίσια του προτασιακού λογισμού,*
- *εφαρμόζετε βασικά θεωρήματα που αφορούν στον προτασιακό λογισμό.*

Έννοιες-κλειδιά

- *αξίωμα,*
- *αξιωματικό σχήμα,*
- *τυπική απόδειξη,*
- *συνεπές σύνολο προτασιακών τύπων,*
- *αντιφατικό σύνολο προτασιακών τύπων.*
- *αποδεικτικός κανόνας,*
- *modus ponens,*
- *τυπικό θεώρημα,*
- *θεώρημα απαγωγής,*

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Ένα ερώτημα που ανακύπτει φυσιολογικά είναι το εξής:

> *Είναι δυνατό να συστηματοποιηθούν οι ταυτολογίες, δηλαδή να βρεθούν ένα σύνολο βασικών ταυτολογιών και ένα σύνολο κανόνων, τέτοια ώστε κάθε ταυτολογία να μπορεί να παραχθεί από τις βασικές με εφαρμογές των κανόνων;*
> *Η απάντηση είναι «ναι», για την απόδειξη όμως απαιτείται αρκετή δουλειά.*

Η έννοια του «αξιωματικού» ή «παραγωγικού» συστήματος είναι γενικότερη, εδώ όμως μας ενδιαφέρει στα πλαίσια της προτασιακής λογικής. Ενώ για τη σημασιολογική θεώρηση της έννοιας της απόδειξης κεντρική σημασία έχει η διατήρηση της αλήθειας από τις υποθέσεις στο συμπέρασμα, η συντακτική θεώρηση αφορά αποκλειστικά στη μορφή των υποθέσεων και του συμπεράσματος, σε σχέση με τη μορφή των «αξιωμάτων», δηλαδή των προτασιακών τύπων που θεωρούνται ως αρχικοί, και σε σχέση με τους «αποδεικτικούς κανόνες», δηλαδή τις μηχανικές διαδικασίες, με βάση τις οποίες μεταβαίνουμε από προτασιακούς τύπους σε άλλους προτασιακούς τύπους. Η κατάσταση μοιάζει με ό,τι συμβαίνει στο σκάκι, παραδείγματος χάρη, όπου ξεκινώντας από μια συγκεκριμένη κατάσταση φτάνουμε, μέσω κινήσεων που καθορίζονται από επακριβείς κανόνες, στο τέλος κάθε παρτίδας.

Ορισμός 2.9. Ένα «αξιωματικό (ή τυπικό) σύστημα για τον προτασιακό λογισμό» αποτελείται από τα εξής:

α) ένα σύνολο προτασιακών τύπων A και

β) ένα σύνολο K με στοιχεία (διμελείς) σχέσεις ανάμεσα σε σύνολα προτασιακών τύπων και προτασιακούς τύπους.

Τα στοιχεία του A καλούνται «αξιώματα» και αυτά του K καλούνται «αποδεικτικοί κανόνες». Αν $\kappa \in K$ και $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi$ είναι προτασιακοί τύποι τέτοιοι που $< \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}, \varphi >\in \kappa$, τότε λέμε ότι «ο φ είναι άμεση συνέπεια των $\varphi_1, ..., \varphi_n$ με βάση τον κ». □

Ορισμός 2.10. Έστω $\mathcal{A} =< A, K >$ ένα αξιωματικό σύστημα για τον προτασιακό λογισμό, T σύνολο προτασιακών τύπων και φ προτασιακός τύπος.

α) «Τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}$ από το T» καλείται κάθε πεπερασμένη ακολουθία προτασιακών τύπων $\varphi_1, ..., \varphi_n$ τέτοια που για κάθε $i = 1, ..., n$

1) $\varphi_i \in A \cup T$ ή

2) ο φ_i είναι άμεση συνέπεια προηγούμενων προτασιακών τύπων με βάση κάποιον αποδεικτικό κανόνα.

Όταν $T = \emptyset$, αντί για «τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}$ από το $\emptyset$», λέμε απλά «τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}$».

β) Λέμε ότι «ο φ αποδεικνύεται τυπικά στο $\mathcal{A}$ από το T», γράφοντας $T \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$, ανν υπάρχει μια τυπική απόδειξη $\varphi_1, ..., \varphi_n$ στο $\mathcal{A}$ από το T τέτοια ώστε $\varphi_n = \varphi$.
Όταν $T \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$, τα στοιχεία του T καλούνται «υποθέσεις» και ο φ καλείται «συμπέρασμα».
Αν $T = \emptyset$ και $T \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$, τότε γράφουμε απλά $\vdash_{\mathcal{A}} \varphi$ και λέμε ότι «ο φ είναι τυπικό θεώρημα του $\mathcal{A}$». □

Παρατηρήσεις.
1) Εδώ πρέπει να τονιστεί η διαφορά ανάμεσα σε «τυπικά θεωρήματα» και «θεωρήματα». Ένα τυπικό θεώρημα είναι έκφραση μιας τυπικής γλώσσας, ενώ ένα θεώρημα είναι έκφραση της μετα-γλώσσας. Ανάλογη είναι η διαφορά ανάμεσα σε μια «τυπική απόδειξη» και μια «απόδειξη».
2) Οι τυπικές αποδείξεις στο $\mathcal{A}$, που μπορούμε να κατασκευάσουμε, αντιστοιχούν σε αποδείξεις, που μπορούμε να κάνουμε με προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. Αυτός είναι ο λόγος που χρησιμοποιούμε την έκφραση «προτασιακός λογισμός».
3) Είναι φανερό ότι, αν $T \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$, τότε $T' \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$ για κάποιο πεπερασμένο $T' \subseteq T$. Πράγματι, αν $T \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$, τότε υπάρχει τυπική απόδειξη $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ στο $\mathcal{A}$ από το T. Θεωρώντας το σύνολο των στοιχείων του T, που υπάρχουν στην ακολουθία $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ παίρνουμε ένα πεπερασμένο σύνολο $T' \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T' \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$.
4) Επίσης, είναι προφανές ότι $T \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$ για κάθε $\varphi \in T$. Πράγματι, αν $\varphi \in T$, τότε η ακολουθία φ αποτελεί μια τετριμμένη τυπική απόδειξη του φ από το T στο $\mathcal{A}$.
5) Αν $T \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$, τότε προφανώς $T' \vdash_{\mathcal{A}} \varphi$ για κάθε $T \subseteq T'$. Πράγματι, έστω ότι $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ είναι μια τυπική απόδειξη στο $\mathcal{A}$ από το T και $T \subseteq T'$. Τα στοιχεία του T, που εμφανίζονται στην ακολουθία $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, είναι και στοιχεία του T', άρα η ακολουθία αυτή αποτελεί τυπική απόδειξη του φ στο $\mathcal{A}$ από το T.

□

Μετά από αυτές τις γενικότητες, ας δούμε ποιο είναι το αξιωματικό σύστημα ΠΛ $=< A_0, K_0 >$, που θα εξετάσουμε (ΠΛ είναι συντομογραφία της έκφρασης «Προτασιακός Λογισμός»).

A_0 είναι το σύνολο με στοιχεία όλους τους προτασιακούς τύπους, που δίνουν τα «αξιωματικά σχήματα»

$$\begin{array}{ll} A\Sigma 1. & \varphi \to (\psi \to \varphi) \\ A\Sigma 2. & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \\ A\Sigma 3. & (\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi). \end{array}$$

Πρέπει να τονιστεί ότι οι φ, ψ μπορεί να είναι **οποιοιδήποτε** προτασιακοί τύποι – οι επαναλήψεις επιτρέπονται!

K_0 είναι το σύνολο με μοναδικό στοιχείο τον αποδεικτικό κανόνα «απόσπασης» ή (συνήθως) «Modus Ponens» (MP), που περιγράφεται ως εξής:

$$\text{Modus Ponens} \qquad \frac{\varphi \to \psi,\ \varphi}{\psi}$$

Ο κανόνας MP μας δίνει τη δυνατότητα να συμπεραίνουμε τον τυχόντα προτασιακό τύπο ψ από τους προτασιακούς τύπους $\varphi \to \psi$ και φ, όπου φ είναι οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος. Ως σύνολο, ο κανόνας αυτός ορίζεται ως εξής:

$$MP = \{< \{\varphi \to \psi, \varphi\}, \psi >: \varphi, \psi \text{ τυχόντες προτασιακοί τύποι } \}.$$

Η επιλογή των αξιωμάτων και του αποδεικτικού κανόνα είναι καλή, με την έννοια ότι τα αξιώματα είναι ταυτολογίες και ο κανόνας MP διατηρεί την ταυτολογική συνεπαγωγή – δες Άσκηση 2.9.

Παράδειγμα 2.14. Η ακόλουθη τυπική απόδειξη δείχνει ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ: $\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \varphi$. Σημειώνουμε ότι για ευκολία, όταν έχουμε μια τυπική απόδειξη $\varphi_1, ..., \varphi_n$ στο ΠΛ, γράφουμε τους προτασιακούς τύπους τον ένα κάτω από τον άλλο, με αρίθμηση αριστερά και επεξηγήσεις δεξιά. Πρέπει να τονιστεί ότι για κάθε χρήση των αξιωματικών σχημάτων και κάθε εφαρμογή του κανόνα MP μπορούμε να παίρνουμε αυθαίρετους προτασιακούς τύπους στη θέση των φ, ψ, χ.

1.	$[\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)] \to [(\varphi \to (\varphi \to \varphi \to (\varphi \to \varphi)]$ (πράγματι, ο προτασιακός αυτός τύπος προκύπτει από το σχήμα $A\Sigma 2$, αν βάλουμε τον προτασιακό τύπο $\varphi \to \varphi$ στη θέση του ψ και τον προτασιακό τύπο φ στη θέση του χ)	$A\Sigma 2$
2.	$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ (πράγματι, ο προτασιακός τύπος αυτός προκύπτει από το $A\Sigma 1$, αν βάλουμε τον προτασιακό τύπο $\varphi \to \varphi$ στη θέση του ψ)	$A\Sigma 1$
3.	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi) \to (\varphi \to \varphi)$ (πράγματι, ο προτασιακός τύπος αυτός προκύπτει από τους τύπους 1 και 2 με βάση τον κανόνα MP, όπου στη θέση του φ έχουμε βάλει τον προτασιακό τύπο $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ και στη θέση του ψ τον $(\varphi \to (\varphi \to \varphi \to (\varphi \to \varphi))$	1, 2, MP
4.	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi))$ (πράγματι, ο τύπος αυτός προκύπτει από το ΑΣ1, αν βάλουμε τον προτασιακό τύπο φ στη θέση του ψ)	$A\Sigma 1$
5.	$\varphi \to \varphi$ (πράγματι, ο προτασιακός τύπος αυτός προκύπτει από τους τύπους 3 και 4 με βάση τον κανόνα MP, όπου στη θέση του τύπου φ έχουμε βάλει τον $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ και στη θέση του ψ έχουμε βάλει τον $\varphi \to \varphi$).	3, 4, MP

$\square$

Μια εύλογη απορία που δημιουργείται είναι η εξής: Μήπως το γεγονός ότι στα αξιωματικά σχήματα και στον αποδεικτικό κανόνα του ΠΛ εμφανίζονται ως κύριοι σύνδεσμοι μόνο οι $\neg, \to$ περιορίζει τις δυνατότητες του συστήματος; Η απάντηση είναι «όχι» και ο λόγος είναι ότι, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, το σύνολο $\{\neg, \to\}$ είναι πλήρες. Δηλαδή κάθε αναφορά σε τυχόντα προτασιακό τύπο φ, στον οποίο εμφανίζονται και άλλοι σύνδεσμοι, υπονοεί αναφορά στον προτασιακό τύπο φ^*, που είναι ταυτολογικά ισοδύναμος με το φ και στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \to$.

Για ευκολία, στα επόμενα θα επιτρέπουμε τη χρήση μέσα σε τυπικές αποδείξεις και τυπικών θεωρημάτων. Έτσι, μέσα σε μια τυπική απόδειξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον προτασιακό τύπο $\varphi \to \varphi$, αναφέροντάς τον ως «τυπικό θεώρημα», χωρίς να χρειάζεται να παραθέσουμε την παραπάνω τυπική απόδειξη του.

Από το προηγούμενο παράδειγμα φαίνεται ότι η κατασκευή τυπικών αποδείξεων, ακόμη και απλών προτασιακών τύπων, απαιτεί μεγάλη εφευρετικότητα, είναι λοιπόν άμεση η ανάγκη να βρεθούν μέθοδοι απλοποίησης της αναζήτησής τους. Η κατάσταση μοιάζει με το πώς κάνουμε αποδείξεις στα ελληνικά, αφού ποτέ δεν αναφέρουμε **όλα** τα βήματα, προσπαθώντας να καταλήξουμε σε αξιώματα, αλλά συστηματικά αναγόμαστε σε θεωρήματα που είναι ήδη γνωστά. Στην κατεύθυνση αυτή υπάρχουν μερικά βασικά θεωρήματα, με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

Θεώρημα 2.8. (Θεώρημα Απαγωγής) Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_0)$

$$\text{αν } T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \psi, \text{ τότε } T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \psi.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και $T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \psi$. Χρησιμοποιώντας τη (συνήθη) αρχή πλήρους επαγωγής, θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, αν υπάρχει μια τυπική απόδειξη $\psi_1, \ldots, \psi_n = \psi$ στο ΠΛ από το $T \cup \{\varphi\}$, τότε $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \psi_n$.
Πρώτο βήμα: $n = 1$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:
α) $\psi_1 \in A_0 \cup T$.
Τότε $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \psi_1$, όπως φαίνεται από την ακόλουθη τυπική απόδειξη στο ΠΛ από το T:

1.	$\psi_1 \to (\varphi \to \psi_1)$	1
2.	ψ_1	στοιχείο του $A_0 \cup T$
3.	$\varphi \to \psi_1$	1, 2, Μ.Ρ.

β) $\psi_1 = \varphi$.
Από το προηγούμενο παράδειγμα, ξέρουμε ότι $\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \varphi$. Άρα $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \varphi$, δηλ. $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \psi$.
Δεύτερο βήμα: Έστω ότι για κάθε k, $1 < k < n$, ισχύει $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \psi_k$. Θα δείξουμε ότι $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \psi_n$. Διακρίνουμε πάλι δύο περιπτώσεις.
α) $\psi_n \in A_0 \cup T \cup \{\varphi\}$.
Τότε παίρνουμε το ζητούμενο όπως πριν.
β) Ο ψ_n είναι άμεση συνέπεια δυο τύπων ψ_j, ψ_l, για συγκεκριμένα $j, l < n$,

με βάση τον κανόνα MP (οπότε ο ψ_l είναι της μορφής $\psi_j \to \psi_n$). Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, έχουμε ότι

$$T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \psi_j \ \text{ και } \ T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to (\psi_j \to \psi_n).$$

Κατασκευάζουμε τώρα μια τυπική απόδειξη στο ΠΛ από το T ως εξής:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \ldots.. \\ .. & \ldots.. \\ \lambda. & \varphi \to \psi_j \end{array}\right\} \text{τυπική απόδειξη από το } T \text{ στο ΠΛ}$$

$$\left.\begin{array}{ll} .. & \ldots.. \\ .. & \ldots.. \\ \mu. & \varphi \to (\psi_j \to \psi_n) \end{array}\right\} \text{τυπική απόδειξη από το } T \text{ στο ΠΛ}$$

$$\begin{array}{lll} \mu+1. & (\varphi \to (\psi_j \to \psi_n)) \to ((\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi_n)) & A\Sigma 2 \\ \mu+2. & (\varphi \to \psi_j) \to (\varphi \to \psi_n) & \mu,\, \mu+1,\, MP \\ \mu+3. & \varphi \to \psi_n & \lambda,\, \mu+2,\, MP \end{array}$$

Συνεπώς, $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \psi_n$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατηρήσεις.

α) Το θεώρημα απαγωγής αντιστοιχεί στην εξής τεχνική απόδειξης στη μεταγλώσσα: Όταν από τις υποθέσεις Y προσπαθούμε ν' αποδείξουμε ότι $A \Rightarrow B$, προσπαθούμε ν' αποδείξουμε το B με υποθέσεις $Y \cup \{A\}$.

β) Ας χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα αυτό για να δείξουμε ότι $\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \varphi$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$, πράγμα που είναι προφανές, αφού προκύπτει από την τετριμμένη τυπική απόδειξη

1. φ υπόθεση.

Συγκρίνοντας την προσέγγιση αυτή με την επίπονη κατασκευή της τυπικής απόδειξης στο Παράδειγμα 2.14, βλέπουμε πόσο ισχυρό είναι το Θεώρημα Απαγωγής. □

Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα εφαρμογής του Θεωρήματος Απαγωγής.

Παράδειγμα 2.15. Θα δείξουμε, με χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής, ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ έχουμε $\vdash_{\Pi\Lambda} \neg\neg\varphi \to \varphi$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\neg\neg\varphi \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$, πράγμα που προκύπτει από την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1. $\neg\neg\varphi$	υπόθεση
2. $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$	ΑΣ1
3. $\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$	1, 2, MP
4. $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)$	ΑΣ3
5. $(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi$	3, 4, MP
6. $\neg\varphi \to \neg\varphi$	Παράδειγμα 2.14
7. φ	5, 7, MP.

□

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.12

> Δείξτε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής, ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ: $\vdash_{\Pi\Lambda} \neg\neg\varphi \to \varphi$.

Πολύ χρήσιμες συνέπειες του προηγούμενου θεωρήματος είναι οι σχέσεις που δίνονται από το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 2.2. (i) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \chi$.
(ii) $\{\varphi \to (\psi \to \chi), \psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \chi$.

Απόδειξη. (i) Αρκεί, σύμφωνα με το Θεώρημα Απαγωγής, να δείξουμε ότι

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \chi.$$

Αυτό, όμως, το εξασφαλίζει η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\varphi \to \psi$	υπόθεση
2.	$\psi \to \chi$	υπόθεση
3.	φ	υπόθεση
4.	ψ	1, 3, MP
5.	χ	2, 4, MP

(ii) Όμοια. □

Ένα άλλο σημαντικό πόρισμα του Θεωρήματος Απαγωγής ακολουθεί.

Θεώρημα 2.9. (Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής) Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T και τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\psi, \text{ ανν } T \cup \{\psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi.$$

Απόδειξη. Βλέπε Άσκηση 2.10. □

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα που αποδείξαμε για συντόμευση τυπικών αποδείξεων στο ΠΛ. Παραδείγματος χάρη, αν κατά την κατασκευή κάποιας τυπικής απόδειξης έχουμε ήδη γράψει τους τύπους $\varphi \to \psi$, $\psi \to \chi$, τότε μπορούμε να γράψουμε τον $\varphi \to \chi$ με δικαιολογία «Πόρισμα 2.2», αντί να επαναλάβουμε την αντίστοιχη τυπική απόδειξη. Μπορείτε τώρα να εφαρμόσετε στην επόμενη δραστηριότητα τα θεωρήματα που είδαμε.

Δραστηριότητα 2.4

Δείξτε ότι για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ οι ακόλουθοι προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα του ΠΛ:

(i) $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

(ii) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

(iii) $\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$.

Συνεχίζουμε με ένα θεώρημα, που είναι το συντακτικό αντίστοιχο της μεθόδου της «σε άτοπο απαγωγής», η οποία χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην κατασκευή αποδείξεων. Πριν δούμε το θεώρημα, θα ορίσουμε μια νέα έννοια.

Ορισμός 2.11. Έστω T σύνολο προτασιακών τύπων. Θα λέμε ότι

α) το T είναι «συνεπές», ανν δεν υπάρχει προτασιακός τύπος φ τέτοιος ώστε $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$ και $T \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$ και

β) το T είναι «αντιφατικό», ανν το T δεν είναι συνεπές. □

Σημείωση. Αν το T είναι αντιφατικό, τότε $T \vdash_{\Pi\Lambda} \psi$ για κάθε τύπο ψ. Πράγματι, έστω ότι το είναι αντιφατικό, δηλαδή για κάποιο τύπο φ ισχύει ότι $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$ και $T \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$. Τότε, χρησιμοποιώντας το τυπικό θεώρημα $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ (δες Δραστηριότητα 2.4), μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη του ψ από το T, για τυχόντα τύπο ψ. □

Θεώρημα 2.10. (Θεώρημα της σε άτοπο απαγωγής) Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T και για κάθε προτασιακό τύπο φ

$$\text{αν το } T \cup \{\varphi\} \text{ είναι αντιφατικό, τότε } T \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi.$$

Απόδειξη. Έστω ότι το $T \cup \{\varphi\}$ είναι αντιφατικό. Τότε για κάποιο ψ ισχύει

$$T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \psi \text{ και } T \cup \{\varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\psi.$$

Άρα, λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής,

$$T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \psi \text{ και } T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \neg\psi.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το τυπικό θεώρημα $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$ (Άσκηση 2.11), μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη στο ΠΛ, που να δείχνει ότι $T \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$. □

Δε θα συνεχίσουμε τη μελέτη τυπικών αποδείξεων στο ΠΛ, για τους εξής λόγους:

α) Το ΠΛ δεν αποτελεί το κατάλληλο υπόβαθρο για τη μελέτη αποδείξεων, αφού η Γ_0 έχει περιορισμένες δυνατότητες.

β) Υπάρχει ευκολότερος τρόπος από την κατασκευή τυπικών αποδείξεων στο ΠΛ, για να ελέγχουμε αν κάποιος προτασιακός τύπος είναι τυπικό θεώρημα του ΠΛ: ο έλεγχος αν αυτός ο τύπος είναι ταυτολογία – το γεγονός αυτό έπεται από θεωρήματα που θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

Θα κλείσουμε την ενότητα αναφέροντας τα σύνολα αξιωμάτων A_0', A_0'', καθένα από τα οποία μπορούμε να πάρουμε στη θέση του A_0, χωρίς ν' αλλάξει τίποτε, δηλ. τα συστήματα ΠΛ, $\Pi\Lambda' = < A_0', K_0 >$ και $\Pi\Lambda'' = < A_0'', K_0 >$ έχουν τα ίδια τυπικά θεωρήματα.

Τα στοιχεία του A_0' είναι όλοι οι προτασιακοί τύποι, που δίνουν τα ακόλουθα αξιωματικά σχήματα (όπου θεωρούνται ως αρχικοί μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \vee$):

$$
\begin{array}{ll}
A\Sigma 1'. & \varphi \vee \varphi \to \varphi \\
A\Sigma 2'. & \varphi \to \varphi \vee \psi \\
A\Sigma 3'. & \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi \\
A\Sigma 4'. & (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \varphi \vee \chi).
\end{array}
$$

Το A_0'' έχει στοιχεία όλους τους προτασιακούς τύπους της μορφής

$$(\{[(\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)] \to \chi\} \to \tau) \to [(\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)].$$

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή ορίσαμε ένα αξιωματικό σύστημα για τη λογική προτάσεων, δώσαμε παραδείγματα αποδείξεων στα πλαίσιά του και αποδείξαμε μερικά θεωρήματα, που παρέχουν ισχυρά εργαλεία για τη συντόμευση αποδείξεων στο σύστημα αυτό.

2.5 Εγκυρότητα και Πληρότητα

Στόχος

Ο βασικός στόχος μας στην ενότητα αυτή είναι να αποδείξουμε ότι το αξιωματικό σύστημα που θεωρήσαμε στην προηγούμενη ενότητα έχει τις ιδιότητες που θέλουμε, δηλαδή οι ταυτολογίες και μόνον αυτές αποδεικνύονται στα πλαίσιά του. Δεύτερος στόχος είναι να αποδείξουμε το σημαντικό θεώρημα συμπάγειας, που αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει αυτή την ενότητα, θα μπορείτε να:

- *ελέγχετε αν ένας προτασιακός τύπος είναι τυπικό θεώρημα του αξιωματικού συστήματος για τον προτασιακό λογισμό,*
- *αποδεικνύετε ότι ένα πεπερασμένο σύνολο προτασιακών τύπων είναι συνεπές, δηλαδή δεν αποδεικνύεται από αυτό κάποια αντίφαση,*
- *χρησιμοποιείτε το θεώρημα συμπάγειας, για να δείξετε ότι ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων είναι ικανοποιήσιμο.*

Έννοιες-κλειδιά

- *εγκυρότητα προτασιακού λογισμού,*
- *πληρότητα προτασιακού λογισμού.*

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Στην ενότητα αυτή θα δούμε ότι στο αξιωματικό σύστημα ΠΛ *συμπυκνώνονται όλες οι ταυτολογίες. Γενικότερα, το να συμπεραίνουμε προτασιακούς τύπους από άλλους σημασιολογικά είναι ισοδύναμο με το να τους συμπεραίνουμε συντακτικά στο* ΠΛ*. Το γεγονός αυτό εκφράζουμε, λέγοντας ότι το* ΠΛ *είναι «έγκυρο»,* *δηλαδή κάθε τυπικό θεώρημά του είναι ταυτολογία, και «πλήρες», δηλαδή κάθε ταυτολογία είναι τυπικό θεώρημά του.*

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ενότητας 2.3, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στους προτασιακούς τύπους εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \rightarrow$ και ότι η αρχή της επαγωγής ισχύει με την κατάλληλη τροποποίηση.

Για ν' αποδείξουμε το βασικό θεώρημα, χρειαζόμαστε ένα λήμμα, το οποίο αναφέρεται στο εξής γεγονός: Για τυχόντα προτασιακό τύπο φ, κάθε σειρά του πίνακα αλήθειας του φ παραπέμπει σε μια τυπική απόδειξη του φ ή του $\neg\varphi$, αν θεωρήσουμε ως υποθέσεις τις προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον φ ή τις αρνήσεις τους, ανάλογα με τις τιμές αλήθειας στη σειρά αυτή.

Λήμμα 2.2. Έστω φ προτασιακός τύπος τέτοιος ώστε όλες οι προτασιακές μεταβλητές, που εμφανίζονται στον φ, να είναι ανάμεσα στις $p_0, ..., p_k$ και a τυχούσα αποτίμηση. Ορίζουμε τους προτασιακούς τύπους $\overline{\varphi}, \overline{p_0}, \ldots, \overline{p_k}$ ως εξής:

$$\overline{\varphi} = \begin{cases} \varphi, & \text{αν } \overline{a}(\varphi) = A \\ \neg\varphi, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad \overline{p_i} = \begin{cases} p_i, & \text{αν } a(p_i) = A \\ \neg p_i, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots$$

Τότε ισχύει $\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \overline{\varphi}$.

(Για να είμαστε απόλυτα ακριβείς, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα δείκτη κατά τον ορισμό του «τελεστή» $-$, για να αναφερθούμε στην αποτίμηση από την οποία εξαρτάται. Όμως, στη συνέχεια είναι σαφές σε ποια αποτίμηση αναφερόμαστε, οπότε απλοποιούμε το συμβολισμό.)

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ.

1) Αν ο φ είναι κάποια προτασιακή μεταβλητή, τότε το ζητούμενο ισχύει προφανώς.

2) Έστω, λοιπόν, ότι το ζητούμενο ισχύει για τους προτασιακούς τύπους φ, ψ. Απαιτείται να δείξουμε ότι ισχύει και για τους προτασιακούς τύπους $\neg\varphi$, $\varphi \rightarrow \psi$. Θα δώσουμε την απόδειξη μόνο για τον $\neg\varphi$, αφήνοντας την άλλη περίπτωση ως Δραστηριότητα.

Προφανώς, οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στους φ, $\neg\varphi$ είναι οι ίδιες, έστω ότι είναι μεταξύ των p_0, ..., p_k. Θεωρούμε μια τυχούσα αποτίμηση a. Από την επαγωγική υπόθεση, ισχύει $\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \overline{\varphi}$.

Αν $\overline{a}(\varphi) = A$, τότε $\overline{a}(\neg\varphi) = \Psi$, οπότε $\overline{\neg\varphi} = \neg\neg\varphi$. Αλλά $\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \neg\neg\varphi$, από την Άσκηση 2.11α. Συνεπώς $\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \overline{\neg\varphi}$.

Αν $\overline{a}(\varphi) = \Psi$, τότε $\overline{a}(\neg\varphi) = A$, οπότε $\overline{\varphi} = \neg\varphi$ και $\overline{\neg\varphi} = \neg\varphi$. Άρα $\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \overline{\neg\varphi}$.
Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, ισχύει για τον $\neg\varphi$ αυτό που θέλουμε. □

Δραστηριότητα 2.5

> Αποδείξτε ότι, αν οι προτασιακοί τύποι φ, ψ έχουν την ιδιότητα του προηγούμενου λήμματος, τότε και ο προτασιακός τύπος $\varphi \to \psi$ έχει την ιδιότητα αυτή.

Τώρα έχουμε ό,τι χρειάζεται, για ν' αποδείξουμε το βασικό θεώρημα ότι κάθε ταυτολογία είναι τυπικό θεώρημα του ΠΛ.

Θεώρημα 2.11. Για κάθε προτασιακό τύπο φ,

$$\text{αν} \models \varphi, \text{ τότε } \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\models \varphi$ και ότι οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον φ είναι ανάμεσα στις $p_0, ..., p_k$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k > 0$.
Λόγω του Λήμματος 2.2, για τυχούσα αποτίμηση a ισχύει

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \quad (\text{αφού } \overline{a}(\varphi) = A).$$

Αν a_1 είναι μια αποτίμηση τέτοια ώστε $a_1(p_k) = A$, τότε

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}, p_k\} \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi.$$

Παίρνοντας μια αποτίμηση $_2$ τέτοια που $a_2(p_k) = \Psi$ και $a_2(p_i) = a_1(p_i)$ για $i = 0, ..., k-1$, έχουμε

$$\{\overline{p_1}, ..., \overline{p_{k-1}}, \neg p_k\} \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi.$$

Σημειώνουμε ότι ο τελεστής $-$ έχει την ίδια δράση πάνω στις μεταβλητές $p_0, \ldots,$ p_{k-1}, ανεξάρτητα από το αν εφαρμόζεται για την αποτίμηση a_1 ή την a_2.

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Απαγωγής,

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}\} \vdash_{\Pi\Lambda} p_k \to \varphi \quad (1) \text{ και}$$
$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg p_k \to \varphi \quad (2).$$

Συγκολλώντας τώρα δύο τυπικές αποδείξεις, στις οποίες στηρίζονται οι (1), (2) και χρησιμοποιώντας το δ) της Άσκησης 2.11, κατασκευάζουμε την εξής τυπική απόδειξη:

$$\begin{array}{l} ..... \\ ..... \\ p_k \to \varphi \\ ..... \\ ..... \\ \neg p_k \to \varphi \\ (p_k \to \varphi) \to ((\neg p_k \to \varphi) \to \varphi) \\ (\neg p_k \to \varphi) \to \varphi \\ \varphi \end{array}$$

Έχουμε κατά συνέπεια ότι για οποιαδήποτε αποτίμηση a ισχύει

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi.$$

Συνεχίζοντας έτσι, απαλείφουμε όλους τους προτασιακούς τύπους $\overline{p_0}, ..., \overline{p_{k-1}}$ και συμπεραίνουμε ότι $\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$. □

Γενικότερα, αποδεικνύεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.12. (Θεώρημα Πληρότητας Προτασιακού Λογισμού)

Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T και κάθε προτασιακό τύπο φ

$$\text{αν } T \models \varphi, \text{ τότε } T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi.$$ □

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι πολύ τεχνική για να δοθεί τώρα, θα επανέλθουμε σ' αυτήν αργότερα, στα πλαίσια του αντίστοιχου θεωρήματος για τη λογική κατηγορημάτων.

Όπως προαναφέραμε, ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος Πληρότητας, δηλαδή το εξής:

Θεώρημα 2.13. Για κάθε προτασιακό τύπο φ

$$\text{αν } \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi, \text{ τότε } \models \varphi. \qquad \square$$

Το ανωτέρω θεώρημα εξασφαλίζει ότι το A_0 δεν είναι αντιφατικό σύνολο προτασιακών τύπων. Πράγματι, έστω ότι υπήρχε κάποιος προτασιακός τύπος φ για τον οποίο ισχύει $\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$ και $\vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$. Τότε θα ίσχυε $\models \varphi$ και $\models \neg\varphi$, πράγμα αδύνατο.

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο γενικότερο θεώρημα.

Θεώρημα 2.14. (Θεώρημα Εγκυρότητας Προτασιακού Λογισμού) Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T και κάθε προτασιακό τύπο φ

$$\text{αν } T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi, \text{ τότε } T \models \varphi.$$

Απόδειξη. Έστω ότι $T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$. Τότε υπάρχει μια τυπική απόδειξη $\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi$ στο ΠΛ. Όμως, με βάση την Άσκηση 2.9, κάθε αξίωμα του ΠΛ είναι ταυτολογία και ο κανόνας MP διατηρεί την ταυτολογική συνεπαγωγή. Χρησιμοποιώντας το γεγονός αυτό, μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι $T \models \varphi_i$, για κάθε $i = 1, ..., n$. Άρα $T \models \varphi_n$, δηλαδή $T \models \varphi$. $\square$

Συνέπεια των Θεωρημάτων Εγκυρότητας και Πληρότητας είναι ότι η συντακτική έννοια «συνεπές σύνολο» είναι ισοδύναμη με τη σημασιολογική έννοια «ικανοποιήσιμο σύνολο». Το ένα μέρος της ισοδυναμίας αποδεικνύεται στο επόμενο παράδειγμα, ενώ το άλλο αφήνεται ως άσκηση (Άσκηση 2.14).

Παράδειγμα 2.16. Θα δείξουμε ότι για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T, αν το T είναι συνεπές, τότε το T είναι ικανοποιήσιμο.

Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει συνεπές σύνολο προτασιακών τύπων T, που δεν είναι ικανοποιήσιμο. Τότε ισχύει $T \models p_0$ και $T \models \neg p_0$ – δες Παρατήρηση 3 μετά τον Ορισμό 2.5 (στην πραγματικότητα, ισχύει $T \models \varphi$ και $T \models \neg\varphi$ για κάθε προτασιακό τύπο φ). Με βάση το Θεώρημα 2.12 προκύπτει ότι $T \vdash_{\Pi\Lambda} p_0$ και $T \vdash_{\Pi\Lambda} \neg p_0$, δηλαδή το T δεν είναι συνεπές, που είναι άτοπο. $\square$

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2.13

Είναι συνεπές το σύνολο

$$\{\neg p_2 \wedge p_3 \to p_1, p_2 \to (\neg p_1 \to p_3), p_1 \leftrightarrow \neg p_3\};$$

Ως πόρισμα των Θεωρημάτων Πληρότητας και Εγκυρότητας έχουμε το Θεώρημα Συμπάγειας, που αναφέραμε στην ενότητα 2.2, με απόδειξη την εξής:

Έστω ότι T είναι ένα άπειρο σύνολο προτασιακών τύπων, για το οποίο κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι ικανοποιήσιμο, αλλά το ίδιο το T δεν είναι ικανοποιήσιμο. Τότε $T \models p_0 \wedge \neg p_0$ (Παρατήρηση 3 μετά τον Ορισμό 2.5). Άρα, $T \vdash_{\Pi\Lambda} p_0 \wedge \neg p_0$ (Θεώρημα Πληρότητας), οπότε υπάρχει κάποιο πεπερασμένο $T' \subseteq T$ τέτοιο ώστε $T' \vdash_{\Pi\Lambda} p_0 \wedge \neg p_0$ (Παρατήρηση 3 μετά τον Ορισμό 2.10). Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Εγκυρότητας, θα ισχύει $T' \models p_0 \wedge \neg p_0$, που είναι αδύνατο, αφού το T' είναι ικανοποιήσιμο (θα έπρεπε η αποτίμηση που ικανοποιεί το T' να ικανοποιεί και τον $p_0 \wedge \neg p_0$). □

Λόγω των Θεωρημάτων Πληρότητας και Εγκυρότητας, υπάρχει αλγόριθμος για ν' αποφασίζουμε αν ο φ αποδεικνύεται τυπικά ή όχι στο ΠΛ από ένα πεπερασμένο σύνολο $T \subseteq T(\Gamma_0)$: ο αλγόριθμος για ν' αποφασίζουμε αν $T \models \varphi$ ή όχι.

Στον κατηγορηματικό λογισμό, όπως θα δούμε στη συνέχεια, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά, παρ' όλο που και εκεί ισχύει το θεώρημα πληρότητας.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή είδαμε ότι η επιλογή των αξιωμάτων και του κανόνα του συστήματος ΠΛ *είναι απόλυτα ικανοποιητική, αφού το σύστημα είναι έγκυρο και πλήρες. Επίσης, είδαμε ότι συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι το θεώρημα συμπάγειας.*

Σύνοψη κεφαλαίου

Χρησιμοποιώντας μια τυπική γλώσσα, μελετήσαμε δύο τρόπους εξαγωγής συμπερασμάτων από υποθέσεις, με την προϋπόθεση ότι αναλύουμε τις προτάσεις μόνο με βάση πέντε συνδέσμους, συγκεκριμένα αυτούς που αντιστοιχούν στις εκφράσεις «δεν», «και», «ή», «αν ... τότε ...», « ... αν και μόνον αν ...». Ο σημασιολογικός τρόπος στηρίζεται στη χρήση πινάκων αλήθειας, ενώ ο συντακτικός στη χρήση τυπικών αποδείξεων, αλλά οι δύο προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες.

Λύσεις Ασκήσεων Αυτοαξιολόγησης

Άσκηση 2.1.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ.

Αν ο φ είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε $m_\varphi = 1$ και $n_\varphi = 0$, οπότε ισχύει προφανώς η ισότητα $m_\varphi = n_\varphi + 1$.

Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $(\neg\psi)$, όπου ο ψ έχει την ιδιότητα, δηλαδή $m_\psi = n_\psi + 1$. Τότε όμως $m_\varphi = m_\psi$ και $n_\varphi = n_\psi$, οπότε ισχύει η ισότητα $m_\varphi = n_\varphi + 1$.

Έστω τώρα ότι ο φ είναι της μορφής $(\psi \wedge \chi)$, όπου οι ψ, χ έχουν την ιδιότητα, δηλαδή ισχύουν οι

$$m_\psi = n_\psi + 1 \text{ και } m_\chi = n_\chi + 1. \tag{2.1}$$

Όμως $m_\varphi = m_\psi + m_\chi$ και $n_\varphi = n_\psi + n_\chi + 1$, οπότε, λόγω των 2.1,

$$n_\varphi + 1 = (n_\psi + n_\chi + 1) + 1 = (n_\psi + 1) + (n_\chi + 1) = m_\psi + m_\chi = m_\varphi,$$

δηλαδή και ο φ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.
(Όμοια δουλεύουμε αν ο φ είναι της μορφής $(\psi \vee \chi)$ ή $(\psi \to \chi)$ ή $(\psi \leftrightarrow \chi)$.)

Σχόλιο. Αν λύσατε την άσκηση, πολύ ωραία, κατανοήσατε αμέσως την εφαρμογή της επαγωγής στην πολυπλοκότητα των προτασιακών τύπων. Αν δεν τα καταφέρατε, δεν πειράζει, η αρχή επαγωγής στο σύνολο των προτασιακών τύπων δεν είναι τόσο απλή, όσο η συνήθης αρχή επαγωγής στους φυσικούς.

Άσκηση 2.2.

Ο προτασιακός τύπος που ζητάμε είναι ο

$$((p_1 \wedge p_0) \to (((\neg p_2) \vee p_3) \leftrightarrow p_1)).$$

Με βάση τον κανόνα παράλειψης παρενθέσεων α), αυτός μπορεί να γραφεί ως

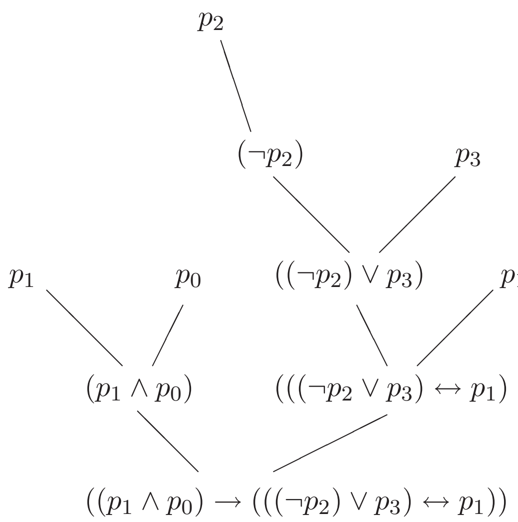
$$(p_1 \wedge p_0) \to (((\neg p_2) \vee p_3) \leftrightarrow p_1),$$

ο οποίος, με βάση τον κανόνα β), μπορεί να γραφεί ως

$$p_1 \wedge p_0 \to (\neg p_2 \vee p_3 \leftrightarrow p_1).$$

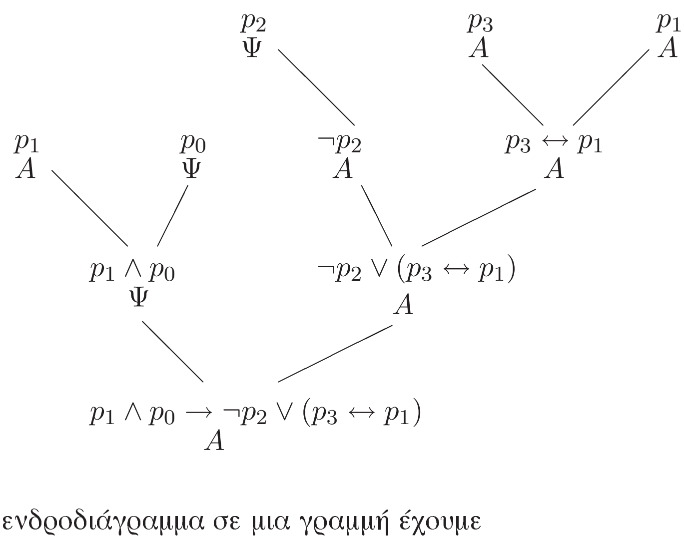
Στον τελευταίο προτασιακό τύπο δεν μπορούμε να παραλείψουμε τις παρενθέσεις, διότι αλλιώς, λόγω του κανόνα γ), δεν θα είναι σαφές ποια είναι τα πεδία εφαρμογής των συνδέσμων $\rightarrow, \leftrightarrow$.

Το δενδροδιάγραμμα του προτασιακού τύπου είναι το ακόλουθο.



Σχόλιο. Αν τα καταφέρατε, ωραία. Αλλιώς, καλό θα ήταν να ξανασκεφτείτε τους κανόνες παράλειψης παρενθέσεων, μετά το Παράδειγμα 2.2.

Άσκηση 2.3.



Συμπιέζοντας το δενδροδιάγραμμα σε μια γραμμή έχουμε

$$\begin{array}{cccccccccccc} p_1 & \wedge & p_0 & \to & \neg & p_2 & \vee & (& p_3 & \leftrightarrow & p_1 &) \\ A & \Psi & \Psi & A & A & \Psi & A & & A & A & A & \end{array}$$

Σχόλιο. Αν βρήκατε τη σωστή τιμή αλήθειας, πολύ καλά, έχετε κατανοήσει όχι μόνο τους πίνακες αλήθειας των συνδέσμων, αλλά και τους κανόνες παράλειψης παρενθέσεων. Αν πάλι κάνατε λάθος, μήπως αυτό οφείλεται στο ότι δε βρήκατε το σωστό δενδροδιάγραμμα;

Άσκηση 2.4.

α) Το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών είναι ικανοποιήσιμο, αφού υπάρχει η αποτίμηση a με $a(p) = A$ για κάθε προτασιακή μεταβλητή p, που δίνει τιμή αλήθειας σε όλα τα στοιχεία του.

β) Το σύνολο $T(\Gamma_0)$ δεν είναι ικανοποιήσιμο, αφού περιέχει τουλάχιστον έναν προτασιακό τύπο φ και την άρνησή του $\neg\varphi$ – δεν είναι δυνατό μια αποτίμηση να δώσει τιμή ταυτόχρονα στον φ και στον $\neg\varphi$!

γ) Έστω ότι υπάρχει αποτίμηση a τέτοια που $\overline{a}(p_0) = A$, $\overline{a}(p_0 \to p_1) = A$ και $\overline{a}(\neg p_1) = A$. Τότε, λόγω των πινάκων αλήθειας των συνδέσμων $\neg, \to$, θα ίσχυε και $\overline{a}(p_1) = \Psi$ και $\overline{a}(p_1) = A$, πράγμα αδύνατο. Άρα το σύνολο $\{p_0, p_0 \to p_1, \neg p_1\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

δ) Υπάρχει αποτίμηση a τέτοια που $\overline{a}(p_0 \to p_1) = \overline{a}(p_1 \to p_2) = \overline{a}(p_2 \to p_3) = \ldots = A$. Πράγματι, αν $a(p_i) = A$ για κάθε $i \in \mathbf{N}$ ή $a(p_i) = \Psi$ για κάθε $i \in \mathbf{N}$, τότε η a ικανοποιεί το σύνολο $\{p_i \to p_{i+1} : i \in \mathbf{N}\}$.

Σχόλιο. Αν βρήκατε τα σύνολα που είναι ικανοποιήσιμα, ωραία! Αν όχι, τί δεν πήγε καλά; Η ικανοποιησιμότητα εξασφαλίζεται αν βρούμε αποτίμηση που δίνει τιμή σε όλα τα στοιχεία του συνόλου. Μήπως προσπαθήσατε να δείξετε ότι όλες οι αποτιμήσεις ικανοποιούν το σύνολο;

Άσκηση 2.5.

Κατασκευάζουμε πίνακα αλήθειας για τους προτασιακούς τύπους αυτούς, συμβολίζοντας το δεύτερο με φ, και εξετάζουμε κατά πόσο

α) κάθε φορά που ο πρώτος παίρνει τιμή A, παίρνει και ο δεύτερος την ίδια τιμή και β) κάθε φορά που ο δεύτερος παίρνει τιμή A, παίρνει και ο πρώτος την ίδια τιμή.

p_0	p_1	p_2	$p_1 \leftrightarrow p_2$	$p_0 \leftrightarrow (p_1 \leftrightarrow p_2)$
A	A	A	A	A
A	A	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	Ψ
A	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	A	A	A	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	Ψ

$\neg p_0$	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$p_0 \wedge (p_1 \wedge p_2)$	$\neg p_1 \wedge \neg p_2$	$\neg p_0 \wedge (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$	φ
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ
A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	A	A	Ψ	Ψ	A	A	A

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι

α) όταν οι p_0, p_1, p_2 παίρνουν τιμές (αντίστοιχα) A, Ψ, Ψ (στην τέταρτη γραμμή των πινάκων), ο πρώτος προτασιακός τύπος παίρνει τιμή A, ενώ ο δεύτερος παίρνει τιμή Ψ και

β) όταν οι p_0, p_1, p_2 παίρνουν τιμές (αντίστοιχα) Ψ, Ψ, Ψ (στην όγδοη γραμμή των πινάκων), ο δεύτερος προτασιακός τύπος παίρνει τιμή A, ενώ ο πρώτος παίρνει τιμή Ψ.

Συνεπώς, κανένας από τους δυο προτασιακούς τύπους δε συνεπάγεται ταυτολογικά τον άλλο.

Σχόλιο. Αν βρήκατε την απάντηση, κάνατε καλή δουλειά. Αν όμως κάτι δεν πήγε καλά, σκεφθείτε πάλι τον ορισμό της ταυτολογικής συνεπαγωγής.

Άσκηση 2.6.

Έστω ότι ο $((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0$ δεν είναι ταυτολογία, δηλαδή υπάρχει αποτίμηση, η οποία του αντιστοιχεί τιμή Ψ. Τότε ο $(p_0 \to p_1) \to p_0$ παίρνει τιμή A και ο p_0 τιμή Ψ (λόγω του πίνακα αλήθειας του $\to$). Όμως, τότε θα πρέπει ο $p_0 \to p_1$ να παίρνει τιμή Ψ (αλλιώς δεν θα έπαιρνε ο $(p_0 \to p_1) \to p_0$ τιμή A), πράγμα αδύνατο, αφού ο p_0 παίρνει τιμή Ψ. Συνεπώς, ο $((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0$ είναι ταυτολογία.

Ο πίνακας αλήθειας του προτασιακού τύπου αυτού είναι ο ακόλουθος.

p_0	p_1	$p_0 \to p_1$	$(p_0 \to p_1) \to p_0$	$((p_0 \to p_1) \to p_0) \to p_0$
A	A	A	A	A
A	Ψ	Ψ	A	A
Ψ	A	A	Ψ	A
Ψ	Ψ	A	Ψ	A

Σχόλιο. Πιστεύω ότι δεν είχατε δυσκολίες εδώ. Αν, όμως, προτιμήσατε να δουλέψετε με πίνακα αλήθειας, προσπαθήστε να το ξανακάνετε με τη μέθοδο του Παραδείγματος 2.8.

Άσκηση 2.7.

$$
\begin{array}{lll}
 & [p_1 \wedge ((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_2))] \vee \neg(p_3 \vee \neg p_1) & \\
\equiv & [p_1 \wedge (p_1 \wedge (p_2 \vee \neg p_2))] \vee \neg(p_3 \vee \neg p_1) & \text{(νόμος επιμερ/τητας)} \\
\equiv & (p_1 \wedge p_1) \vee \neg(p_3 \vee \neg p_1) & \text{(νόμος αποκλεισμού} \\
 & & \text{τρίτου και νόμος απορρόφησης)} \\
\equiv & p_1 \vee (\neg p_3 \wedge \neg\neg p_1) & \text{(νόμος απορρόφησης} \\
 & & \text{και νόμος de Morgan)} \\
\equiv & p_1 \vee (\neg p_3 \wedge p_1) & \text{(νόμος διπλής άρνησης)} \\
\equiv & p_1 & \text{(νόμος απορρόφησης,} \\
 & & \text{αφού } \neg p_3 \wedge p_1 \models p_1)
\end{array}
$$

Σχόλιο. Αν καταλήξατε στον προτασιακό τύπο p_1, πολύ ωραία, δεν ήταν εύκολο. Αν όχι, θα ήταν καλό να ξαναδείτε τους νόμους απορρόφησης (Άσκηση 2.5).

Άσκηση 2.8.

Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού, στα οποία η f αντιστοιχεί τιμή A, είναι τα εξής:

$$< \Psi, \Psi, \Psi >,\ < \Psi, \Psi, A >,\ < \Psi, A, \Psi >.$$

Στο πρώτο αντιστοιχεί ο προτασιακός τύπος $\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2$, στο δεύτερο ο $\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$ και στο τρίτο ο $\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2$. Ο προτασιακός τύπος σε κανονική διαζευκτική μορφή, που αντιπροσωπεύει την f, είναι λοιπόν ο

$$(\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2).$$

Δουλεύοντας όπως στο Παράδειγμα 2.9, μπορούμε να απλοποιήσουμε τον προτασιακό τύπο αυτό ως εξής:

$$\begin{aligned}
& (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \\
\equiv\ & ((\neg p_0 \wedge \neg p_1) \wedge (\neg p_2 \vee p_2)) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) && \text{(νόμος επιμε-ριστικότητας)} \\
\equiv\ & (\neg p_0 \wedge \neg p_1) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) && \text{(νόμος αποκλεισμού τρίτου και νόμος απορρόφησης)} \\
\equiv\ & \neg p_0 \wedge (\neg p_1 \vee (p_1 \wedge \neg p_2)) && \text{(νόμος επιμεριστικότητας)} \\
\equiv\ & \neg p_0 \wedge ((\neg p_1 \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)) && \text{(νόμος επιμεριστικότητας)} \\
\equiv\ & \neg p_0 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2) && \text{(νόμος απορρόφησης)}
\end{aligned}$$

Σχόλιο. Ελπίζω να μην είχατε πρόβλημα με το πρώτο μέρος, αλλιώς διαβάστε πάλι το Παράδειγμα 2.10. Το δεύτερο μέρος ήταν λίγο δυσκολότερο, έτσι; Αν σας φάνηκε πολύ δύσκολο, καλό θα ήταν να ξαναδείτε τους νόμους και το Παράδειγμα 2.9.

Άσκηση 2.9.

Κατασκευάζουμε κατ' αρχήν τον πίνακα αλήθειας του προτασιακού τύπου, για να δούμε για ποιες τριάδες τιμών των μεταβλητών του παίρνει τιμή A.

p_0	p_2	p_3	$\neg p_0$	$p_2 \to \neg p_0$	$(p_2 \to \neg p_0) \vee p_3$	$p_0 \to ((p_2 \to \neg p_0) \vee p_3)$
A	A	A	Ψ	Ψ	A	A
A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	Ψ	A	A	A
A	Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A
Ψ	A	A	A	A	A	A
Ψ	A	Ψ	A	A	A	A
Ψ	Ψ	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	A	A	A

Άρα ο ζητούμενος προτασιακός τύπος είναι ο εξής:

$$\begin{aligned}(p_0 \wedge p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge p_1 \wedge p_2)\\ \vee(\neg p_0 \wedge p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2).\end{aligned}$$

Σχόλιο. Αν βρήκατε ή προσπαθήσατε να βρειτε έναν προτασιακό τύπο, στον οποίο εμφανίζονται οι προτασιακές μεταβλητές p_0, p_2, p_3, δεν πειράζει. Όπως αναφέρθηκε, δεν έχει ουσιαστική σημασία ποιες μεταβλητές θα χρησιμοποιήσουμε, αρκεί να είναι διαφορετικές.

Άσκηση 2.10.

$$\begin{array}{cll} & p_0 \to ((p_2 \to \neg p_0) \vee p_3) & \\ \equiv & \neg p_0 \vee ((\neg p_2 \vee \neg p_0) \vee p_3) & \text{(1ος νόμος αντικατάστασης)} \\ \equiv & \neg p_0 \vee (\neg(p_2 \wedge p_0) \vee \neg\neg p_3) & \text{(νόμος de Morgan} \\ & & \text{και νόμος διπλής άρνησης)} \\ \equiv & \neg p_0 \vee \neg((p_2 \wedge p_0) \wedge \neg p_3) & \text{(4ος νόμος αντικατάστασης)} \\ \equiv & \neg(p_0 \wedge (p_2 \wedge p_0) \wedge \neg p_3) & \text{(4ος νόμος αντικατάστασης)} \end{array}$$

Σχόλιο. Αν ακολουθήσατε άλλη σειρά αντικατάστασης των ανεπιθύμητων συνδέσμων, δεν υπάρχει πρόβλημα – όπως σε άλλες περιπτώσεις, υπάρχουν πολλοί τρόποι να οδηγηθεί κάποιος στο αποτέλεσμα. Αν, όμως, δεν καταφέρατε να φτάσετε σε προτασιακό τύπο μόνο με τους συνδέσμους $\neg, \wedge$, τότε καλό θα ήταν να ξαναδείτε τους νόμους αντικατάστασης.

Άσκηση 2.11.

Για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ ισχύουν

$$\neg\varphi \equiv \varphi \downarrow \varphi, \;\; \varphi \wedge \psi \equiv (\varphi \downarrow \varphi) \downarrow (\psi \downarrow \psi).$$

Αφού το $\{\neg, \wedge\}$ είναι πλήρες, το ίδιο ισχύει και για το $\{\downarrow\}$.

Σχόλιο. Αν πετύχατε, ωραία, σκεφτήκατε έξυπνα. Στην περίπτωση που δυσκολευτήκατε, ίσως ξεχάσατε ποια έκφραση της ελληνικής γλώσσας κρύβεται πίσω από το σύνδεσμο $\{\downarrow\}$.

Άσκηση 2.12.

Το ζητούμενο προκύπτει από την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\neg\varphi \to \neg\varphi$	τυπ. θεώρημα
2.	$(\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi))$	ΑΣ1
3.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)$	1, 2, MP
4.	$(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)$	ΑΣ3
5.	$[(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)] \to$ $[\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi))]$	ΑΣ1
6.	$\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi))$	4, 5, MP
7.	$[\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi))] \to$ $[(\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to (\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi))]$	ΑΣ2
8.	$[\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)] \to [\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)]$	6, 7, MP
9.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\varphi)$	ΑΣ1
10.	$\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)$	8, 9, MP
11.	$[\neg\neg\varphi \to ((\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi)] \to$ $[(\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)]$	ΑΣ2
12.	$(\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	10, 11, MP
13.	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	3, 12, MP

Σημειώνουμε ότι, αν «παραγεμίσουμε» την τυπική απόδειξη του Παραδείγματος 2.15, όπως μας υποβάλλει η απόδειξη του Θεωρήματος Απαγωγής, θα πάρουμε μια τυπική απόδειξη που περιέχει την παραπάνω και τρεις επιπλέον προτασιακούς τύπους (οι οποίοι δεν είναι απαραίτητοι).

Σχόλιο. Αν κατασκευάσατε την παραπάνω ή μια άλλη τυπική απόδειξη, μπράβο, έχετε εξοικειωθεί σε μεγάλο βαθμό με το αξιωματικό σύστημα ΠΛ. Αν δεν τα καταφέρατε, δεν πειράζει, είχατε δύσκολη δουλειά.

Άσκηση 2.13.

Το ερώτημα είναι ισοδύναμο με το κατά πόσο το σύνολο αυτό είναι ικανοποιήσιμο. ´Εστω ότι υπάρχει αποτίμηση a που το ικανοποιεί, δηλαδή

$$\overline{a}(\neg p_2 \wedge p_3 \to p_1) = A \tag{2.2}$$

$$\overline{a}(p_2 \to (\neg p_1 \to p_3)) = A \tag{2.3}$$

και

$$\overline{a}(p_1 \leftrightarrow \neg p_3) = A. \tag{2.4}$$

Λόγω της 2.4, θα ισχύουν οι

$$a(p_1) = A,\ a(p_3) = \Psi \tag{2.5}$$

ή

$$a(p_1) = \Psi,\ a(p_3) = A. \tag{2.6}$$

Οι 2.5 συμβιβάζονται με τις 2.2, 2.3, διότι από τις 2.5 προκύπτουν οι $a(p_1) = A$, $\overline{a}(\neg p_1 \rightarrow p_3) = A$. Άρα, το σύνολο είναι ικανοποιήσιμο.

Σχόλιο. Αν καταλάβατε ότι έπρεπε να χρησιμοποιήσετε την ισοδύναμη έννοια της ικανοποιησιμότητας, πολύ ωραία. Αν, όμως, προσπαθήσατε να δείξετε ότι δεν υπάρχει τυπική απόδειξη μιας αντίφασης από τις υποθέσεις αυτές, σκεφτήκατε σωστά, αλλά δεν υπήρχε δυνατότητα αποτελεσματικού ελέγχου, αφού το σύνολο των τυπικών αποδείξεων είναι άπειρο.

Λύσεις Δραστηριοτήτων

Δραστηριότητα 2.1.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ.

Ας υποθέσουμε ότι ο φ είναι προτασιακή μεταβλητή, έστω η p_i. Τότε για οποιεσδήποτε αποτιμήσεις a_1, a_2, αν αυτές συμφωνούν στην τιμή που δίνουν στην p_i, τότε προφανώς $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)$.

Έστω τώρα ότι ο προτασιακός τύπος φ έχει την ιδιότητα και θέλουμε να δείξουμε ότι και ο $\neg\varphi$ έχει την ιδιότητα. Θεωρούμε δυο τυχούσες αποτιμήσεις a_1, a_2 που συμφωνούν στις προτασιακές μεταβλητές του $\neg\varphi$. Τότε οι a_1, a_2 συμφωνούν στις προτασιακές μεταβλητές του φ. Συνεπώς, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ισχύει $\overline{a_1}(\varphi) = \overline{a_2}(\varphi)$. Όμως, $\overline{a_1}(\neg\varphi) = F_\neg(\overline{a_1}(\varphi))$ και $\overline{a_2}(\neg\varphi) = F_\neg(\overline{a_1}(\varphi))$, επομένως $\overline{a_1}(\neg\varphi) = \overline{a_2}(\neg\varphi)$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Όμοια δείχνουμε ότι αν οι φ, ψ έχουν την ιδιότητα, τότε την έχουν και οι $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ κ.ο.κ.

Δραστηριότητα 2.2.

α) Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ. Η ιδιότητα που μας ενδιαφέρει να δείξουμε ότι έχουν όλοι οι προτασιακοί τύποι είναι η εξής: για όλες τις αποτιμήσεις a, b, αν η b ορίζεται μέσω της a και ο προτασιακός τύπος φ^* ορίζεται από τον φ όπως στη διατύπωση της δραστηριότητας, τότε $\overline{b}(\varphi) = \overline{a}(\varphi^*)$. (Υποτίθεται ότι μας έχει δοθεί μια συγκεκριμένη ακολουθία προτασιακών τύπων $\varphi_0, \varphi_1, \dots$.)

Έστω κατ' αρχήν ότι ο φ είναι προτασιακή μεταβλητή, ας πούμε η p_i. Τότε φ^* είναι ο προτασιακός τύπος φ_i και η ισότητα $\overline{b}(\varphi) = \overline{a}(\varphi^*)$ ισχύει προφανώς, λόγω του ορισμού της αποτίμησης b.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο φ έχει την ιδιότητα και θέλουμε να δείξουμε ότι την έχει και ο $\neg\varphi$. Παρατηρούμε ότι ο $(\neg\varphi)^*$ είναι ο ίδιος με τον $(\neg\varphi^*)$, αφού η αντικατάσταση προτασιακών μεταβλητών γίνεται μέσα στον φ. Επίσης, $\overline{b}(\neg\varphi) = F_\neg(\overline{b}(\varphi))$ και $\overline{a}(\neg\varphi^*) = F_\neg(\overline{a}(\varphi^*))$. Άρα $\overline{b}(\neg\varphi) = \overline{a}((\neg\varphi)^*)$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Όμοια δείχνουμε ότι οι $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ κ.ο.κ. έχουν την ιδιότητα, όταν οι φ, ψ έχουν την ιδιότητα.

β) Έστω ότι ο φ είναι ταυτολογία. Θέλουμε να δείξουμε ότι και ο φ^* είναι ταυτολογία. Θεωρούμε λοιπόν τυχούσα αποτίμηση a και ορίζουμε την αποτίμηση b, όπως παραπάνω. Τότε, $\overline{b}(\varphi) = \overline{a}(\varphi^*)$ και $\overline{b}(\varphi) = A$, αφού ο φ είναι ταυτολογία. Άρα, $\overline{a}(\varphi^*) = A$, που είναι το ζητούμενο.

Δραστηριότητα 2.3.

Για συντομία, γράφουμε $*_k$ αντί για $\overline{a}(\varphi *_k \psi)$, $k = 1, 2, \ldots, 9$.

$\overline{a}(\varphi)$	$\overline{a}(\psi)$	$*_1$	$*_2$	$*_3$	$*_4$	$*_5$	$*_6$	$*_7$	$*_8$	$*_9$
A	A	A	A	A	A	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
A	Ψ	A	A	A	Ψ	A	A	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A	Ψ	Ψ	A	A	Ψ
Ψ	Ψ	A	A	Ψ	Ψ	A	Ψ	A	Ψ	Ψ

Δραστηριότητα 2.4.

(i) Αρκεί, με βάση το Θεώρημα Απαγωγής, να δείξουμε ότι $\{\neg\varphi, \varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \psi$, πράγμα που προκύπτει από την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\neg\varphi$	υπόθεση
2.	φ	υπόθεση
3.	$\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	ΑΣ1
4.	$\neg\psi \to \neg\varphi$	1, 3, MP
5.	$\varphi \to (\neg\psi \to \varphi)$	ΑΣ1
6.	$\neg\psi \to \varphi$	2, 5, MP
7.	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$	ΑΣ3
8.	$(\neg\psi \to \varphi) \to \psi$	4, 7, MP
9.	ψ	6, 8, MP

(iii) Αρκεί, με βάση το Θεώρημα Απαγωγής, να δείξουμε ότι

$$\{\varphi, \neg\psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg(\varphi \to \psi).$$

Με βάση το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\neg\psi.$$

Αυτό, όμως, επαληθεύεται εύκολα:

1.	φ	υπόθεση
2.	$\varphi \to \psi$	υπόθεση
3.	ψ	1, 3, MP
4.	$\psi \to \neg\neg\psi$	Άσκηση 2.11 (μέρος α))
5.	$\neg\neg\psi$	3, 4, MP.

Δραστηριότητα 2.5.

Ας υποθέσουμε ότι οι προτασιακές μεταβλητές, που εμφανίζονται στο φ, είναι μεταξύ των $p_0, ..., p_k$ και αυτές που εμφανίζονται στον ψ είναι μεταξύ των $p_0, ..., p_l$, όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ισχύει $k \geq l$. Προφανώς, οι προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται στον $\varphi \to \psi$ είναι μεταξύ των $p_0, ..., p_k$. Θεωρούμε μια αποτίμηση a. Από την επαγωγική υπόθεση, ισχύουν οι

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \overline{\varphi} \tag{2.7}$$

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_l}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \overline{\psi}. \tag{2.8}$$

Λόγω της παρατήρησης 5) μετά τον Ορισμό 2.10, από την 2.8 έπεται η:

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \overline{\psi}. \tag{2.9}$$

Αν $\overline{a}(\varphi \to \psi) = \Psi$, οπότε $\overline{a}(\varphi) = A$ και $\overline{a}(\psi) = \Psi$, θα έχουμε

$$\overline{\varphi \to \psi} = \neg(\varphi \to \psi),\ \overline{\varphi} = \varphi \text{ και } \overline{\psi} = \neg\psi. \tag{2.10}$$

Όμως από το (iii) της Δραστηριότητας 2.4, έχουμε ότι

$$\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)). \tag{2.11}$$

Από τις 2.7, 2.9, 2.10 και 2.11 συμπεραίνουμε ότι

$$\{\overline{p_0}, ..., \overline{p_k}\} \vdash_{\Pi\Lambda} \overline{\varphi \to \psi},$$

δηλαδή ότι ισχύει το ζητούμενο.

Αν $\overline{a}(\varphi \to \psi) = A$, οπότε $\overline{a}(\varphi) = \Psi$ ή $\overline{a}(\psi) = A$, θα έχουμε

$$\overline{\varphi \to \psi} = \varphi \to \psi,\ \overline{\varphi} = \neg\varphi \text{ ή } \overline{\psi} = \psi. \tag{2.12}$$

Αν ισχύει $\overline{a}(\varphi) = \Psi$, τότε το ζητούμενο έπεται από τις 2.7, 2.12 και το γεγονός ότι $\vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ (δες Δραστηριότητα 2.4).

Αν ισχύει $\overline{a}(\psi) = A$, τότε το ζητούμενο έπεται από τις 2.9, 2.12 και το γεγονός ότι $\vdash_{\Pi\Lambda} \psi \to (\varphi \to \psi)$ (δες $A\Sigma 1$).

Σε κάθε περίπτωση, λοιπόν, ισχύει το ζητούμενο.

Ασκήσεις Ανακεφαλαίωσης

Άσκηση 2.1. Έστω $f, g : T(\Gamma_0) \to \mathbf{N}$ οι συναρτήσεις που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} f(p) = 0 & g(p) = 0 \\ f(\neg\varphi) = f(\varphi) + 1 & g(\neg\varphi) = g(\varphi) + 1 \\ f(\varphi \vee \psi) = f(\varphi) + f(\psi) + 1 & g(\varphi \vee \psi) = max(g(\varphi), g(\psi)) + 1 \end{array}$$

και όμοια για τους $\wedge, \to, \leftrightarrow$ αντί για $\vee$.
α) Βρείτε τους αριθμούς $f(((p_1 \to p_2) \wedge ((\neg p_2) \to p_0)))$, $g(((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \wedge (\neg p_3)))$.
β) Δείξτε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ ισχύει $g(\varphi) \leq f(\varphi)$.
(**Σημείωση.** Για τυχόντα προτασιακό τύπο φ, η τιμή $g(\varphi)$ δείχνει το «βάθος» του δενδροδιαγράμματος του φ, ενώ η τιμή $f(\varphi)$ δείχνει την πολυπλοκότητα του φ, δηλαδή το πλήθος των εμφανίσεων συνδέσμων στον φ.)

Άσκηση 2.2. Συμπληρώστε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4, αποδεικνύοντας ότι:
α) το σύνολο $\overline{a}$ είναι συνάρτηση,
β) το πεδίο ορισμού της $\overline{a}$ είναι το $T(\Gamma_0)$,
γ) η $\overline{a}$ είναι αποδεκτή συνάρτηση και
δ) η $\overline{a}$ είναι η μοναδική αποδεκτή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $T(\Gamma_0)$.

Άσκηση 2.3. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varphi, \psi \in T(\Gamma_0)$, $\Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ ισχύουν

α) $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$, ανν $\Sigma \models \varphi \to \psi$

β) $\varphi \equiv \psi$, ανν $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Άσκηση 2.4. Αποδείξτε την ακόλουθη **Αρχή του Δυϊσμού**:

Έστω ότι στον προτασιακό τύπο φ δεν εμφανίζονται σύνδεσμοι διαφορετικοί από τους $\neg, \vee, \wedge$. Έστω φ^* ο προτασιακός τύπος που παίρνουμε από το φ εναλλάσσοντας τα $\wedge, \vee$ και αντικαθιστώντας κάθε προτασιακή μεταβλητή με την άρνησή της. Τότε $\neg\varphi \equiv \varphi^*$.

Άσκηση 2.5. Αποδείξτε τους **νόμους απορρόφησης**, δηλαδή ότι για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ ισχύουν

α) αν $\varphi \models \psi$, τότε $\varphi \wedge \psi \equiv \varphi$
β) αν $\varphi \models \psi$, τότε $\varphi \vee \psi \equiv \psi$.

(**Σημείωση.** Οι νόμοι αυτοί αντιστοιχούν στις εξής συνολοθεωρητικές αρχές:

α) αν $X \subseteq Y$, τότε $X \cap Y = X$
β) αν $X \subseteq Y$, τότε $X \cup Y = Y$.)

Άσκηση 2.6. Για τυχόντα προτασιακό τύπο φ ορίζουμε αναδρομικά το σύνολο των «υποπροτασιακών τύπων του φ», συμβολικά Υπο(φ), ως εξής:

$$\begin{aligned}&\text{Υπο}(p) = \{p\}\\&\text{Υπο}(\neg\varphi) = \text{Υπο}(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}\\&\text{Υπο}(\varphi \wedge \psi) = \text{Υπο}(\varphi) \cup \text{Υπο}(\psi) \cup \{\varphi \wedge \psi\}\end{aligned}$$

και όμοια για $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ στη θέση του $\wedge$.

Έστω τώρα φ, ψ, χ προτασιακοί τύποι με $\chi \in$Υπο(φ). Ορίζουμε τον προτασιακό τύπο $\varphi[\chi/\psi]$ ως αυτό που προκύπτει από τον φ, αν αντικαταστήσουμε τον χ, όπου εμφανίζεται στον φ, με τον ψ. Δείξτε ότι αν $\chi \equiv \psi$, τότε $\varphi \equiv \varphi[\chi/\psi]$.

Άσκηση 2.7. Δείξτε ότι το σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι πλήρες.

Άσκηση 2.8. Δείξτε ότι το $\{+, \leftrightarrow\}$ δεν είναι πλήρες.

Άσκηση 2.9. Ελέγξτε ότι

α) όλα τα αξιώματα είναι ταυτολογίες και

β) ο κανόνας MP διατηρεί την ταυτολογική συνεπαγωγή, δηλαδή για οποιοδήποτε σύνολο προτασιακών τύπων και οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ, αν $T \models \varphi \rightarrow \psi$ και $T \models \varphi$, τότε $T \models \psi$.

Άσκηση 2.10. Αποδείξτε το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής.

Άσκηση 2.11. Δείξτε ότι για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ οι ακόλουθοι προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα του ΠΛ:

$$\begin{array}{ll} \text{α)} & \varphi \to \neg\neg\varphi \\ \text{β)} & (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi) \\ \text{γ)} & (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi) \\ \text{δ)} & (\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi). \end{array}$$

Άσκηση 2.12. Ελέγξτε ότι πράγματι τα συστήματα ΠΛ, ΠΛ$'$ είναι ισοδύναμα, δηλαδή έχουν τα ίδια τυπικά θεωρήματα.

Άσκηση 2.13. Για τυχόν σύνολο προτασιακών τύπων T, με $\overline{T}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{\varphi \in T(\Gamma_0) : T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi\}$. Δείξτε ότι για τυχόντα $T, \Sigma \subseteq T(\Gamma_0)$ ισχύουν τα εξής:

$$\begin{array}{llll} \text{α)} & \overline{\overline{T}} = \overline{T} & \text{β)} & \overline{T \cap \Sigma} \subseteq \overline{T} \cap \overline{\Sigma} \\ \text{γ)} & \overline{T} \cup \overline{\Sigma} \subseteq \overline{T \cup \Sigma} & \text{δ)} & T(\Gamma_0) - \overline{T} \subseteq \overline{T(\Gamma_0) - T}. \end{array}$$

Βρείτε παραδείγματα συνόλων T, Σ για τα οποία ισχύει $\subset$ (γνήσιο υποσύνολο) στα β)-δ).

Άσκηση 2.14. Δείξτε ότι για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T, αν το T είναι ικανοποιήσιμο, τότε το T είναι συνεπές.

Άσκηση 2.15. Δείξτε ότι οι εξής προτασιακοί τύποι είναι τυπικά θεωρήματα του ΠΛ:

$$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to \chi, \;\; [\varphi \to (\psi \to \chi)] \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \to \chi).$$

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Μητακίδης: *Από τη Λογική στο Λογικό Προγραμματισμό και την Prolog*, Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1992.

[2] Μ. Μπόριτσιτς: *Λογική και Απόδειξη*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1995.

[3] Α. Τζουβάρας: *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1987.

[4] H. D. Ebbinghaus, J. Flum & W. Thomas: *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[5] H. B. Enderton: *A mathematical introduction to logic*, Academic Press, New York, 1972.

[6] J. H. Gallier: *Logic for Computer Science*, J. Wiley & Sons, New York, 1987.

[7] E. Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*, Wadsworth & Brooks/Cole, Belmont, California, 1987.

Κατηγορηματική Λογική

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Στόχος

Στο παρόν κεφάλαιο στόχος μας είναι η περιγραφή της μελέτης επιχειρημάτων με χρήση τυπικών γλωσσών, οι οποίες επιτρέπουν την ανάλυση με βάση όχι μόνο συνδετικές λέξεις, όπως έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά και με εκφράσεις, όπως «για κάθε», «υπάρχει», και με εκφράσεις που εκφράζουν ιδιότητες. Αφού δοθεί ένας γενικός ορισμός των προτάσεων, καθώς και ένας ορισμός αλήθειας για τέτοιες γλώσσες, θα ασχοληθούμε με τη σημασιολογική ανάλυση επιχειρημάτων, δηλαδή τον έλεγχο εγκυρότητας με βάση την αλήθεια των προτάσεων που εμπλέκονται σ' αυτά. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με το ερώτημα αν κάθε τύπος μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή, στην οποία εμφανίζονται μόνο μερικά από τα σύμβολα συνδέσμων και ποσοδεικτών, κατ' αναλογία προς το θεώρημα κανονικής διαζευκτικής μορφής, και θα δώσουμε παραδείγματα μετατροπής τύπων σε κανονική μορφή. Κατόπιν θα ορίσουμε και θα μελετήσουμε ένα αξιωματικό σύστημα, στα πλαίσια του οποίου γίνεται, με τρόπο ανάλογο αυτού που είδαμε στην ενότητα 2.4, μηχανική παραγωγή προτάσεων. Τέλος, θα αναφερθούμε στην ισοδυναμία της σημασιολογικής και της συντακτικής προσέγγισης και στις βασικές ιδέες της απόδειξης του σημαντικού αυτού αποτελέσματος.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει το κεφάλαιο αυτό, θα μπορείτε να:

- *αποφασίζετε αν μια ακολουθία συμβόλων είναι τύπος ή όχι,*
- *εφαρμόζετε την αρχή της επαγωγής για να δείξετε ότι μια ιδιότητα ισχύει για όλους τους τύπους,*
- *δίνετε παραδείγματα τύπων και λογικά αληθών τύπων,*
- *ορίζετε ερμηνείες για διάφορες τυπικές γλώσσες,*
- *ελέγχετε αν ένας τύπος αληθεύει ή όχι σε κάποια ερμηνεία,*
- *βρίσκετε την κανονική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμη με έναν τύπο,*
- *αποφασίζετε αν ένας τύπος είναι ή όχι αξίωμα του κατηγορηματικού λογισμού,*
- *ελέγχετε αν μια ακολουθία τύπων αποτελεί ή όχι τυπική απόδειξη,*
- *κατασκευάζετε αποδείξεις στα πλαίσια του κατηγορηματικού λογισμού,*
- *εφαρμόζετε βασικά θεωρήματα που ισχύουν για τον κατηγορηματικό λογισμό,*
- *αναφέρετε τις κύριες ιδέες στις οποίες στηρίζεται η εγκυρότητα και η πληρότητα του κατηγορηματικού λογισμού.*

Έννοιες-κλειδιά

- *πρωτοβάθμια γλώσσα,*
- *τύπος,*
- *ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής,*
- *αποτίμηση,*
- *ορισμός αλήθειας του Tarski,*
- *όρος,*
- *δομή,*
- *πρόταση,*
- *μοντέλο,*
- *λογική συνεπαγωγή,*

- *λογικά αληθής τύπος,*
- *λογικά ισοδύναμοι τύποι,*
- *νόμοι ποσοδεικτών,*
- *κανονική ποσοδεικτική μορφή,*
- *ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων,*
- *συμπάγεια,*
- *αλφαβητική παραλλαγή*
- *πλήρες σύνολο συνδέσμων και ποσοδεικτών,*
- *κατηγορηματικός λογισμός,*
- *μη λογικά αξιώματα,*
- *γενίκευση,*
- *εγκυρότητα,*
- *πληρότητα,*
- *λογικά αξιώματα,*
- *αντικαταστάσιμη μεταβλητή,*
- *γενίκευση σταθερής,*
- *συνέπεια,*
- *σταθερές Henkin.*

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Η τυπική γλώσσα που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο έχει πολύ περιορισμένες εκφραστικές δυνατότητες, υπάρχει λοιπόν ανάγκη αναζήτησης τυπικών γλωσσών, στις οποίες μπορούν να αναπαρασταθούν με μεγαλύτερη ακρίβεια επιχειρήματα των φυσικών γλωσσών. Ας δούμε ένα παράδειγμα επιχειρήματος στα ελληνικά, το οποίο όλοι αποδεχόμαστε ως έγκυρο, η εγκυρότητα του οποίου όμως δεν προκύπτει αν το μεταγράψουμε στη γλώσσα Γ_0*:*

Κάθε ακέραιος (αριθμός) είναι πραγματικός (αριθμός).
Ο -8 *είναι ακέραιος (αριθμός).*
Συνεπώς, ο -8 *είναι πραγματικός (αριθμός).*

Αφού στις προτάσεις του επιχειρήματος δεν εμφανίζονται συνδετικές λέξεις, η αναπαράστασή τους στη Γ_0 *μπορεί να γίνει μόνο από προτασιακές μεταβλητές, ας πούμε τις* p, q, r *αντίστοιχα. Τότε όμως το επιχείρημα αυτό έχει τη μορφή*

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

η οποία βέβαια δεν είναι έγκυρη επιχειρηματική μορφή, δηλαδή δεν ισχύει ότι οι προτασιακοί τύποι p, q συνεπάγονται πάντα ταυτολογικά τον προτασιακό τύπο r.

Φυσικά, η εγκυρότητα του αρχικού επιχειρήματος στηρίζεται στο γεγονός ότι οι προτάσεις του αναφέρονται με συγκεκριμένο τρόπο σε δύο ιδιότητες. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τυπικές γλώσσες, που μας παρέχουν τη δυνατότητα να αναλύσουμε με δύο τρόπους τέτοια επιχειρήματα. Όπως και στην προτασιακή λογική, η σημασιολογική θεώρηση γίνεται με βάση δυνατές ερμηνείες, δηλαδή νοήματα, ενώ η συντακτική με βάση κανόνες που αφορούν στον τύπο, δηλαδή στην εσωτερική του μορφή. Οι δύο προσεγγίσεις είναι ισοδύναμες, αλλά η απόδειξη ότι αυτό ισχύει είναι πολύ δυσκολότερη από αυτή του αντίστοιχου αποτελέσματος για την προτασιακή λογική.

3.1 Πρωτοβάθμιες Γλώσσες

Στόχος

Αρχικός στόχος είναι να δοθεί γενικός ορισμός των τυπικών γλωσσών, που χρησιμοποιούνται για την κατηγορηματική λογική, και εκφράσεων τέτοιων γλωσσών, που αντιστοιχούν σε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. Δεύτερος στόχος είναι να καθοριστούν οι ερμηνείες στα πλαίσια των οποίων οι εκφράσεις των γλωσσών αυτών αποκτούν νόημα. Τελικός στόχος είναι να δοθούν οι κανόνες με βάση τους οποίους μια πρόταση μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει αυτή την ενότητα, θα μπορείτε να:

- *αναφέρετε τις κατηγορίες συμβόλων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας,*
- *δίνετε παραδείγματα πρωτοβάθμιων γλωσσών,*
- *περιγράφετε πώς κατασκευάζεται ένας τύπος και να κατασκευάζετε το δενδροδιάγραμμα ενός τύπου,*
- *εφαρμόζετε την αρχή της επαγωγής για τύπους,*
- *δίνετε παραδείγματα δομών για πρωτοβάθμιες γλώσσες,*
- *προσδιορίζετε την τιμή αλήθειας ενός τύπου, αν σας δοθεί μια ερμηνεία.*

Έννοιες-κλειδιά

- *πρωτοβάθμια γλώσσα,*
- *τύπος,*
- *πρόταση,*
- *ορισμός αλήθειας του Tarski,*
- *μοντέλο.*
- *όρος,*
- *ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής,*
- *δομή,*
- *αποτίμηση,*

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Όπως προαναφέρθηκε, η τυπική γλώσσα της προτασιακής λογικής επιτρέπει μια πολύ χοντροκομμένη ανάλυση επιχειρημάτων. Για λεπτότερη ανάλυση απαιτείται η χρήση μιας τυπικής γλώσσας, η οποία δίνει τη δυνατότητα αναπαράστασης εκφράσεων που δηλώνουν ποσό, αλλά και της βασικής δομής «Υποκείμενο - Κατηγόρημα» σε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. Τέτοιες τυπικές γλώσσες μοιάζουν με γλώσσες που χρησιμοποιούνται παραδοσιακά στα Μαθηματικά και έχουν δύο κύριες κατηγορίες συμβόλων: αυτά που αφορούν μόνο στη Λογική, δηλαδή το γενικό υπόβαθρο ανάλυσης επιχειρημάτων, και αυτά που αφορούν στο συγκεκριμένο κλάδο μελέτης, παραδείγματος χάρη τις ιδιότητες που ορίζονται μέσω της πρόσθεσης, του πολ/σμού και των διακεκριμένων στοιχείων 0, 1 στα πλαίσια των φυσικών αριθμών.

Οι γλώσσες που θα μας απασχολήσουν, οι οποίες αποκαλούνται «πρωτοβάθμιες» (θα δούμε αργότερα γιατί), έχουν ακριβώς τα ίδια σύμβολα της πρώτης κατηγορίας: μεταβλητές, συνδετικά σύμβολα, σύμβολο ισότητας, σύμβολα ποσότητας και σημεία στίξης. Οι μεταβλητές υποτίθεται ότι έχουν ως τιμές στοιχεία κάποιου συνόλου – προσοχή, η φύση τους είναι ριζικά διαφορετική από εκείνη των προτασιακών μεταβλητών. Το σύμβολο ισότητας αντιπροσωπεύει τη σχέση ταυτότητας στα ελληνικά, ενώ τα σύμβολα ποσότητας αντιστοιχούν στις εκφράσεις «για κάθε», «υπάρχει» της ελληνικής γλώσσας. Τα συνδετικά σύμβολα και τα σημεία στίξης χρησιμοποιούνται ακριβώς όπως στην προτασιακή λογική.

Από την άλλη πλευρά, μια πρωτοβάθμια γλώσσα έχει σύμβολα που αντιπροσωπεύουν ιδιότητες, απεικονίσεις και διακεκριμένα στοιχεία. Εδώ υπάρχουν άπειρες δυνατότητες, ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο θέλουμε να αναφέρεται η τυπική γλώσσα. Παραδείγματος χάρη, μπορεί να υπάρχουν μόνο σύμβολα ιδιοτήτων ή σύμβολα απεικονίσεων ή ... Με τα σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας κατασκευάζονται εκφράσεις που αντιστοιχούν σε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας, καθεμία από τις οποίες μπορεί να έχει μόνο μία από τις δύο δυνατές τιμές αλήθειας, όπως και στην προτασιακή λογική. Κάθε τέτοια έκφραση κατασκευάζεται με μοναδικό τρόπο από στοιχειώδεις συνιστώσες. Η αντιστοίχιση τιμής αλήθειας σε μια έκφραση με νόημα πρωτοβάθμιας γλώσσας είναι διαδικασία ουσιαστικά πιο σύνθετη από ό,τι είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο – ο ρόλος των συνδετικών λέξεων είναι ο ίδιος, αλλά η ύπαρξη νέων συμβόλων αλλάζει σημαντικά την κατάσταση.

Ας αρχίσουμε με τα σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας:

α) $x_0, x_1, x_2, ...$, που καλούνται «μεταβλητές»,

β) οι σύνδεσμοι της Γ_0,

γ) οι παρενθέσεις της Γ_0,

δ) $\approx$, που καλείται «ισότητα»,

ε) $\forall$, που καλείται «καθολικός ποσοδείκτης», και $\exists$, που καλείται «υπαρξιακός ποσοδείκτης»,

ζ) ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{P_i | i \in I\}$, τα στοιχεία του οποίου καλούνται «κατηγορηματικά σύμβολα»,

η) ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{f_j | j \in J\}$, τα στοιχεία του οποίου καλούνται «συναρτησιακά σύμβολα»,

θ) ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{c_k | k \in K\}$, τα στοιχεία του οποίου καλούνται «σύμβολα (ατομικών) σταθερών».

Σε κάθε κατηγορηματικό σύμβολο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός $n \geq 1$, ο οποίος δείχνει πόσες θέσεις μεταβλητών έχει το σύμβολο αυτό – λέμε ότι το σύμβολο είναι «n-μελές». Όμοια, σε κάθε συναρτησιακό σύμβολο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός $m \geq 1$ – λέμε ότι το σύμβολο είναι «m-θέσιο».

Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο Γ_1 για μια τυχούσα πρωτοβάθμια γλώσσα.
Συμβολίζουμε το σύνολο των συμβόλων σταθερών της Γ_1 με $\Sigma\tau(\Gamma_1)$ και των μεταβλητών της με $M(\Gamma_1)$.
Επίσης χρησιμοποιούμε τις εξής συντακτικές μεταβλητές:
$x, y, z, ...$ με τιμές μεταβλητές της Γ_1
$P, Q, R, ...$ με τιμές κατηγορηματικά σύμβολα της Γ_1
$f, g, h, ...$ με τιμές συναρτησιακά σύμβολα της Γ_1
$c, d, e, ...$ με τιμές σύμβολα σταθερών της Γ_1.

Παρατηρήσεις.

1) Τα σύμβολα των κατηγοριών β) έως ε) καλούνται «λογικά σύμβολα», διότι έχουν πάντα το ίδιο νόημα, που στηρίζεται στη διαισθητική Λογική, ενώ εκείνα

των ζ) έως θ) καλούνται «μη λογικά σύμβολα» και μπορούν να ερμηνευθούν με διάφορους τρόπους. Τα σύμβολα των κατηγοριών α) έως ε) είναι κοινά σ' όλες τις πρωτοβάθμιες γλώσσες. Πρέπει να τονιστεί ότι μια πρωτοβάθμια γλώσσα μπορεί να μην έχει καθόλου κατηγορηματικά ή συναρτησιακά σύμβολα ή σύμβολα σταθερών, πρέπει όμως να έχει τουλάχιστον ένα κατηγορηματικό ή συναρτησιακό σύμβολο.
2) Μερικοί συγγραφείς περιλαμβάνουν το σύμβολο $\approx$ στα μη λογικά σύμβολα, αυτό όμως δεν επιφέρει ουσιαστικές διαφορές στην ανάπτυξη του κατηγορηματικού λογισμού. Επίσης μερικοί συγγραφείς θεωρούν τα σύμβολα σταθερών ως 0-θέσια συναρτησιακά σύμβολα.
3) Θα μπορούσαμε να επιτρέψουμε την ύπαρξη 0-θέσιων κατηγορηματικών συμβόλων, τα οποία θα αντιστοιχούσαν στις προτασιακές μεταβλητές της Γ_0. Έτσι, θα επιτυγχάναμε ενσωμάτωση του προτασιακού λογισμού στον κατηγορηματικό λογισμό – θα έπρεπε βέβαια να κάνουμε κατάλληλες τροποποιήσεις σε ό,τι ακολουθεί, κυρίως στους Ορισμούς 3.4 και 3.7. □

Προφανώς μια πρωτοβάθμια γλώσσα είναι καθορισμένη, όταν είναι καθορισμένα τα μη λογικά της σύμβολα. Συνήθως οι πρωτοβάθμιες γλώσσες που μας ενδιαφέρουν έχουν πεπερασμένο πλήθος συμβόλων των κατηγοριών ζ) έως θ).

Παραδείγματα 3.1.

α) Η γλώσσα $\Gamma_1^{\kappa\lambda}$ του καθαρού κατηγορηματικού λογισμού έχει μόνο κατηγορηματικά σύμβολα P_i, με $i \in \mathbf{N}$, και σύμβολα σταθερών $c_1, c_2, c_3, \ldots$. Η ιδέα είναι ότι η γλώσσα αυτή αφορά μόνο ιδιότητες και διακεκριμένα στοιχεία σε εντελώς γενικό πλαίσιο. Πρέπει πάντως να αναφέρουμε ότι τα συναρτησιακά σύμβολα μπορούν να θεωρηθούν ως κατηγορηματικά σύμβολα ειδικού τύπου – αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό, αν θυμηθούμε ότι, από συνολοθεωρητική άποψη, κάθε συνάρτηση είναι σχέση.
β) Η γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ της θεωρίας συνόλων έχει μόνο ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο, το $\mathbf{E}$. (Μερικοί συγγραφείς προτιμούν η $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ να έχει και ένα σύμβολο σταθερής $\emptyset$.) Στη γλώσσα αυτή μπορούμε να μεταγράψουμε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας που αφορούν στη θεωρία συνόλων – παράδειγμα θα δούμε αργότερα.
γ) Η γλώσσα $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ της θεωρίας αριθμών έχει ένα μονοθέσιο συναρτησιακό σύμ-

βολο $\prime$, δύο διθέσια συναρτησιακά σύμβολα $\oplus, \odot$ και ένα σύμβολο σταθερής $\mathbf{0}$. (Μερικοί συγγραφείς προτιμούν η $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ να έχει και ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $\prec$.) Η γλώσσα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη επιχειρημάτων που αφορούν στους φυσικούς αριθμούς. □

Στα επόμενα θα μιλάμε γενικά για μια πρωτοβάθμια γλώσσα Γ_1, εκτός αν αναφέρουμε μια συγκεκριμένη.

Ορισμός 3.1. «Έκφραση» της Γ_1 καλείται κάθε πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα της Γ_1. □

Παραδείγματος χάρη, οι ακολουθίες: $\forall x_0 \approx x_0 x_1$, $(x_1 \to \neg$ είναι εκφράσεις της Γ_1.

Χρησιμοποιούμε τα $\alpha, \beta, \gamma, ...$ ως συντακτικές μεταβλητές με τιμές στο σύνολο των εκφράσεων της Γ_1.

Ας δούμε τώρα ποιες εκφράσεις της Γ_1 θα είναι φορείς νοήματος. Οι σχετικοί ορισμοί θα γίνουν αναδρομικά, όπως για την Γ_0, έχουμε όμως περισσότερη δουλειά, αφού υπάρχουν πολλά νέα σύμβολα. Ο πρώτος μας ορισμός αφορά στα ονόματα που θα υπάρχουν για διάφορα αντικείμενα – στη Γ_0 βέβαια δεν είχαμε σύμβολα που μας επέτρεπαν κατασκευές ονομάτων.

Ορισμός 3.2. Θα λέμε ότι η έκφραση α είναι «όρος», ανν (δηλ. αν και μόνο αν)

1) $\alpha \in M(\Gamma_1) \cup \Sigma\tau(\Gamma_1)$ ή

2) η α είναι της μορφής $f\beta_1...\beta_n$, όπου f είναι n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο και $\beta_1, ..., \beta_n$ είναι ήδη κατασκευασμένοι όροι. □

Να μερικοί όροι της Γ_1, όπου f_2 είναι 1-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο, f_1 είναι 2-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο και c_3, c_5 είναι σύμβολα σταθερών της Γ_1:

$$c_5, \;\; x_3, \;\; f_1 x_1 x_5, \;\; f_2 f_1 x_1 c_3.$$

Το σύνολο των όρων της Γ_1 συμβολίζουμε με $O(\Gamma_1)$. Τα $t, r, s, ...$ χρησιμοποιούνται ως συντακτικές μεταβλητές με τιμές στο $O(\Gamma_1)$.

Σημειώσεις.

α) Για ευκολία, θα γράφουμε $f(t_1, ..., t_n)$ αντί για $ft_1...t_n$, όπου f είναι n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο και $t_1, ..., t_n$ είναι όροι.

β) Αν η Γ_1 δεν περιέχει συναρτησιακά σύμβολα, τότε οι μόνοι όροι της είναι οι μεταβλητές της και τα σύμβολα σταθερών της (αν έχει!). □

Η ιδέα είναι ότι όρος είναι όνομα αντικειμένου. Οι εκφράσεις που κατασκευάζονται με χρήση συναρτησιακών συμβόλων, με βάση το μέρος 2) του παραπάνω ορισμού μπορούν να θεωρηθούν ως «γενικευμένα πολυώνυμα» – ενώ στα συνήθη πολυώνυμα χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις της πρόσθεσης, του πολ/σμού κτλ., εδώ υπάρχει δυνατότητα χρήσης πολλών συναρτησιακών συμβόλων.

Συνεχίζουμε τώρα με τον ορισμό εκφράσεων που αντιστοιχούν στους προτασιακούς τύπους. Κάποιες από αυτές είναι στοιχειώδεις, σε αντιστοιχία με τις προτασιακές μεταβλητές, ενώ οι υπόλοιπες κατασκευάζονται από αυτές με χρήση των συνδέσμων και των ποσοδεικτών.

Ορισμός 3.3. Θα λέμε ότι η έκφραση α είναι «τύπος», ανν η α είναι της μορφής

1) $\approx t_1t_2$, όπου t_1, t_2 είναι όροι, ή

2) $Pt_1...t_n$, όπου P είναι n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο και $t_1, ..., t_n$ είναι όροι, ή

3) $(\neg\beta)$ ή $(\beta\wedge\gamma)$ ή $(\beta\vee\gamma)$ ή $(\beta \rightarrow \gamma)$ ή $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, όπου β, γ ήδη κατασκευασμένοι τύποι, ή

4) $\forall x\beta$ ή $\exists x\beta$, όπου β ήδη κατασκευασμένος τύπος και x μεταβλητή.

Ένας τύπος καλείται «ατομικός», ανν είναι της μορφής 1) ή 2). □

Μερικοί τύποι της Γ_1, όπου P_2 είναι 2-μελές κατηγορηματικό σύμβολο, f_3 είναι 2-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο και c_1 σύμβολο σταθερής είναι οι εξής:

$$\approx c_1 f_3 x_1 x_5, \ (\neg(\approx c_1 x_2 \to P_2 c_1 x_5)).$$

Το σύνολο των ατομικών τύπων της Γ_1 συμβολίζουμε με $AT(\Gamma_1)$ και των τύπων με $T(\Gamma_1)$. Τα $\varphi, \psi, \chi, ...$ χρησιμοποιούνται ως συντακτικές μεταβλητές με τιμές στο $T(\Gamma_1)$.

Σημειώσεις.

Για ευκολία,

α) θα γράφουμε $P(t_1, ..., t_n)$ αντί για $Pt_1...t_n$, όπου P n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο, και

β) θα χρησιμοποιούμε [,] και { , } αντί για (,).

Επίσης για ευκολία, θα γράφουμε

$$\begin{array}{ll} t_1 \approx t_2 \text{ αντί για } \approx t_1 t_2, & t_1 \not\approx t_2 \text{ αντί για } (\neg \approx t_1 t_2) \\ x\mathbf{E}y \text{ αντί για } \mathbf{E}xy, & x \not\mathbf{E} y \text{ αντί για } (\neg \mathbf{E}xy) \end{array}$$

Τέλος, θα χρησιμοποιούμε παραδοσιακό συναρτησιακό συμβολισμό για όρους της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$, παραδείγματος χάρη t_1' αντί για $\prime t_1$, $(t_1 \oplus t_2)$ αντί για $\oplus t_1 t_2$ κτλ., προσθέτοντας παρενθέσεις όπου χρειάζεται. □

Η ιδέα είναι ότι οι ατομικοί τύποι εκφράζουν ότι κάποια αντικείμενα ταυτίζονται ή έχουν κάποια ιδιότητα, ενώ οι μη ατομικοί τύποι αντιστοιχούν σε σύνθετες προτάσεις της ελληνικής γλώσσας, που αναλύουμε ανάλογα με τις ιδιότητες και τις σχέσεις ταυτότητας στις οποίες αναφέρονται, καθώς και τις συνδετικές και ποσοτικές εκφράσεις που περιέχουν. Παραδείγματος χάρη, ο τύπος

$$\forall x_1 \forall x_2 [x_1 \approx x_2 \leftrightarrow \forall x_3 (x_3 \mathbf{E} x_1 \leftrightarrow x_3 \mathbf{E} x_2)]$$

της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ αντιπροσωπεύει την πρόταση «Δύο σύνολα είναι ίσα, αν και μόνον αν έχουν τα ίδια στοιχεία», δηλαδή την πρόταση «Για δύο τυχόντα σύνολα, αυτά είναι ίσα, αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του πρώτου είναι και στοιχείο του δεύτερου και αντίστροφα». Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι υπάρχουν συνήθως πολλές δηλωτικές προτάσεις της ελληνικής γλώσσας που αντιπροσωπεύονται από τον ίδιο τύπο. Αυτό μπορεί να συμβεί για δυο λόγους:

α) όπως κάθε φυσική γλώσσα, η ελληνική προσφέρει μεγάλες δυνατότητες «παράφρασης», δηλαδή έκφρασης του ίδιου νοήματος με διαφορετικές λέξεις και

β) κάθε τύπος μπορεί να αποκτήσει πολλά διαφορετικά νοήματα, ανάλογα με την ερμηνεία που θα δώσουμε στα μη λογικά σύμβολα της γλώσσας (–λεπτομέρειες σε λίγο).

Για την ύπαρξη των συνόλων $O(\Gamma_1)$, $AT(\Gamma_1)$ και $T(\Gamma_1)$ μπορούμε να κάνουμε σχόλια ανάλογα με αυτά που έγιναν στο δεύτερο κεφάλαιο, σε σχέση με το σύνολο των προτασιακών τύπων. Επειδή τα σύνολα $O(\Gamma_1)$ και $T(\Gamma_1)$ ορίστηκαν αναδρομικά, ισχύει η ακόλουθη αρχή.

Θεώρημα 3.1. (Αρχή της Επαγωγής) 1) Αν $A \subseteq O(\Gamma_1)$ τέτοιο που

α) $M(\Gamma_1) \cup \Sigma\tau(\Gamma_1) \subseteq A$ και

β) $f(t_1, ..., t_n) \in A$, για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f και κάθε $t_1, ..., t_n \in A$,

τότε $A = O(\Gamma_1)$.

2) Αν $A \subseteq T(\Gamma_1)$ τέτοιο που

α) $AT(\Gamma_1) \subseteq A$ και

β) οι τύποι $(\neg\psi)$, $(\psi \wedge \chi)$, $(\psi \vee \chi)$, $(\psi \to \chi)$, $(\psi \leftrightarrow \chi)$, $\forall x\psi$, $\exists x\psi$ ανήκουν στο A, για κάθε $\psi, \chi \in A$ και x μεταβλητή,

τότε $A = T(\Gamma_1)$. □

Σημειώσεις.

1) Όπως και στο Κεφάλαιο 2, όταν εφαρμόζουμε την αρχή της επαγωγής για το $O(\Gamma_1)$ (αντίστοιχα το $T(\Gamma_1)$), λέμε ότι «δουλεύουμε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του t (αντίστοιχα του φ)». Η ιδέα είναι ότι πίσω από την παραπάνω αρχή βρίσκεται η συνηθισμένη αρχή επαγωγής, αφού η συνάρτηση «πολυπλοκότητας» $f : T(\Gamma_1) \to \mathbf{N}$ με

$$f(\varphi) = \text{αριθμός εμφανίσεων συνδέσμων και ποσοδεικτών στο } \varphi$$

μας επιτρέπει να μιλάμε για φυσικούς αριθμούς, αντί για τύπους.

Για την περίπτωση των τύπων, δείχνουμε ότι

α) κάθε ατομικός τύπος έχει την ιδιότητα και

β) αν οι τύποι ψ, χ έχουν την ιδιότητα, τότε την έχουν και οι τύποι $(\neg\psi)$, $(\psi \wedge \chi)$ κτλ.

Για το β) ελέγχουμε μόνο τρεις περιπτώσεις: για το σύνδεσμο $\neg$, για ένα διθέσιο σύνδεσμο και για έναν ποσοδείκτη – οι υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες (δες και ενότητα 3.3).
2) Σχετικά με το β) της αρχής της επαγωγής για το $T(\Gamma_1)$, θα υποθέτουμε ότι κάθε τύπος μικρότερης πολυπλοκότητας από τους $(\neg\psi)$, $(\psi \wedge \chi), \ldots, \forall x\psi$, $\exists x\psi$ έχει την ιδιότητα, όχι μόνο οι τύποι ψ και χ. Αυτή η διαφορά δεν έχει ουσιαστική σημασία για τύπους της μορφής $(\neg\psi)$ ή $(\psi \wedge \chi)$ ή $\ldots$, έχει όμως μεγάλη σημασία για τύπους της μορφής $\forall x\psi$ ή $\exists x\psi$, διότι μπορεί να χρειαστούμε την επαγωγική υπόθεση για κάποιο τύπο ψ', που δεν είναι ο ίδιος ο ψ, αλλά έχει την ίδια πολυπλοκότητα με τον ψ.
3) Πρέπει να τονιστεί είναι ότι κάθε εφαρμογή της αρχής της επαγωγής για το $T(\Gamma_1)$ απαιτεί εφαρμογή της αρχής για το $O(\Gamma_1)$. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.1

Δείξτε ότι κάθε τύπος της Γ_1 έχει τον ίδιο αριθμό δεξιών και αριστερών παρενθέσεων.

Όπως στο Κεφάλαιο 2, μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε όρος και κάθε τύπος της Γ_1 είναι μοναδικά αναγνώσιμος, δηλαδή κατασκευάζεται με βάση ένα μοναδικό δενδροδιάγραμμα από στοιχειώδεις όρους (αντίστοιχα τύπους) με τη βοήθεια συναρτησιακών συμβόλων (αντίστοιχα συνδέσμων και ποσοδεικτών).

Παράδειγμα 3.2. Στον όρο $f_2(f_1(x_1, c_3))$ αντιστοιχεί το δενδροδιάγραμμα

$$\begin{array}{c} x_1 \qquad c_3 \\ f_1(x_1, c_3) \\ | \\ f_2(f_1(x_1, c_3)) \end{array}$$

ενώ στον τύπο $\forall x_1 \forall x_2[x_1 \approx x_2 \leftrightarrow \forall x_3(x_3\mathbf{E}x_1 \leftrightarrow x_3\mathbf{E}x_2)]$ αντιστοιχεί το ακόλουθο δενδροδιάγραμμα

$$\begin{array}{c} x_3\mathbf{E}x_1 \qquad x_3\mathbf{E}x_2 \\ x_3\mathbf{E}x_1 \leftrightarrow x_3\mathbf{E}x_2 \\ x_1 \approx x_2 \qquad \forall x_3(x_3\mathbf{E}x_1 \leftrightarrow x_3\mathbf{E}x_2) \\ x_1 \approx x_2 \leftrightarrow \forall x_3(x_3\mathbf{E}x_1 \leftrightarrow x_3\mathbf{E}x_2) \\ | \\ \forall x_2[x_1 \approx x_2 \leftrightarrow \forall x_3(x_3\mathbf{E}x_1 \leftrightarrow x_3\mathbf{E}x_2)] \\ | \\ \forall x_1 \forall x_2[x_1 \approx x_2 \leftrightarrow \forall x_3(x_3\mathbf{E}x_1 \leftrightarrow x_3\mathbf{E}x_2)] \end{array}$$

□

Όπως στους προτασιακούς τύπους, έτσι και στους τύπους παραλείπουμε παρενθέσεις, σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

α) Οι εξωτερικές παρενθέσεις παραλείπονται.

β) Τα $\neg, \forall, \exists$ θεωρούνται ισχυρότερα από τα υπόλοιπα σύμβολα και τα $\wedge, \vee$ ισχυρότερα από τα $\rightarrow, \leftrightarrow$.

γ) Τα $\wedge, \vee$ θεωρούνται ισοδύναμα μεταξύ τους, όπως και τα $\rightarrow, \leftrightarrow$ και τα $\forall, \exists$.

Παράδειγμα 3.3. Σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες, ο τύπος $((\neg \forall x_1 P(x_1)) \wedge Q(x_2))$ μπορεί να γραφεί ως $\neg \forall x_1 P(x_1) \wedge Q(x_2)$. Πράγματι, αν παραλείψουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις, παίρνουμε τη μορφή $(\neg \forall x_1 P(x_1)) \wedge Q(x_2)$. Όμως το $\neg$ είναι ισχυρότερο από το $\wedge$, άρα μπορούμε να γράψουμε τον τύπο ως $\neg \forall x_1 P(x_1) \wedge Q(x_2)$. Αν βέβαια είχαμε τον τύπο $\neg \forall x_1(P(x_1)) \wedge Q(x_2))$, δε θα επιτρεπόταν να παραλείψουμε τις παρενθέσεις.

Επίσης, ο τύπος $[\forall x_2 P(x_2) \to (\exists x_1(\neg Q(x_1, x_2)) \vee R(x_1))]$ γράφεται ως $\forall x_2 P(x_2) \to \exists x_1 \neg Q(x_1, x_2) \vee R(x_1)$. Πράγματι, παραλείποντας τις εξωτερικές παρενθέσεις, μπορούμε να γράψουμε τον τύπο στη μορφή $\forall x_2 P(x_2) \to (\exists x_1(\neg Q(x_1, x_2)) \vee R(x_1))$. Επειδή το $\vee$ είναι ισχυρότερο από το $\to$, μπορούμε να γράψουμε τον τύπο ως $\forall x_2 P(x_2) \to \exists x_1(\neg Q(x_1, x_2)) \vee R(x_1)$. Τέλος, επειδή το $\neg$ είναι ισχυρότερο από το $\vee$, ο τύπος μπορεί να γραφεί ως $\forall x_2 P(x_2) \to \exists x_1 \neg Q(x_1, x_2) \vee R(x_1)$.

$\square$

Η απόδοση τιμής αλήθειας σε έναν τύπο της Γ_1 μπορεί να γίνει μόνον αν έχει δοθεί κάποιο νόημα στα σύμβολα της Γ_1. Με τα λογικά σύμβολα δεν έχουμε ιδιαίτερο πρόβλημα, αφού έχουμε αποφασίσει να έχουν ρόλο που καθορίζεται από συγκεκριμένες εκφράσεις στα ελληνικά. Με τις μεταβλητές και τα μη λογικά σύμβολα όμως τα πράγματα είναι διαφορετικά, δηλαδή δεν είμαστε απόλυτοι για την ερμηνεία τους. Παραδείγματος χάρη, δε θέλουμε τα σύμβολα $\prime, \oplus, \odot$ της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ να αναφέρονται οπωσδήποτε στις αντίστοιχες πράξεις στους φυσικούς αριθμούς – θα μπορούσαν να αφορούν πράξεις στους ακέραιους ή σε κάποιο άλλο σύνολο. Ο επόμενος ορισμός αφορά στους κόσμους στους οποίους ερμηνεύονται τα σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας.

Ορισμός 3.4. Μια «δομή» (ή «ερμηνεία») $\mathcal{A}$ για την Γ_1 αποτελείται από τα εξής:

α) ένα μη κενό σύνολο, που καλείται «σύμπαν» της $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $|\mathcal{A}|$ (στο οποίο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές),

β) σε κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο P αντιστοιχεί μια σχέση στο σύνολο $|\mathcal{A}|^n$ που συμβολίζουμε $P^{\mathcal{A}}$ (δηλαδή $P^{\mathcal{A}} \subseteq |\mathcal{A}|^n$),

γ) σε κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f αντιστοιχεί μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $|\mathcal{A}|^n$ και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του $|\mathcal{A}|$, που συμβολίζουμε $f^{\mathcal{A}}$ (δηλαδή $f^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^n \to |\mathcal{A}|$) και

δ) σε κάθε σύμβολο σταθερής c αντιστοιχεί ένα στοιχείο του $|\mathcal{A}|$, που συμβολίζουμε $c^{\mathcal{A}}$ (δηλαδή $c^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$). $\square$

Παρατηρήσεις.

α) Οι γλώσσες που μελετάμε λέγονται «πρωτοβάθμιες», γιατί έχουν μεταβλητές που οι τιμές τους είναι στοιχεία ενός συνόλου. Υπάρχουν γλώσσες ανώτερου βαθμού: δευτεροβάθμιες, τριτοβάθμιες κτλ. Οι δευτεροβάθμιες γλώσσες έχουν μεταβλητές που οι τιμές τους είναι υποσύνολα του σύμπαντος κτλ.

β) Μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον όρο «μοντέλο» αντί για το «δομή», εμείς όμως θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο αυτό διαφορετικά – δες τους Ορισμούς 3.8 και 3.9. $\square$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα δομών για τις $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ και $\Gamma_1^{\theta\alpha}$.

Παραδείγματα 3.4.

(i) Η δομή $\mathcal{N}_\sigma$ για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\mathcal{N}_\sigma| = \mathbf{N}$ και

β) στο $\mathbf{E}$ αντιστοιχεί η σχέση $\mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma} = \{< m, n > \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} | m < n\}$.

Δηλαδή, το σύμβολο $\mathbf{E}$, που υποτίθεται ότι αντιστοιχεί στην έκφραση «ανήκει», ερμηνεύεται εδώ ως «μικρότερο από».

(ii) Η δομή $\mathcal{N}_\sigma^*$ για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\mathcal{N}_\sigma^*| = \mathbf{N}$ και

β) στο $\mathbf{E}$ αντιστοιχεί η σχέση $\mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma^*} = \{< m, n > \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} | n < m\}$.

Δηλαδή, το σύμβολο $\mathbf{E}$ εδώ θεωρείται ότι συμβολίζει την έκφραση «μεγαλύτερο από».

(iii) Η δομή $\mathcal{N}$ για την $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\mathcal{N}| = \mathbf{N}$

β) στα $\prime, \oplus, \odot$ αντιστοιχούν οι συνήθεις συναρτήσεις του επόμενου, της πρόσθεσης και του πολ/σμού στο $\mathbf{N}$, δηλαδή οι συναρτήσεις

$$\prime^{\mathcal{N}}(n) = n + 1$$
$$\oplus^{\mathcal{N}}(m, n) = m + n$$
$$\odot^{\mathcal{N}}(m, n) = m \cdot n$$

γ) στο **0** αντιστοιχεί το $0 \in \mathbf{N}$.

(iv) Η δομή $\mathcal{N}^*$ για την $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ ορίζεται ως εξής:

α) $|\mathcal{N}^*| = \{-n | n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{N}^*$

β) οι ${}'^{\mathcal{N}^*}, \oplus^{\mathcal{N}^*}, \odot^{\mathcal{N}^*}$ ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} &{}'^{\mathcal{N}^*}(-n) = -n - 1 \\ &\oplus^{\mathcal{N}^*}(-m, -n) = -(m + n) \\ &\odot^{\mathcal{N}^*}(-m, -n) = -(m \cdot n) \end{aligned}$$

γ) στο **0** αντιστοιχεί το $0 \in \mathbf{N}^*$. □

Παρατήρηση. Τα παραπάνω παραδείγματα δομών δείχνουν, όπως προαναφέραμε, τη μεγάλη ελευθερία που υπάρχει στην επιλογή νοήματος για τα μη λογικά σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας. Αυτό είναι το πλεονέκτημα κάθε πρωτοβάθμιας γλώσσας, δηλαδή η δυνατότητά της να αναφέρεται σε μια πλειάδα ερμηνειών. Για τον ίδιο όμως λόγο η χρήση της τυπικής γλώσσας απαιτεί προσοχή, διότι η τάση μας είναι να σκεφτόμαστε ότι αναφέρεται **μόνο σε μια δομή**, στην **κύρια δομή**, που είχαμε κατά νου, όταν ορίζαμε τα σύμβολά της. Παραδείγματος χάρη, δουλεύοντας με τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ μπαίνουμε στον πειρασμό να σκεφτούμε ότι αφορά μόνο στους φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητες των συνήθων πράξεων σ' αυτούς, ενώ αφορά και στη δομή $\mathcal{N}^*$, που ορίσαμε προηγουμένως, όπου το σύμπαν περιέχει μη θετικούς ακέραιους, το συναρτησιακό σύμβολο $'$ ερμηνεύεται ως «προηγούμενος» αντί «επόμενος» κτλ. □

Αν μας δοθεί μια δομή για τη Γ_1, κάποιοι από τους τύπους της Γ_1 έχουν συγκεκριμένο νόημα στα πλαίσιά της, ενώ άλλοι αποκτούν νόημα υπό προϋποθέσεις. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει στα ελληνικά: Ας υποθέσουμε, παραδείγματος χάρη, ότι ασχολούμαστε με ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Η τιμή αλήθειας της πρότασης «Για οποιουσδήποτε δύο αριθμούς x, y ισχύει $x + y = y + x$» είναι καθορισμένη, ενώ η τιμή αλήθειας της «Ο αριθμός x είναι πρώτος» δεν είναι – μπορεί όμως να καθοριστεί αν μας δοθεί τιμή για τη μεταβλητή x. Σε πρώτη φάση λοιπόν πρέπει να διακρίνουμε τους τύπους που αντιστοιχούν σε προτάσεις με καθορισμένη τιμή αλήθειας από τους υπόλοιπους. Αυτό μας οδηγεί στο να ορίσουμε (αναδρομικά) την έννοια της «ελεύθερης εμφάνισης» μεταβλητής σε τύπο.

Ορισμός 3.5. Έστω φ τύπος και x μεταβλητή. Θα λέμε τα εξής:

α) «Η x εμφανίζεται ελεύθερη στο φ», ανν

- ο φ είναι ατομικός και η x εμφανίζεται στο φ ή
- ο φ είναι της μορφής $(\neg\psi)$ και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ ή
- ο φ είναι της μορφής $(\psi \wedge \chi)$ ή $(\psi \vee \chi)$ ή ... και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ ή στον χ ή, τέλος,
- ο φ είναι της μορφής $\forall y\psi$ ή $\exists y\psi$, όπου x, y είναι διαφορετικές μεταβλητές, και η x εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ.

β) «Η x είναι δεσμευμένη στο φ», ανν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον φ.

Επίσης θα λέμε ότι ο φ είναι «πρόταση», ανν κάθε μεταβλητή είναι δεσμευμένη στον φ. □

Η ιδέα είναι ότι μια συγκεκριμένη εμφάνιση μεταβλητής σε τύπο είναι ελεύθερη, ανν δεν εμπίπτει στο «πεδίο εφαρμογής» κάποιου ποσοδείκτη. Παραδείγματος χάρη, η x εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall xQ(x) \rightarrow P(x)$, η y είναι δεσμευμένη στον $\forall y(P(y) \rightarrow \forall xQ(x))$ και ο $\forall x\forall y(x \approx y \rightarrow y \approx x)$ είναι πρόταση.

Το σύνολο όλων των προτάσεων της Γ_1 συμβολίζουμε με $\Pi(\Gamma_1)$.

Παρατηρήσεις.

α) Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, μια μεταβλητή μπορεί να εμφανίζεται ελεύθερη σ' έναν τύπο και ταυτόχρονα να είναι δεσμευμένη σ' έναν υποτύπο του.

β) Ο παραπάνω ορισμός θεωρεί μια μεταβλητή που δεν εμφανίζεται καθόλου στο φ ως δεσμευμένη. Επειδή σε μερικές περιπτώσεις θέλουμε να αναφερθούμε σε μεταβλητή που εμφανίζεται στο φ, αλλά δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, χρησιμοποιούμε την έκφραση «η x εμφανίζεται ποσοδειγμένη στο φ» με την προφανή έννοια. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.2

Ποιες μεταβλητές εμφανίζονται ελεύθερες σε καθέναν από τους ακόλουθους τύπους; Ποιοι από αυτούς είναι προτάσεις;

$$\forall x_1 Q(x_1) \leftrightarrow \exists x_2 Q(x_2), \qquad \exists x_1 Q(x_1) \wedge Q(x_1),$$
$$\exists x_3 (Q(x_3) \to \forall x_4 Q(x_4)), \quad x_1 \approx x_2 \vee x_1 \not\approx x_2.$$

Με βάση τα προηγούμενα, για την απόδοση μιας τιμής αλήθειας σε τυχόντα τύπο απαιτείται αφενός μια δομή και αφετέρου τιμές για τις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο.

Ορισμός 3.6. Έστω $\mathcal{A}$ μια δομή για τη Γ_1. «Αποτίμηση στην $\mathcal{A}$» είναι μια συνάρτηση $v : M(\Gamma_1) \to |\mathcal{A}|$. □

Εδώ φαίνεται για άλλη μια φορά η διαφορά μεταξύ προτασιακών μεταβλητών και μεταβλητών μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας: ενώ οι τιμές των πρώτων είναι τιμές αλήθειας, οι δεύτερες παίρνουν ως τιμές στοιχεία του σύμπαντος μιας δομής.

Αν μας δοθεί μια αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$, είναι διαισθητικά προφανές ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε όρο της Γ_1 ένα στοιχείο του σύμπαντος – ουσιαστικά υπολογίζουμε το αποτέλεσμα των πράξεων στην $\mathcal{A}$ που αντιστοιχούν στα συναρτησιακά σύμβολα του t, αν κάνουμε τις πράξεις αυτές με τα στοιχεία του σύμπαντος, που η v αντιστοιχεί στις μεταβλητές του t. Μ' άλλα λόγια, κάθε αποτίμηση v επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μια συνάρτηση στο $O(\Gamma_1)$.

Θεώρημα 3.2. Έστω $\mathcal{A}$ δομή και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\overline{v} : O(\Gamma_1) \to |\mathcal{A}|$ τέτοια ώστε

α) $\overline{v}(x) = v(x)$ για κάθε μεταβλητή x

β) $\overline{v}(c) = c^{\mathcal{A}}$ για κάθε σύμβολο σταθερής c

γ) $\overline{v}(f(t_1, ..., t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\overline{v}(t_1), ..., \overline{v}(t_n))$ για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f και τυχόντες όρους $t_1, ..., t_n$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $O(\Gamma_1)$ ορίστηκε αναδρομικά από το $M(\Gamma_1)$, έτσι ώστε να ισχύει η μοναδική αναγνωσιμότητα. □

> Αν v είναι μια αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ και $a \in |\mathcal{A}|$, τότε $v(x|a)$ είναι η αποτίμηση που αντιστοιχεί το a στην x και συμφωνεί με την v για όλες τις άλλες μεταβλητές.

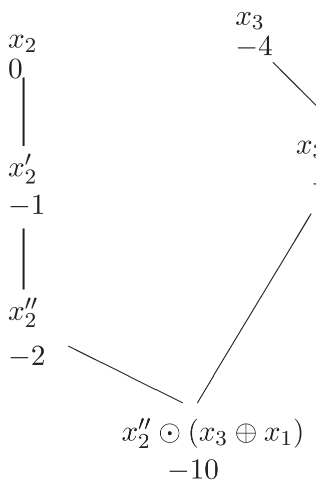
Ας δούμε δυο παραδείγματα υπολογισμού τιμής όρου για δεδομένη αποτίμηση σε δομή. Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει ή με δενδροδιάγραμμα ή με εφαρμογή των α)-γ) του Θεωρήματος 3.2.

Παραδείγματα 3.5.

α) Ας θεωρήσουμε τη δομή $\mathcal{N}$ για την $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{N}$ τέτοια που $v(x_1) = 2$, $v(x_2) = 0$, $v(x_3) = 1$. Θα υπολογίσουμε την τιμή του όρου $x_1 \oplus (x_2' \odot x_3)$. Ο όρος αυτός είναι κανονικά ο $\oplus(x_1, \odot(\prime(x_2), x_3))$, άρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\overline{v}(x_1 \oplus (x_2' \odot x_3)) = \oplus^{\mathcal{N}}(v(x_1), \overline{v}(\odot(\prime(x_2), x_3))) = \\
&\oplus^{\mathcal{N}}(v(x_1), \odot^{\mathcal{N}}(\overline{v}(\prime(x_2)), v(x_3))) = \\
&\oplus^{\mathcal{N}}(v(x_1), \odot^{\mathcal{N}}(\prime^{\mathcal{N}}(v(x_2)), v(x_3))) = \\
&\oplus^{\mathcal{N}}(2, \odot^{\mathcal{N}}(\prime^{\mathcal{N}}(0), 1)) = 2 + ((0+1) \cdot 1) = 3.
\end{aligned}$$

β) Ας θεωρήσουμε τώρα τη δομή $\mathcal{N}^*$ για την $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{N}^*$ τέτοια ώστε $v(x_1) = -1$, $v(x_2) = 0$, $v(x_3) = -4$. Θα βρούμε την τιμή του όρου $x_2'' \odot (x_3 \oplus x_1)$, χρησιμοποιώντας το δενδροδιάγραμμά του.



$\square$

Τώρα έχουμε ό,τι χρειάζεται για να δώσουμε το λεγόμενο «ορισμό αλήθειας του Tarski», που αντιστοιχεί στους πίνακες αλήθειας της προτασιακής λογικής.

Ορισμός 3.7. (Ορισμός αλήθειας του Tarski) Έστω $\mathcal{A}$ δομή για την Γ_1, φ τύπος και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Η έννοια «ο φ αληθεύει για την v στην $\mathcal{A}$» ή «η v ικανοποιεί τον φ στην $\mathcal{A}$», συμβολικά $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

1) $\mathcal{A} \models t_1 \approx t_2[v]$, ανν $\overline{v}(t_1) = \overline{v}(t_2)$,

2) $\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[v]$, ανν $< \overline{v}(t_1), ..., \overline{v}(t_n) > \in P^{\mathcal{A}}$,

3) $\mathcal{A} \models \neg\psi[v]$, ανν δεν ισχύει $\mathcal{A} \models \psi[v]$,

4) $\mathcal{A} \models (\psi \wedge \chi)[v]$, ανν ($\mathcal{A} \models \psi[v]$ και $\mathcal{A} \models \chi[v]$),

5) $\mathcal{A} \models (\psi \vee \chi)[v]$, ανν ($\mathcal{A} \models \psi[v]$ ή $\mathcal{A} \models \chi[v]$),

6) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow \chi)[v]$, ανν (αν $\mathcal{A} \models \psi[v]$, τότε $\mathcal{A} \models \chi[v]$),

7) $\mathcal{A} \models (\psi \leftrightarrow \chi)[v]$, ανν ($\mathcal{A} \models \psi[v]$ ανν $\mathcal{A} \models \chi[v]$),

8) $\mathcal{A} \models \forall x\psi[v]$, ανν (για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$),

9) $\mathcal{A} \models \exists x\psi[v]$, ανν (υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$).

Αν ο φ δεν αληθεύει για την v στην $\mathcal{A}$, τότε γράφουμε $\mathcal{A} \not\models \varphi[v]$. □

Ο ορισμός αυτός καλείται και «ορισμός "χιονίζει" – χιονίζει», επειδή υποτίθεται ότι γενικεύει τον ορισμό αλήθειας του κόσμου στον οποίο ζούμε, σύμφωνα με τον οποίο η πρόταση «χιονίζει» είναι αληθής, ανν πράγματι χιονίζει στον κόσμο μας. Μ' άλλα λόγια, ένας τύπος αληθεύει για μια αποτίμηση, ανν το νόημα που αντιπροσωπεύει εκφράζει μια αλήθεια για τη δομή που θεωρούμε.

Παρατήρηση. Τα 1), 2) του ορισμού του Tarski δεν έχουν αντίστοιχα στην προτασιακή λογική – εκεί η αντιστοίχιση τιμής αλήθειας σε μια προτασιακή μεταβλητή γίνεται a priori από μια αποτίμηση. Τα μέρη 3)-7) του ορισμού αντιστοιχούν στους πίνακες αλήθειας των συνδέσμων. Τέλος, τα μέρη 8)-9) θα μπορούσαν να περιγραφούν με πίνακες αλήθειας, όπου ουσιαστικά ο $\forall$ συμπεριφέρεται ως γενικευμένη σύζευξη και ο $\exists$ ως γενικευμένη διάζευξη:

$\mathcal{A} \models \varphi[v(x\|a_1)]$	$\ldots$	$\mathcal{A} \models \varphi[v(x\|a_\kappa)]$	$\mathcal{A} \models \forall x \varphi[v]$	$\mathcal{A} \models \exists x \varphi[v]$
A	$\ldots$	A	A	A
A	$\ldots$	Ψ	Ψ	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	Ψ	A
A	$\ldots$	A	Ψ	A
A	$\ldots$	Ψ	Ψ	A
Ψ	$\ldots$	A	Ψ	A
Ψ	$\ldots$	Ψ	Ψ	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	Ψ	A
Ψ	$\ldots$	A	Ψ	A
Ψ	$\ldots$	Ψ	Ψ	Ψ

Η ιδέα είναι ότι ο ποσοδείκτης $\forall$ (όμοια για τον $\exists$) συμπεριφέρεται ως σύνδεσμος, ο οποίος εφαρμόζεται σε τόσους τύπους, όσα είναι τα στοιχεία του σύμπαντος της δομής, δηλαδή το πλήθος των στηλών του πίνακα αλήθειας εξαρτάται από τον αριθμό κ των στοιχείων αυτών, που μπορεί να είναι άπειρος! □

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα εφαρμογής του ορισμού του Tarski.

Παραδείγματα 3.6.

α) Θεωρούμε τη δομή $\mathcal{N}_\sigma$ για την $\Gamma_1^{\theta\sigma}$, που ορίσαμε στο Παράδειγμα 3.4(i), και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{N}_\sigma$ τέτοια που $v(x_1) = 3$, $v(x_2) = 5$. Τότε $\mathcal{N}_\sigma \models x_1 \mathbf{E} x_2[v]$. Πράγματι, με βάση το μέρος 2) του ορισμού 3.7, αυτό ισοδυναμεί με το ότι $< v(x_1), v(x_2) > \in \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma}$, δηλαδή ότι $< 3, 5 > \in \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma}$, το οποίο ισχύει.

β) Ας θεωρήσουμε τώρα τη δομή $\mathcal{N}^*$ για την $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ και μια αποτίμηση v στην $\mathcal{N}^*$ τέτοια ώστε $v(x_2) = 0$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\mathcal{N}^* \models \forall x_1 x_1 \oplus x_2 \approx x_1[v] \quad (\dagger).$$

Πράγματι, με βάση τον ορισμό 3.7, μέρος 8), αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $\mathcal{N}^* \models x_1 \oplus x_2 \approx x_1[v(x_1| - n)]$, δηλαδή ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει

$$\overline{v(x_1| - n)}(x_1 \oplus x_2) = \overline{v(x_1| - n)}(x_1) \quad (+).$$

Όμως

$$\begin{aligned}
&\overline{v(x_1| - n)}(x_1 \oplus x_2) = \oplus^{\mathcal{N}^*}(v(x_1| - n)(x_1), v(x_1| - n)(x_2)) = \\
&\oplus^{\mathcal{N}^*}(-n, v(x_2)) = (-n) \oplus^{\mathcal{N}^*} 0 = -n \\
&\text{και } \overline{v(x_1| - n)}(x_1) = v(x_1| - n)(x_1) = -n,
\end{aligned}$$

λόγω του ορισμού της αποτίμησης $v(x_1| - n)$. Άρα η ($\dagger$) ισχύει και συνεπώς ισχύει η (+).

Αν όμως v^* είναι μια αποτίμηση στη $\mathcal{N}^*$ τέτοια ώστε $v^*(x_2) = -1$, τότε $\mathcal{N}^* \not\models \forall x_1 x_1 \oplus x_2 \approx x_1[v^*]$, αφού δεν ισχύει ότι για κάθε $n \in \mathbf{N}$ έχουμε $\mathcal{N}^* \models x_1 \oplus x_2 \approx x_1[v(x_1| - n)]$. $\square$

Εκείνο που απαιτεί προσοχή κατά τον έλεγχο κατά πόσο μια αποτίμηση ικανοποιεί έναν τύπο σε μια δομή είναι ο ορισμός της δομής και της αποτίμησης. Όπως προαναφέραμε, ο κίνδυνος είναι να λάβουμε υπόψη μας την κύρια δομή για τη γλώσσα, αντί για τη συγκεκριμένη δομή που έχει δοθεί.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.3

Έστω v η αποτίμηση στη δομή $\mathcal{N}_\sigma^*$ (Παράδειγμα 3.4(ii)) τέτοια ώστε $v(x_1) = 5$, $v(x_2) = 0$ και $v(x_3) = 3$. Ποιοι από τους τύπους

$$x_1\mathbf{E}x_2 \wedge x_2\mathbf{E}x_3 \to x_1\mathbf{E}x_3, \quad \exists x_4(x_4 \not\mathbf{E}\, x_1 \wedge x_4 \not\mathbf{E} x_3)$$

ικανοποιούνται από τη v στην $\mathcal{N}_\sigma^*$;

Είναι διαισθητικά σαφές ότι η τιμή αλήθειας ενός τύπου εξαρτάται μόνο από τις τιμές των μεταβλητών που εμφανίζονται ελεύθερες σ' αυτόν – θυμήσου το αντίστοιχο γεγονός στην προτασιακή λογική (Δραστηριότητα 2.1). Αν προσπαθήσουμε ν' αποδείξουμε το γεγονός αυτό, θα διαπιστώσουμε ότι χρειάζεται πρώτα να δείξουμε ότι η τιμή ενός όρου για μια αποτίμηση εξαρτάται μόνο από τις τιμές που δίνει η αποτίμηση στις μεταβλητές που εμφανίζονται στον όρο, δηλαδή το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1. Για κάθε όρο t της Γ_1, κάθε δομή $\mathcal{A}$ για τη Γ_1 και τυχούσες αποτιμήσεις v_1, v_2 στην $\mathcal{A}$, αν οι v_1, v_2 συμφωνούν στις μεταβλητές του t, τότε $\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του t. Αν ο t είναι η μεταβλητή x, τότε προφανώς $\overline{v_1}(t) = v_1(x) = v_2(x) = \overline{v_2}(t)$. Αν ο t είναι το σύμβολο σταθερής c, τότε $\overline{v_1}(t) = c^{\mathcal{A}} = \overline{v_2}(t)$. Έστω ότι ο t είναι της μορφής $f(t_1, \ldots, t_n)$ και ότι οι όροι $t_1, \ldots, t_n$ έχουν την ιδιότητα, δηλαδή $\overline{v_1}(t_1) = \overline{v_2}(t_1), \ldots, \overline{v_1}(t_n) = \overline{v_2}(t_n)$. Τότε, λόγω του ορισμού των $\overline{v_1}, \overline{v_2}$, ισχύει $\overline{v_1}(t) = \overline{v_1}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\overline{v_1}(t_1), \ldots, \overline{v_1}(t_n)) = f^{\mathcal{A}}(\overline{v_2}(t_1), \ldots, \overline{v_2}(t_n)) = \overline{v_2}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \overline{v_2}(t)$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος. □

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στην εφαρμογή της αρχής της επαγωγής για το $T(\Gamma_1)$ για να δείξουμε ότι η ικανοποίηση ενός τύπου φ από μια αποτίμηση v σε μια δομή $\mathcal{A}$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές που δίνει η v στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στο φ.

Δραστηριότητα 3.1

> Αποδείξτε ότι για κάθε τύπο φ της Γ_1, κάθε δομή $\mathcal{A}$ για τη Γ_1 και τυχούσες αποτιμήσεις v_1, v_2 στην $\mathcal{A}$, αν οι v_1, v_2 συμφωνούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στο φ, τότε $\mathcal{A} \models \varphi[v_1]$, ανν $\mathcal{A} \models \varphi[v_2]$.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι ότι, αν ο φ είναι πρόταση της Γ_1 και $\mathcal{A}$ δομή για τη Γ_1, τότε ή όλες οι αποτιμήσεις ικανοποιούν τη φ ή καμιά αποτίμηση δεν ικανοποιεί τη φ – οποιεσδήποτε δύο αποτιμήσεις συμφωνούν τετριμμένα στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στη φ (καμιά μεταβλητή δεν εμφανίζεται ελεύθερη). Κάθε πρόταση λοιπόν έχει καθορισμένη τιμή αλήθειας σε μια δομή, ανεξάρτητα από αποτιμήσεις.

Ορισμός 3.8. Έστω $\varphi \in \Pi(\Gamma_1)$ και $\mathcal{A}$ δομή για την Γ_1. Λέμε ότι «η φ είναι αληθής στην $\mathcal{A}$» ή «η $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο της φ» και γράφουμε $\mathcal{A} \models \varphi$, ανν η φ αληθεύει για κάθε αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Επίσης λέμε ότι «η φ είναι ψευδής στην $\mathcal{A}$» και γράφουμε $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ανν η φ δεν είναι αληθής στην $\mathcal{A}$. $\square$

Ας εφαρμόσουμε πάλι τον ορισμό του Tarski για να εξακριβώσουμε αν μια δομή είναι μοντέλο μιας πρότασης.

Παράδειγμα 3.7. Θα δείξουμε ότι η πρόταση $\exists x_0 \forall x_1 x_0 \odot x_1 \approx x_1$ είναι αληθής στη δομή $\mathcal{N}$ για την $\Gamma_1^{\theta\alpha}$. Έστω v τυχούσα αποτίμηση στην $\mathcal{N}$. Τότε έχουμε ότι
$\mathcal{N} \models \exists x_0 \forall x_1 x_0 \odot x_1 \approx x_1[v]$
ανν υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{N} \models \forall x_1 x_0 \odot x_1 \approx x_1[v(x_0|m)]$
ανν υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$

$$\mathcal{N} \models x_0 \odot x_1{=}x_1[v(x_0|m, x_1|n)]$$

ανν υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$

$$\overline{v(x_0|m, x_1|n)}(x_0 \odot x_1) = \overline{v(x_0|m, x_1|n)}(x_1)$$

ανν υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$

$$\otimes^{\mathcal{N}}(\overline{v(x_0|m, x_1|n)}(x_0), \overline{v(x_0|m, x_1|n)}(x_1)) = \overline{v(x_0|m, x_1|n)}(x_1)$$

ανν υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ να ισχύει $\otimes^{\mathcal{N}}(m,n) = n$
ανν υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbf{N}$ να ισχύει $m \cdot n = n$.
Όμως η τελευταία πρόταση (της ελληνικής) είναι αληθής, άρα ισχύει το ζητούμενο.

$\square$

Ας μη ξεχνάμε όμως ότι ο σκοπός μας είναι να χρησιμοποιήσουμε τις πρωτοβάθμιες γλώσσες για τη μελέτη μαθηματικών αποδείξεων. Και εδώ, όπως στην προτασιακή λογική, υπάρχουν δύο ισοδύναμοι τρόποι να δουλέψουμε: ο συντακτικός και ο σημασιολογικός. Όπως στο Κεφάλαιο 2, θ' αρχίσουμε με τη σημασιολογική προσέγγιση.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή δόθηκε ένα γενικό ορισμό μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, καθώς και παραδείγματα τέτοιων τυπικών γλωσσών. Επίσης ασχοληθήκαμε με την κατασκευή εκφράσεων τέτοιων γλωσσών, που αντιστοιχούν αφενός μεν σε ονόματα αφετέρου δε σε προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. Τέλος, ορίσαμε την έννοια της δομής, μέσω της οποίας ερμηνεύονται οι τύποι μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας και αναλύσαμε τον ορισμό του Tarski, με βάση τον οποίο αντιστοιχίζεται τιμή αλήθειας σε κάθε τύπο, στα πλαίσια μιας δομής και μιας αποτίμησης σ' αυτή.

3.2 Λογικές Συνεπαγωγές

Στόχος

Στην ενότητα αυτή στόχος μας είναι να ορίσουμε μια έννοια που αφορά στο σημασιολογικό έλεγχο της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος σε πρωτοβάθμια γλώσσα, καθώς και μερικές βασικές ιδιότητές της. Θα δώσουμε επίσης παραδείγματα έγκυρων επιχειρηματικών μορφών σε πρωτοβάθμιες γλώσσες, καθώς και έναν κατάλογο βασικών λογικών αληθειών.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει αυτή την ενότητα, θα μπορείτε να:

- *ελέγχετε αν συγκεκριμένα σύνολα τύπων μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας συνεπάγονται λογικά συγκεκριμένους τύπους της,*
- *αναφέρετε λογικά αληθείς τύπους, ειδικότερα για ποσοδείκτες.*

Έννοιες-κλειδιά

- *λογική συνεπαγωγή,*
- *έγκυρος τύπος,*
- *νόμοι ποσοδεικτών,*
- *ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων,*
- *λογικά ισοδύναμοι τύποι,*
- *συμπάγεια κατηγορηματικής λογικής.*

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Το σημασιολογικό κριτήριό μας για τον έλεγχο εγκυρότητας ενός επιχειρήματος είναι, όπως και στην προτασιακή λογική: έπεται πάντα η αλήθεια του συμπεράσματος από την αλήθεια των υποθέσεων; Εδώ βέβαια το «πάντα» αναφέρεται σε πολύ περισσότερες περιπτώσεις από ό,τι στην προτασιακή λογική, αφού αναφέρεται σε όλες τις δυνατές ερμηνείες μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας.

> *Το βασικό ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι αν είναι δυνατό να ελέγξουμε αποτελεσματικά αν από κάποιο σύνολο τύπων έπεται λογικά ως συμπέρασμα ένας τύπος.*

Θα αρχίσουμε με μερικούς απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 3.9. Έστω T σύνολο τύπων της Γ_1, φ τύπος της Γ_1, $\mathcal{A}$ δομή για τη Γ_1 και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Θα λέμε τα εξής:

1) «Η v ικανοποιεί το T στην $\mathcal{A}$» ή «το T ικανοποιείται από τη v στην $\mathcal{A}$», ανν η v ικανοποιεί κάθε στοιχείο του T στην $\mathcal{A}$.

2) «Το T είναι ικανοποιήσιμο», ανν υπάρχει δομή και αποτίμηση που το ικανοποιούν.

3) «Ο φ είναι έγκυρος» ή «ο φ είναι λογικά αληθής», ανν για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ ο φ αληθεύει για την v.

4) «Το T συνεπάγεται λογικά το φ», και θα γράφουμε $T \models \varphi$, ανν για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$, αν αληθεύει το T για την v, τότε αληθεύει και ο φ για την v.

Αν είναι σύνολο προτάσεων της Γ_1, θα λέμε ότι «η $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο του T», ανν η $\mathcal{A}$ είναι μοντέλο κάθε πρότασης φ που ανήκει στο T (δες Ορισμό 3.8). □

Παρατηρήσεις.

α) Για κάθε φ, ισχύει $\emptyset \models \varphi$, ανν φ έγκυρος, δηλ. οι έγκυροι τύποι είναι ακριβώς οι λογικές συνέπειες του $\emptyset$ (αντιστοιχούν λοιπόν στις ταυτολογίες). Πράγματι, έστω ότι $\emptyset \models \varphi$, αλλά ο φ δεν είναι λογικά αληθής. Τότε υπάρχει δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v, για τις οποίες η v δεν ικανοποιεί το φ στην $\mathcal{A}$. Όμως η v ικανοποιεί (τετριμμένα) το $\emptyset$ στην $\mathcal{A}$, αφού ικανοποιεί κάθε στοιχείο του – απλά, δεν υπάρχει στοιχείο του $\emptyset$, το οποίο θα μπορούσε να μην ικανοποιείται από τη v στην $\mathcal{A}$. Αφού όμως το $\emptyset$ συνεπάγεται λογικά το φ, έπεται ότι η v πρέπει να ικανοποιεί το φ στην $\mathcal{A}$, που είναι άτοπο. Συνεπώς, αν $\emptyset \models \varphi$, τότε ο φ είναι λογικά αληθής.
Όμοια ελέγχουμε και την αντίστροφη συνεπαγωγή.

β) Οι έννοιες «ο ψ συνεπάγεται λογικά τον φ» και «οι φ, ψ είναι λογικά ισοδύναμοι» ορίζονται όπως οι αντίστοιχες στον προτασιακό λογισμό. Θα χρησιμοποιούμε

το σύμβολο $\equiv$ για να δηλώσουμε λογική ισοδυναμία δύο τύπων.
γ) Συνδυάζοντας τους ορισμούς 3.8 και 3.9 βλέπουμε ότι για κάθε $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$, $\varphi \in \Pi(\Gamma_1)$

$$\Pi \models \varphi, \text{ ανν } \text{κάθε μοντέλο του } \Pi \text{ είναι μοντέλο της } \varphi.$$

Το θέμα ουσιαστικά είναι ότι προτιμάμε να χρησιμοποιούμε τον όρο «μοντέλο» αντί για το «δομή», όταν ασχολούμαστε με την αλήθεια προτάσεων τυπικών γλωσσών. □

Όπως και στην προτασιακή λογική, ισχύει η σημασιολογική μέθοδος της «σε άτοπο απαγωγής».

Θεώρημα 3.3. Για κάθε σύνολο τύπων T και κάθε τύπο φ της Γ_1

$$T \models \varphi, \text{ ανν } \text{το } T \cup \{\neg\varphi\} \text{ δεν είναι ικανοποιήσιμο.}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ουσιαστικά ίδια με εκείνη του Θεωρήματος 2.5, αφού βασίζεται μόνο στις έννοιες της λογικής συνεπαγωγής και της ικανοποιησιμότητας και στη σημασιολογική συμπεριφορά του συνδέσμου $\neg$, οι οποίες είναι ίδιες με τις αντίστοιχες της προτασιακής λογικής. □

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, ο έλεγχος του κατά πόσον κάποιες υποθέσεις συνεπάγονται λογικά κάποιον τύπο φ είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο ύπαρξης δομής και αποτίμησης για τις οποίες ισχύει ότι $T \cup \{\neg\varphi\}$.

Ερώτημα. Υπάρχει αποτελεσματική διαδικασία με βάση την οποία, δεδομένων συνόλου τύπων και τύπου φ, μπορούμε να ελέγξουμε αν $T \models \varphi$ ή όχι;

Όπως είδαμε, η απάντηση στο αντίστοιχο ερώτημα στην προτασιακή λογική είναι «ναι», όταν περιοριστούμε σε πεπερασμένα σύνολα τύπων – σε τέτοιες περιπτώσεις είναι δυνατή η κατασκευή πινάκων αλήθειας που μας παρέχουν τη δυνατότητα ελέγχου μιας επιχειρηματικής μορφής με πεπερασμένες υποθέσεις. Στην κατηγορηματική λογική όμως τα πράγματα είναι δυσκολότερα, αφού η αλήθεια ενός τύπου εξαρτάται από όλες τις δυνατές δομές, το πλήθος των οποίων είναι άπειρο, αφού κάθε μη κενό σύνολο μπορεί να αποτελέσει σύμπαν μιας δομής. Ακόμη κι αν υποθέσουμε ότι μια πρωτοβάθμια γλώσσα αφορά μόνο στην κύρια δομή, πάλι έχουμε δυσκολία ελέγχου της αλήθειας των τύπων της γλώσσας. Παραδείγματος χάρη, αν θεωρήσουμε ότι η $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ αφορά μόνο στη δομή $\mathcal{N}$, δηλαδή στο σύνολο των φυσικών αριθμών με τις συνήθεις πράξεις σ'αυτό, το γεγονός ότι το σύμπαν είναι άπειρο δημιουργεί αξεπέραστο εμπόδιο στην προσπάθειά μας να ελέγξουμε αποτελεσματικά την αλήθεια μιας πρότασης της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$. Η ανυπαρξία τέτοιας διαδικασίας αποδεικνύεται μαθηματικά, το θέμα όμως αυτό δε θα μας απασχολήσει καθόλου, θα αρκεστούμε στα προηγούμενα σχόλια.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.4

Αντιστοιχίστε καθεμία από τις παρακάτω έννοιες με έναν το πολύ από τους συμβολισμούς που δίνονται στα δεξιά.

Η αποτίμηση v ικανοποιεί τον τύπο στη δομή $\mathcal{A}$.	$\mathcal{A} \not\models \varphi$
Η πρόταση φ δεν αληθεύει στη δομή $\mathcal{A}$.	$\models \varphi$
Το σύνολο τύπων T συνεπάγεται λογικά τον τύπο φ.	$\models \varphi \leftrightarrow \psi$
Οι τύποι φ, ψ είναι λογικά ισοδύναμοι.	$v \models \varphi[\mathcal{A}]$
Ο τύπος φ είναι έγκυρος.	$T \models \varphi$

Δεν είμαστε λοιπόν σε θέση να ελέγξουμε καμιά λογική συνεπαγωγή; Όχι βέβαια, μπορούμε να το κάνουμε σε αρκετές περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας τον ορισμό αλήθειας του Tarski (δηλαδή τον Ορισμό 3.7). Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.8. Θα δείξουμε ότι $\forall x_1 Q(x_1) \models Q(x_2)$, όπου Q είναι μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο. Σύμφωνα με τον ορισμό, αρκεί να ελέγξουμε ότι για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$, αν $\mathcal{A} \models \forall x_1 Q(x_1)[v]$, τότε $\mathcal{A} \models Q(x_2)[v]$.

Έστω λοιπόν $\mathcal{A}$ τυχούσα δομή και v τυχούσα αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε

$\mathcal{A} \models \forall x_1 Q(x_1)[v]$. Τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 3.7, 9), για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A} \models Q(x_1)[v(x_1|a)]$. Άρα σύμφωνα με τον Ορισμό 3.7, 2), για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ έχουμε $\overline{v(x_1|a)}(x_1) \in Q^{\mathcal{A}}$, δηλαδή για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $a \in Q^{\mathcal{A}}$. Αυτό λέει δηλαδή ότι $|\mathcal{A}| \subseteq Q^{\mathcal{A}}$ (ουσιαστικά ότι η ερμηνεία του συμβόλου Q ταυτίζεται με το σύμπαν, αφού εξ ορισμού ισχύει $Q^{\mathcal{A}} \subseteq |\mathcal{A}|$). Άρα $v(x_2) \in Q^{\mathcal{A}}$, αφού προφανώς η τιμή που δίνει η αποτίμηση v στη μεταβλητή x_2 είναι στοιχείο του σύμπαντος. Αυτό όμως σημαίνει, με βάση τον ορισμό 3.7, 2), ότι $\mathcal{A} \models Q(x_2)[v]$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο. □

Σημείωση. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του Tarski όπως παραπάνω, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η λογική συνεπαγωγή στο προηγούμενο παράδειγμα ισχύει ανεξάρτητα από τις συγκεκριμένες μεταβλητές που εμφανίζονται. Παραδείγματος χάρη, ισχύει ότι $\forall x_1 Q(x_1) \models Q(x_1)$, $\forall x_5 Q(x_5) \models Q(x_8)$ κτλ. Η ουσία είναι ότι η συνεπαγωγή αυτή εκφράζει ότι «αν κάθε στοιχείο ενός συνόλου (εδώ του $|\mathcal{A}|$) έχει μια ιδιότητα (εδώ την ιδιότητα που συμβολίζει το Q), τότε το τυχόν στοιχείο του συνόλου (εδώ το $v(x_2)$) έχει την ιδιότητα αυτή». □

Παράδειγμα 3.9. Θα δείξουμε ότι $Q(x_1) \not\models \forall x_1 Q(x_1)$, όπου Q είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Με βάση τον Ορισμό 3.9, αρκεί να βρούμε δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$$\mathcal{A} \models Q(x_1)[v], \tag{3.1}$$

αλλά να μην ισχύει

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 Q(x_1)[v]. \tag{3.2}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του Tarski, η (3.1) ισχύει ανν

$$v(x_1) \in Q^{\mathcal{A}}, \tag{3.3}$$

ενώ η (3.2) ισχύει ανν για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ είναι $\mathcal{A} \models Q(x_1)[v(x_1|a)]$, δηλαδή για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ είναι $\overline{v(x_1|a)}(x_1) \in Q^{\mathcal{A}}$, δηλαδή

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ ισχύει } a \in Q^{\mathcal{A}}. \tag{3.4}$$

Τώρα μπορούμε να οδηγηθούμε εύκολα στο ζητούμενο. Παραδείγματος χάρη, θεωρούμε δομή $\mathcal{A}$ με σύμπαν το σύνολο με δύο στοιχεία $\{a_0, a_1\}$, ερμηνεία του συμβόλου Q το σύνολο $\{a_0\}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ τέτοια που $v(x_1) = a_0$. Αφού $v(x_1) \in Q^{\mathcal{A}}$, ισχύει η (3.1). Επίσης, επειδή $a_1 \in |\mathcal{A}|$ αλλά $a_1 \notin Q^{\mathcal{A}}$, έπεται ότι δεν ισχύει η (3.4), δηλαδή δεν ισχύει η (3.2). Συνεπώς, έχουμε καταλήξει στο ζητούμενο. □

Σημείωση. Όπως πριν, το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος δεν εξαρτάται από τις συγκεκριμένες μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν, αλλά από το γεγονός ότι η συνεπαγωγή που εξετάζουμε εκφράζει ότι «αν ένα συγκεκριμένο στοιχείο ενός συνόλου έχει μια ιδιότητα, τότε δεν έπεται κατ' ανάγκην ότι όλα τα στοιχεία του συνόλου έχουν την ιδιότητα αυτή». □

Για τα σύμβολα $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, η λογική συνεπαγωγή συμπεριφέρεται όπως η ταυτολογική συνεπαγωγή, με την έννοια της Άσκησης 2.3.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.5

Δείξτε ότι για κάθε σύνολο τύπων και οποιουσδήποτε τύπους φ, ψ

α) $T \cup \{\varphi\} \models \psi$, ανν $T \models \varphi \rightarrow \psi$

β) $\varphi \equiv \psi$, ανν $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Ο έλεγχος αν ένας τύπος είναι λογικά αληθής γίνεται με όμοιο τρόπο. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.10. Θα δείξουμε ότι $\forall x_1 Q(x_1) \rightarrow \exists x_2 Q(x_2)$.

Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ ισχύει

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 Q(x_1) \rightarrow \exists x_2 Q(x_2)[v]. \tag{3.5}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του Tarski, η (3.5) ισχύει, ανν

$$\text{αν } \mathcal{A} \models \forall x_1 Q(x_1)[v], \text{ τότε } \mathcal{A} \models \exists x_2 Q(x_2)[v].$$

Δηλαδή ανν ισχύει ότι

$$\text{αν για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ ισχύει } \mathcal{A} \models Q(x_1)[v(x_1|a)], \tag{3.6}$$

$$\text{τότε υπάρχει } a \in |\mathcal{A}| \text{ τέτοιο ώστε } \mathcal{A} \models Q(x_2)[v(x_2|a)]. \tag{3.7}$$

Η (3.6) ισχύει ανν για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\overline{v(x_1|a)}(x_1) \in Q^{\mathcal{A}}$, δηλαδή ανν

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ ισχύει } a \in Q^{\mathcal{A}}. \tag{3.8}$$

Η (3.7) ισχύει ανν υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε $\overline{v(x_2|a)}(x_2) \in Q^{\mathcal{A}}$, δηλαδή ανν

$$\text{υπάρχει } a \in |\mathcal{A}| \text{ τέτοιο ώστε } a \in Q^{\mathcal{A}}. \tag{3.9}$$

Αν όμως ισχύει η (3.8), τότε ισχύει η (3.9), αφού το σύμπαν της δομής $\mathcal{A}$ είναι μη κενό. Συνεπώς ισχύει το ζητούμενο. □

Σημείωση. Με βάση την Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.5, θα αρκούσε να είχαμε δείξει ότι $\forall x_1 Q(x_1) \models \exists x_2 Q(x_2)$. □

Όπως στην προτασιακή λογική, υπάρχουν κάποιοι λογικά αληθείς τύποι που θεωρούνται θεμελιώδεις και καλούνται «νόμοι της κατηγορηματικής λογικής». Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλοι οι νόμοι της προτασιακής λογικής ισχύουν και για τύπους. Παραδείγματος χάρη, για οποιουσδήποτε τύπους φ, ψ, χ ισχύουν

α) ο νόμος επιμεριστικότητας:	$\models \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$
β) ο νόμος De Morgan:	$\models \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, σύμφωνα με τον ορισμό του Tarski, η σημασιολογία των συνδέσμων στα πλαίσια της κατηγορηματικής λογικής είναι η ίδια με εκείνη στην προτασιακή λογική. Μ' άλλα λόγια, το αν ισχύει ή όχι ο νόμος De Morgan εξαρτάται μόνο από το ρόλο των συνδέσμων $\neg, \wedge, \vee$, αφού οι τύποι φ, ψ θεωρούνται ουσιαστικά ως προτασιακές μεταβλητές, χωρίς να μας ενδιαφέρει ποιοι ποσοδείκτες, ποια κατηγορηματικά σύμβολα κτλ. «κρύβονται» μέσα σ' αυτούς.

Οι νόμοι που αντιστοιχούν στους νόμους της προτασιακής λογικής δεν είναι όμως οι μόνοι. Υπάρχουν και οι αποκαλούμενοι «νόμοι ποσοδεικτών», τους οποίους παραθέτουμε στη συνέχεια.

Νόμοι άρνησης ποσοδεικτών:	$\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$
	$\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$
	$\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$
	$\exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$
Νόμοι κατανομής ποσοδεικτών:	$\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
	$\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$
Νόμοι εναλλαγής ποσοδεικτών:	$\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$
	$\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$
Νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών:	$(\varphi \to \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$
	$(\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$
	$(\forall x\psi \to \varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$
	$(\exists x\psi \to \varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \to \varphi)$,
	με την προϋπόθεση ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ.

Παρατηρήσεις.

α) Αν στον πρώτο νόμο κατανομής ποσοδείκτη αντικαταστήσουμε το $\wedge$ με το $\vee$, δεν προκύπτει λογικά αληθής τύπος – δες τη Δραστηριότητα 3.2 παρακάτω. Όμοια και για το δεύτερο νόμο κατανομής – δες και Άσκηση 3.9.

β) Η ιδέα για τους νόμους μετακίνησης ποσοδείκτη είναι ότι, αν ένας ποσοδείκτης δεν αφορά ουσιαστικά στο ένα μέρος μιας συνεπαγωγής, τότε η εφαρμογή του στη συνεπαγωγή ισοδυναμεί με την εφαρμογή (ενός) ποσοδείκτη μόνο στο άλλο μέρος – αν ο ποσοδείκτης δεν αφορά ουσιαστικά στην υπόθεση της συνεπαγωγής, τότε παραμένει ίδιος κατά τη μετακίνηση, αλλιώς γίνεται αντίθετος. □

Δραστηριότητα 3.2

Δείξτε ότι για τυχόντες τύπους φ, ψ και οποιαδήποτε μεταβλητή x ισχύει $\models \forall x\varphi \vee \forall x\psi \to \forall x(\varphi \vee \psi)$. Επίσης βρείτε παραδείγματα τύπων φ, ψ για τους οποίους $\not\models \forall x(\varphi \vee \psi) \to \forall x\varphi \vee \forall x\psi$.

Σημείωση. Αυτό που ζητείται στο δεύτερο μέρος της παραπάνω δραστηριότητας είναι να βρούμε ένα «αντιπαράδειγμα». Για απλές περιπτώσεις όπως αυτή, μπορούν να βρεθούν αντιπαραδείγματα που μας είναι πολύ οικεία. Παραδείγματος χάρη, μπορούμε να φανταστούμε ως σύμπαν το σύνολο των φυσικών αριθμών και ως τύπους-ιδιότητες τις «ο x είναι άρτιος», «ο x είναι περιττός». Το αντιπαράδειγμα είναι έτοιμο, αφού κάθε φυσικός είναι άρτιος ή περιττός, αλλά δεν αληθεύει ότι κάθε φυσικός είναι άρτιος ή κάθε φυσικός είναι περιττός. Καλό θα ήταν να βρείτε ένα πιο αφηρημένο αντιπαράδειγμα, ώστε να κατανοήσετε τη γενική μέθοδο που χρησιμοποιείται – υπάρχουν πολλές περιπτώσεις αναζήτησης αντιπαραδείγματος όπου δεν υπάρχει «έτοιμη λύση». □

Οι νόμοι ποσοδεικτών επαληθεύονται με χρήση του Ορισμού 3.7.

Παραδείγματα 3.11.

1) Θα δείξουμε ότι για κάθε τύπο φ και μεταβλητή x ισχύει $\models \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall\psi$.

Έστω λοιπόν δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$. Σύμφωνα με τον ορισμό του Tarski, η $\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall\psi[v]$ είναι ισοδύναμη με

$$\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \wedge \psi)[v], \tag{3.10}$$

$$\text{ανν } \mathcal{A} \models \forall x\varphi \wedge \forall x\psi[v]. \tag{3.11}$$

Όμως η (3.10) ισοδυναμεί με την

$$\text{για κάθε } \ a \in |\mathcal{A}| \text{ ισχύει } \mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi[v(x|a)]. \tag{3.12}$$

και η (3.11) ισοδυναμεί με $\mathcal{A} \models \forall x\varphi[v]$ και $\mathcal{A} \models \forall x\psi[v]$, δηλαδή με

$$\left.\begin{array}{l} \text{για κάθε } \ a \in |\mathcal{A}| \text{ ισχύει } \mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)] \quad \text{ και} \\ \text{για κάθε } \ a \in |\mathcal{A}| \text{ ισχύει } \mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]. \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

Ο τρόπος που μεταχειριζόμαστε την έκφραση «για κάθε» στα ελληνικά είναι τέτοιος που οι (3.12), (3.13) είναι ισοδύναμες. Συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.

2) Θα δείξουμε ότι για οποιουσδήποτε τύπους φ, ψ και οποιαδήποτε μεταβλητή x, αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, τότε $\models (\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$.
Έστω λοιπόν φ, ψ, x όπως παραπάνω, $\mathcal{A}$ τυχούσα δομή και v τυχούσα αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Θέλουμε να ελέγξουμε, αν ισχύει $\mathcal{A} \models (\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)[v]$, δηλαδή αν ισχύει

$$\mathcal{A} \models \varphi \to \exists x\psi[v] \tag{3.14}$$

$$\text{ανν } \mathcal{A} \models \exists x(\varphi \to \psi)[v]. \tag{3.15}$$

Έστω ότι ισχύει η (3.14), δηλαδή ότι αν $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, τότε $\mathcal{A} \models \exists x\psi[v]$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

2α) Έστω ότι $\mathcal{A} \models \varphi[v]$. Τότε $\mathcal{A} \models \exists x\psi[v]$, άρα υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$. Τότε όμως για **το ίδιο** a ισχύει ότι, αν $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$, τότε $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$ (αφού $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$, δε μας ενδιαφέρει ουσιαστικά αν $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$ ή όχι). Συνεπώς υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ για το οποίο, αν $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$, τότε $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$, οπότε $\mathcal{A} \models \exists x(\varphi \to \psi)[v]$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

2β) Έστω ότι $\mathcal{A} \not\models \varphi[v]$. Θεωρούμε τυχόν στοιχείο a του $|\mathcal{A}|$ και την αποτίμηση $v(x|a)$. Επειδή η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο φ, ισχύει (δες Δραστηριότητα 3.1) $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, ανν $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$. Αφού $\mathcal{A} \not\models \varphi[v]$, ισχύει $\mathcal{A} \not\models \varphi[v(x|a)]$. Επομένως, σύμφωνα με τον τρόπο χειρισμού της συνεπαγωγής στα ελληνικά, αν $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$, τότε $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$. Υπάρχει λοιπόν $a \in |\mathcal{A}|$ για το οποίο, αν $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$, τότε $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό του Tarski, $\mathcal{A} \models \exists x(\varphi \to \psi)[v]$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.
Αντίστροφα τώρα, έστω ότι ισχύει η (3.15), δηλαδή υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ για το οποίο, αν $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$, τότε $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$. Διακρίνουμε πάλι δύο περιπτώσεις.

2γ) Έστω ότι $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$ για το συγκεκριμένο $a \in |\mathcal{A}|$. Τότε $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, αφού οι $v(x|a), v$ συμφωνούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στο φ. Επίσης $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$ για το συγκεκριμένο $a \in |\mathcal{A}|$. Συνεπώς, αν $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, τότε υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ για το οποίο $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$, δηλαδή αν $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, τότε $\mathcal{A} \models \exists x\psi[v]$, άρα ισχύει η (3.14).

2δ) Έστω ότι $\mathcal{A} \not\models \varphi[v(x|a)]$ για το συγκεκριμένο $a \in |\mathcal{A}|$. Τότε $\mathcal{A} \not\models \varphi[v]$ (όπως παραπάνω), άρα, σύμφωνα με τον τρόπο χειρισμού της συνεπαγωγής στα ελληνικά, αν $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, τότε $\mathcal{A} \models \exists x\psi[v]$. Άρα $\mathcal{A} \models \varphi \to \exists x\psi[v]$, δηλαδή πάλι ισχύει η (3.14).

Ισχύει λοιπόν η ισοδυναμία των (3.14) και (3.15), δηλαδή ο τύπος $(\varphi \to \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$ είναι λογικά αληθής. □

Με παρόμοιο τρόπο επαληθεύουμε ότι και οι υπόλοιποι νόμοι ποσοδεικτών είναι έγκυροι.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.6

Δείξτε ότι για οποιονδήποτε τύπο φ και τυχούσες μεταβλητές x και y έχουμε

α) $\models \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

β) $\models \exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$.

Ίσως οι νόμοι μετακίνησης ποσοδείκτη σας φαίνονται «περίεργοι», με την έννοια ότι δεν είναι σαφές ούτε πώς καταλήξαμε σ' αυτούς ούτε γιατί τους θεωρούμε σημαντικούς. Το θέμα αυτό θα ξεκαθαρίσει στην επόμενη ενότητα, ας δεχθούμε λοιπόν προς το παρόν μόνο την εγκυρότητά τους, αναβάλλοντας τη συζήτηση για τη χρησιμότητά τους.

Όπως στη λογική προτάσεων, ισχύει και εδώ ο «νόμος αντικατάστασης»:
Έστω ότι σε τυχόντα τύπο φ αντικαθιστούμε έναν υποτύπο του χ με κάποιο λογικά ισοδύναμο τύπο ψ. Αν δεν υπάρχει μεταβλητή που εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ, ενώ είναι δεσμευμένη στο φ, τότε ο τύπος που προκύπτει από την αντικατάσταση είναι λογικά ισοδύναμος με το φ. (Δες σχετικά την Άσκηση 3.11).

Στην ενότητα 3.5, θα αποδείξουμε το εξής αντίστοιχο του Θεωρήματος 2.6. **Θεώρημα Συμπάγειας.** Έστω T άπειρο σύνολο τύπων (της Γ_1). Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του T είναι ικανοποιήσιμο, τότε και το ίδιο το T είναι ικανοποιήσιμο.

Όπως στο Κεφάλαιο 2, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα και το Θεώρημα 3.3, η εγκυρότητα ενός επιχειρήματος ανάγεται στην ικανοποιησιμότητα όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων ενός κατάλληλου συνόλου τύπων. Δυστυχώς, όπως ήδη αναφέραμε, δεν υπάρχει αποτελεσματική διαδικασία ελέγχου της ικανοποιησιμότητας πεπερασμένων συνόλων τύπων. Σε επόμενη ενότητα θα δούμε ότι η έννοια αυτή είναι ισοδύναμη με μια συντακτική έννοια που είναι προσφορότερη για έλεγχο.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή ορίσαμε μια σημασιολογική έννοια συνεπαγωγής στην κατηγορηματική λογική και δώσαμε παραδείγματα τέτοιων συνεπαγωγών. Επίσης αναφέραμε βασικούς νόμους των ποσοδεικτών, μερικούς από τους οποίους δικαιολογήσαμε και σχολιάσαμε.

3.3 Κανονική Ποσοδεικτική Μορφή

Στόχος

Στην ενότητα αυτή στόχος είναι να δείξουμε ότι κάθε τύπος είναι λογικά ισοδύναμος με έναν τύπο σε κανονική μορφή και, κατά συνέπεια, ότι δύο σύνδεσμοι και ένας ποσοδείκτης αρκούν για τη σημασιολογία της κατηγορηματικής λογικής. Επίσης, θα δώσουμε παραδείγματα μετατροπής τύπων σε αντίστοιχες κανονικές μορφές.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει αυτή την ενότητα, θα μπορείτε να:

- *κατασκευάζετε την κανονική ποσοδεικτική μορφή οποιουδήποτε τύπου,*
- *αναφέρετε σύνολα συνδέσμων και ποσοδείκτη που είναι πλήρη.*

Έννοιες-κλειδιά

- *κανονική ποσοδεικτική μορφή,*
- *αλφαβητική παραλλαγή τύπου,*
- *πλήρες σύνολο συνδέσμων και ποσοδείκτη.*

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Κατ' αναλογία προς το αντίστοιχο ερώτημα στην προτασιακή λογική, μπορούμε να θέσουμε το εξής ερώτημα: αν κρατήσουμε μερικούς από τους αρχικούς συνδέσμους και έναν ποσοδείκτη, αλλάζει σημασιολογικά η πρωτοβάθμια γλώσσα; Στο ερώτημα αυτό θα απαντήσουμε στη συνέχεια.

Αρχίζουμε με έναν ορισμό.

Ορισμός 3.10. Έστω φ τυχών τύπος. Λέμε ότι ο φ είναι σε «κανονική ποσοδεικτική μορφή», αν και μόνο αν είναι της μορφής $Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \psi$, όπου $Q_1, \ldots Q_n$ είναι ποσοδείκτες και ψ είναι «ανοικτός» τύπος, δηλαδή τύπος στον οποίο δεν εμφανίζονται ποσοδείκτες. □

Το επόμενο θεώρημα είναι αντίστοιχο του Θεωρήματος 2.7.

Θεώρημα 3.4. (Θεώρημα Κανονικής Ποσοδεικτικής Μορφής) Για κάθε τύπο φ υπάρχει τύπος φ^* σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμος προς το φ.

Η απόδειξη είναι αρκετά πολύπλοκη κι έτσι θα προτάξουμε μερικά παραδείγματα που περιέχουν τις βασικές ιδέες της. Μια από αυτές είναι η χρήση των νόμων μετακίνησης ποσοδεικτών, οι οποίοι, όπως παρατηρήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, δεν είναι τόσο κατανοητοί όσο οι υπόλοιποι νόμοι ποσοδεικτών.

Παράδειγμα 3.12. Έστω ο τύπος $\forall x(Q(x) \to \exists y R(y,y))$. Με βάση το δεύτερο νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη, όπου στη θέση του τύπου φ έχουμε τον τύπο $Q(x)$ και στη θέση του τύπου ψ έχουμε τον $R(y,y)$, ισχύει

$$Q(x) \to \exists y R(y,y) \equiv \exists y(Q(x) \to R(y,y)),$$

αφού η ποσοδειγμένη μεταβλητή y δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $Q(x)$. Άρα, σύμφωνα με το νόμο αντικατάστασης, ο αρχικός τύπος είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\forall x \exists y(Q(x) \to R(y,y))$, ο οποίος είναι σε κανονική διαζευκτική μορφή. □

Τι γίνεται όμως αν ο αρχικός τύπος δεν είναι τόσο «αθώος» όσο αυτός του προηγούμενου παραδείγματος; Η δυσκολία μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι εμφανίζονται στον τύπο άλλοι σύνδεσμοι ή κάποια ποσοδειγμένη μεταβλητή ενός υποτύπου εμφανίζεται ελεύθερη σε άλλο υποτύπο. Και στις δυο περιπτώσεις φαίνεται να μην εφαρμόζονται οι νόμοι μετακίνησης.

Για την πρώτη περίπτωση, το εμπόδιο ξεπερνιέται εύκολα, αν χρησιμοποιήσουμε νόμους της προτασιακής λογικής. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε σιωπηρά το νόμο αντικατάστασης της κατηγορηματικής λογικής.

Παράδειγμα 3.13. Θα βρούμε τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\forall x(Q(x) \land \neg \exists y R(y,y))$. Χρησιμοποιώντας το νόμο άρνησης συνεπαγωγής, έχουμε ότι ο τύπος αυτός είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο

$$\forall x \neg (Q(x) \to \exists y R(y, y)). \tag{3.16}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη, συμπε ραίνουμε ότι ο (3.16) είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο

$$\forall x \neg \exists y (Q(x) \to R(y, y)). \tag{3.17}$$

Με βάση τώρα το δεύτερο νόμο άρνησης ποσοδείκτη, ο (3.17) είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\forall x \forall y \neg (Q(x) \to R(y, y))$, ο οποίος είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή.
(Χρησιμοποιώντας πάλι το νόμο άρνησης συνεπαγωγής, μπορούμε να καταλήξουμε στον τύπο $\forall x \forall y (Q(x) \wedge \neg R(y, y))$.) □

Η δεύτερη περίπτωση όμως είναι πιο πολύπλοκη – η λύση είναι να απαλλαγούμε από την «προβληματική» μεταβλητή, πράγμα που γίνεται με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.

Θεώρημα 3.5. (Θεώρημα Αλφαβητικών Παραλλαγών) Για κάθε τύπο φ υπάρχει τύπος $\overline{\varphi}$ τέτοιος που $\varphi \equiv \overline{\varphi}$ και δεν υπάρχει μεταβλητή x που ταυτόχρονα εμφανίζεται ελεύθερη στο $\overline{\varphi}$ και εμφανίζεται ποσοδειγμένη σε κάποιον υποτύπο του $\overline{\varphi}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ. Το ζητούμενο ισχύει προφανώς, αν ο φ είναι ατομικός τύπος, αφού όλες οι εμφανίσεις μεταβλητών σε τέτοιους τύπους είναι ελεύθερες.

Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ και ο ψ έχει την ιδιότητα. Τότε οι ίδιες ακριβώς μεταβλητές εμφανίζονται ελεύθερες στους $\psi, \neg\psi$ και είναι δεσμευμένες σε υποτύπους τους, άρα και ο φ έχει την ιδιότητα.

Έστω τώρα ότι ο φ είναι της μορφής $\psi \wedge \chi$, όπου οι ψ, χ έχουν την ιδιότητα. Θεωρούμε τον τύπο $\overline{\psi} \wedge \overline{\chi}$ και τυχούσα μεταβλητή x. Έστω ότι η x εμφανίζεται ελεύθερη και ταυτόχρονα εμφανίζεται ποσοδειγμένη στον $\overline{\psi} \wedge \overline{\chi}$. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, αποκλείεται η x

α) να εμφανίζεται ελεύθερη και ταυτόχρονα να είναι ποσοδειγμένη στον $\overline{\psi}$ ή β) να εμφανίζεται ελεύθερη και ταυτόχρονα να είναι ποσοδειγμένη στο $\overline{\chi}$.

Συνεπώς, η x εμφανίζεται ελεύθερη σε έναν από τους $\overline{\psi}, \overline{\chi}$ και εμφανίζεται ποσοδειγμένη στον άλλο. Ας υποθέσουμε ότι η x εμφανίζεται ελεύθερη στον $\overline{\psi}$ και ποσοδειγμένη στο $\overline{\chi}$. Έστω $\forall x \eta$ υποτύπος του $\overline{\chi}$ στον οποίο εμφανίζεται ποσοδειγμένη η x. Επιλέγουμε μεταβλητή y, που δεν εμφανίζεται καθόλου στον τύπο $\overline{\psi} \wedge \overline{\chi}$ (– στην πραγματικότητα, αρκεί η y να μην εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο αυτό). Τότε $\forall x \eta \equiv \forall y \eta_y^x$, όπου η_y^x είναι ο τύπος που παίρνουμε από τον η αντικαθιστώντας όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της x με τη y (δες Δραστηριότητα 3.3). Με βάση το νόμο αντικατάστασης, ισχύει ότι $\overline{\psi} \wedge \overline{\chi} \equiv \overline{\psi} \wedge \overline{\overline{\chi}}$, όπου $\overline{\overline{\chi}}$ είναι ο τύπος που παίρνουμε από τον τύπο $\overline{\chi}$ αντικαθιστώντας τον υποτύπο $\forall x \eta$ με τον τύπο $\forall y \eta_y^x$. Με όμοιο τρόπο αντικαθιστούμε τη x με νέα μεταβλητή, για κάθε ποσοδειγμένη εμφάνισή της στο $\overline{\overline{\chi}}$. Έστω σ ο τύπος που προκύπτει στο τέλος της διαδικασίας. Θέτοντας $\varphi_1 = \overline{\psi} \wedge \sigma$, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη και ταυτόχρονα ποσοδειγμένη στον τύπο φ_1. Όμοια δουλεύουμε για όλες τις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο φ_1 και καταλήγουμε στο ζητούμενο τύπο $\overline{\varphi}$.

Τέλος, όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι αν ο τύπος ψ έχει την ιδιότητα, τότε και ο $\forall x \psi$ έχει την ιδιότητα, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Για την παραπάνω απόδειξη χρειαστήκαμε ένα «νόμο αντικατάστασης μεταβλητών», που λέει ότι μπορούμε σε κάθε τύπο να αντικαταστήσουμε μια μεταβλητή από μια «ισοδύναμή» της, καταλήγοντας σε λογικά ισοδύναμο τύπο. Για ν' αποδείξουμε το νόμο αυτό, πρέπει πρώτα να ελέγξουμε ότι η αντικατάσταση μιας μεταβλητής ενός όρου με άλλη «ισοδύναμή» της αφήνει την τιμή του όρου αμετάβλητη, αρκεί να τροποποιηθεί αντίστοιχα η αποτίμηση που θεωρούμε.

Λήμμα 3.2. Για κάθε όρο t, δομή $\mathcal{A}$, αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$, μεταβλητές x, y, αν η y δεν εμφανίζεται στον t, τότε: $\overline{v(x|a)}(t) = \overline{v(y|a)}((t)_y^x)$.

Απόδειξη. Όμοια με αυτή του Λήμματος 3.1. □

Τώρα μπορούμε, εφαρμόζοντας την αρχή της επαγωγής για το $T(\Gamma_1)$, να αποδείξουμε ένα νόμο αντικατάστασης μεταβλητών.

Δραστηριότητα 3.3

Δείξτε ότι, αν η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται καθόλου στον τύπο $\forall x\eta$, τότε $\forall x\eta \equiv \forall y\eta^x_y$.

Συνέπεια του Θεωρήματος 3.5 είναι ότι ουσιαστικά σε κάθε τύπο μπορούν να γίνουν μετακινήσεις ποσοδεικτών χωρίς πρόβλημα.

Πρόταση 3.1. Για τυχόντα τύπο φ, στον τύπο $\overline{\varphi}$ του θεωρήματος 3.5 μπορούν να μετακινηθούν όλοι οι ποσοδείκτες.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει τύπος φ για τον οποίο υπάρχει ποσοδείκτης του $\overline{\varphi}$, ο οποίος δεν μπορεί να μετακινηθεί, ας πούμε στα πλαίσια του υποτύπου $\psi \to \forall x\chi$ του $\overline{\varphi}$. Αυτό σημαίνει ότι η x εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $\psi \to \forall x\chi$, ενώ είναι δεσμευμένη στον υποτύπο $\forall x\chi$, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεσή μας για τον τύπο $\overline{\varphi}$. □

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα εφαρμογής της βασικής ιδέας του Θεωρήματος 3.4.

Παράδειγμα 3.14. Θα βρούμε τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\forall x(Q(x) \to \exists x R(x,x))$.

Αν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη, θα διαπιστώσουμε ότι αυτό δεν είναι δυνατόν, αφού η μεταβλητή x, της οποίας τον ποσοδείκτη θέλουμε να μετακινήσουμε, εμφανίζεται ελεύθερη στην υπόθεση $Q(x)$ της συνεπαγωγής. Το εμπόδιο αυτό αποφεύγουμε με μια αλφαβητική παραλλαγή του τύπου. Επιλέγουμε λοιπόν μια μεταβλητή y διαφορετική από τη x και αντικαθιστούμε τον τύπο $\exists x R(x,x)$ με τον τύπο $\exists y R(y,y)$. Έτσι προκύπτει ο τύπος $\forall x(Q(x) \to \exists y R(y,y))$, που είναι λογικά ισοδύναμος με τον αρχικό και στον οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε το δεύτερο νόμο μετακίνησης ποσοδείκτη, καταλήγοντας στον τύπο $\forall x \exists y(Q(x) \to R(y,y))$, που είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή. □

Τώρα έχουμε ό,τι χρειάζεται για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου φ, υποθέτοντας ότι ο φ έχει την ιδιότητα της Πρότασης 3.1.

Αν ο φ είναι ατομικός, τότε είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή και $\varphi \equiv \varphi$, οπότε θεωρούμε τον ίδιο το φ ως φ^*.

Έστω τώρα ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ και υπάρχει τύπος ψ^* σε κανονική ποσοδεικτική μορφή τέτοιος ώστε $\psi \equiv \psi^*$. Εφαρμόζουμε τους νόμους άρνησης ποσοδεικτών για να «σπρώξουμε» το σύνδεσμο $\neg$ προς το ανοικτό μέρος του ψ^*. Δηλαδή, υποθέτοντας ότι ο ψ^* είναι της μορφής $Q_1y_1\dots Q_ny_n\theta$, όπου θ ανοικτός τύπος, με εφαρμογή των νόμων άρνησης ποσοδεικτών έχουμε ότι $\neg\psi^* \equiv \overline{Q_1}y_1\dots\overline{Q_n}y_n\neg\theta$, όπου με $\overline{Q_i}$ συμβολίζουμε τον αντίθετο ποσοδείκτη του Q_i για $1 \le i \le n$. Προφανώς, ο τύπος $\overline{Q_1}y_1\dots\overline{Q_n}y_n\neg\theta$ είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή και είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο φ.

Έστω τώρα ότι ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$ και υπάρχουν τύποι ψ^*, χ^* σε κανονική ποσοδεικτική μορφή τέτοιοι ώστε $\psi \equiv \psi^*$ και $\chi \equiv \chi^*$. Εφαρμόζουμε τους νόμους μετακίνησης ποσοδείκτη για να «σπρώξουμε» προς τα εμπρός τους ποσοδείκτες που υπάρχουν στους τύπους ψ^* και χ^*. Δηλαδή, υποθέτοντας ότι ο ψ^* είναι της μορφής $Q_1y_1\dots Q_ny_n\theta$ και ο χ^* είναι της μορφής $Q'_1z_1\dots Q'_mz_m\eta$, όπου θ, η είναι ανοικτοί τύποι, με εφαρμογή των νόμων μετακίνησης πρώτα στους ποσοδείκτες του ψ^* και μετά σε εκείνους του χ^* έχουμε

$$\psi^* \to \chi^* \equiv \overline{Q_1}y_1\dots\overline{Q_n}y_nQ'_1z_1\dots Q'_mz_m(\theta \to \eta).$$

Προφανώς ο τύπος $\overline{Q_1}y_1\dots\overline{Q_n}y_nQ'_1z_1\dots Q'_mz_m(\theta \to \eta)$ είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή και είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο φ.

Έστω, τέλος, ότι ο φ είναι της μορφής $\forall x\psi$ και υπάρχει τύπος ψ^* σε κανονική ποσοδεικτική μορφή τέτοιος ώστε $\psi \equiv \psi^*$. Με βάση το νόμο αντικατάστασης, ισχύει τότε ότι $\forall x\psi \equiv \forall x\psi^*$, δηλαδή ότι $\varphi \equiv \forall x\psi^*$. Προφανώς όμως ο τύπος $\forall x\psi^*$ είναι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή, άρα ισχύει το ζητούμενο για το φ. $\square$

Σημειώσεις.

α) Οι περιπτώσεις των υπόλοιπων συνδέσμων είναι όμοιες με την περίπτωση του $\to$ (δες και Παράδειγμα 3.13). Όμοια για την περίπτωση του ποσοδείκτη $\exists$.

β) Η επιλογή μας, στο μέρος της παραπάνω απόδειξης που αφορά τύπο μορφής

$\psi \to \chi$, να μετακινήσουμε πρώτα τους ποσοδείκτες του τύπου ψ^* και μετά εκείνους του τύπου χ^* ήταν αυθαίρετη. Η μετακίνηση των ποσοδεικτών επιτρέπεται να γίνει με οποιαδήποτε σειρά, όλοι οι τύποι που προκύπτουν είναι λογικά ισοδύναμοι. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.7

Βρείτε τρεις τύπους σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμοι με τον τύπο $\forall x \exists y \psi \to \exists y \theta$, όπου x και y είναι διαφορετικές μεταβλητές, ψ, θ είναι ανοικτοί τύποι.

Σε αναλογία με τον Ορισμό 2.8, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.11. Έστω C σύνολο συνδέσμων και Q ποσοδείκτης. Θα λέμε ότι το σύνολο $C \cup \{Q\}$ είναι «πλήρες», ανν κάθε τύπος είναι λογικά ισοδύναμος με έναν τύπο που περιέχει μόνο τον ποσοδείκτη Q και συνδέσμους από το C. □

Συνέπεια του θεωρήματος κανονικής ποσοδεικτικής μορφής είναι ότι, αν κρατήσουμε ένα πλήρες υποσύνολο του $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ και έναν ποσοδείκτη (οποιονδήποτε από τους δύο), τότε προκύπτει ένα πλήρες σύνολο συνδέσμων και ποσοδείκτη. Παραδείγματος χάρη, αν πάρουμε το σύνολο $\{\neg, \vee, \exists\}$, κάθε τύπος είναι ισοδύναμος με έναν τύπο στον οποίο εμφανίζονται μόνο τα σύμβολα αυτά. Πράγματι, έστω φ τυχών τύπος. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4, υπάρχει τύπος φ^* σε κανονική ποσοδεικτική μορφή τέτοιος ώστε $\varphi \equiv \varphi^*$. Ας υποθέσουμε ότι ο φ^* είναι της μορφής $Q_1 y_1 \dots Q_n y_n \psi$, όπου ψ είναι ανοικτός τύπος. Με βάση την Πρόταση 2.1, υπάρχει τύπος χ στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \vee$ τέτοιος ώστε $\psi \equiv \chi$ (βέβαια, η Πρόταση αυτή αφορά προτασιακούς τύπους, αλλά αναφέραμε ήδη ότι οι ατομικοί τύποι μπορούν να θεωρηθούν ως προτασιακές μεταβλητές και, κατά συνέπεια, οι τύποι να θεωρηθούν ως προτασιακοί τύποι). Έχουμε λοιπόν ότι $\varphi \equiv Q_1 y_1 \dots Q_n y_n \chi$. Χρησιμοποιώντας τώρα τον τρίτο νόμο άρνησης ποσοδείκτη, μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις του «ανεπιθύμητου» ποσοδείκτη $\forall$ με εμφανίσεις του $\exists$ (μαζί με εμφανίσεις του $\neg$). Έτσι θα καταλήξουμε σε έναν τύπο $\overline{\varphi}$, στον οποίο εμφανίζονται μόνο τα σύμβολα $\neg, \vee, \exists$ τέτοιο ώστε $\varphi \equiv \varphi^*$.

Παράδειγμα 3.15. Θα βρούμε έναν τύπο που είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\forall x(Q(x) \wedge \forall y R(y,y))$ και στον οποίο εμφανίζονται μόνο οι σύνδεσμοι $\neg, \vee$ και ο ποσοδείκτης $\exists$.

Κατ' αρχήν θα προωθήσουμε όλους τους ποσοδείκτες μπροστά, επιτρέποντας όμως την εμφάνιση του συμβόλου $\neg$, ενώ, αν θέλαμε να βρούμε τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή, θα θέλαμε να μείνουν μπροστά **μόνο** ποσοδείκτες. Σχηματικά, εργαζόμαστε ως εξής:

$\forall x(Q(x) \wedge \forall y R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος διπλής άρνησης)
$\forall x(Q(x) \wedge \neg\neg\forall y R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος άρνησης συνεπαγωγής)
$\forall x \neg(Q(x) \rightarrow \neg\forall y R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος άρνησης ποσοδείκτη)
$\forall x \neg(Q(x) \rightarrow \exists y \neg R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος μετακίνησης ποσοδείκτη)
$\forall x \neg\exists y(Q(x) \rightarrow \neg R(y,y))$ (*)	$\equiv$	(νόμος αντικ/σης συνεπαγωγής)
$\forall x \neg\exists y(\neg Q(x) \vee \neg R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος άρνησης ποσοδείκτη)
$\neg\exists x \neg\neg\exists y(\neg Q(x) \vee \neg R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος διπλής άρνησης)
$\neg\exists x \exists y(\neg Q(x) \vee \neg R(y,y))$		

Σημειώνουμε ότι αν πρώτα βρίσκαμε τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμος με τον αρχικό και μετά κάναμε απαλοιφή των ανεπιθύμητων συμβόλων, θα είχαμε τα εξής βήματα μετά το (*):

	$\equiv$	(νόμος άρνησης ποσοδείκτη)
$\forall x \forall y \neg(Q(x) \rightarrow \neg R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος αντικ/σης συνεπαγωγής)
$\forall x \forall y \neg(\neg Q(x) \vee \neg R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος άρνησης ποσοδείκτη)
$\neg\exists x \neg\forall y \neg(\neg Q(x) \vee \neg R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος άρνησης ποσοδείκτη)
$\neg\exists x \neg\neg\exists y \neg\neg(\neg Q(x) \vee \neg R(y,y))$	$\equiv$	(νόμος διπλής άρνησης)
$\neg\exists x \exists y(\neg Q(x) \vee \neg R(y,y))$		$\square$

Σημείωση. Επειδή το σύνολο $\{\neg, \rightarrow, \forall\}$ είναι πλήρες, ορισμένοι συγγραφείς θεωρούν μόνο αυτά τα σύμβολα στον αρχικό ορισμό μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας και εισάγουν τα υπόλοιπα ως συντομογραφίες. Φυσικά, δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ αυτής και της δικής μας προσέγγισης. Και οι δυο καταλήγουν στο ότι η εφαρμογή της αρχής της επαγωγής για το $T(\Gamma_1)$ και του ορισμού αλήθειας του Tarski αρκεί να γίνεται μόνο για τέσσερις περιπτώσεις, δηλαδή για ατομικούς τύπους και τύπους των μορφών $\neg\psi$, $\psi \rightarrow \chi$, $\forall x \psi$. $\square$

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή αποδείξαμε ότι οι ποσοδείκτες κάθε τύπου μπορούν να μετακινηθούν στην αρχή του χωρίς να αλλάξει ουσιαστικά ο τύπος. Επίσης είδαμε παραδείγματα συνόλων συνδέσμων και ποσοδείκτη που αρκούν για να εκφραστεί όλη η σημασιολογία μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας.

3.4 Κατηγορηματικός Λογισμός

Στόχος

Ο κύριος στόχος είναι να παρουσιαστεί μια συντακτική θεώρηση του ελέγχου εγκυρότητας επιχειρημάτων σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα, στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος. Θα οριστεί μια έννοια απόδειξης ανάλογη αυτής που δόθηκε για τον προτασιακό λογισμό και θα δοθούν παραδείγματα τέτοιων αποδείξεων. Τέλος, θα αποδειχθούν θεωρήματα που διευκολύνουν την κατασκευή τέτοιων αποδείξεων και θα δοθούν παραδείγματα εφαρμογής τους.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει αυτή την ενότητα, θα μπορείτε να:

- *διακρίνετε αν ένας τύπος είναι ή όχι αξίωμα του κατηγορηματικού λογισμού,*
- *κατασκευάζετε τυπικές αποδείξεις στα πλαίσια του κατηγορηματικού λογισμού,*
- *εφαρμόζετε βασικά θεωρήματα που αφορούν στον κατηγορηματικό λογισμό.*

Έννοιες-κλειδιά

- *λογικά αξιώματα,*
- *αξιώματα Peano,*
- *θεώρημα γενίκευσης,*
- *μη λογικά αξιώματα,*
- *αντικαταστασιμότητα (μεταβλητής από όρο),*
- *θεώρημα γενίκευσης σταθερής.*

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Κατ' αναλογίαν προς ό,τι συνέβη στην προτασιακή λογική, θα ασχοληθούμε με τον ορισμό και την ανάπτυξη ενός συνεπούς αξιωματικού συστήματος, στα πλαίσια *του οποίου μπορούν να παραχθούν όλοι οι λογικά αληθείς τύποι – η έννοια «συνεπές» για σύνολα τύπων ορίζεται όπως και η αντίστοιχη έννοια για σύνολα προτασιακών τύπων (Ορισμός 2.11). Όπως και στην ενότητα 2.4, ο έλεγχος ενός επιχειρήματος γίνεται μόνο με βάση τη συντακτική μορφή των υποθέσεων και του συμπεράσματος, στα πλαίσια ενός κατάλληλου συνόλου αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων. Κάτι που κάνει την κατάσταση εδώ πολύ διαφορετική από εκείνη στην προτασιακή λογική είναι το γεγονός ότι τα σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας ανήκουν σε δυο κατηγορίες, ενώ τα σύμβολα της τυπικής γλώσσας* Γ_0 *ήταν όλα του ίδιου είδους. Το γεγονός αυτό θα μας οδηγήσει στην υιοθέτηση ενός συνόλου αξιωμάτων που θα αφορούν στα λογικά σύμβολα και ενός συνόλου αξιωμάτων που θα αφορούν στα μη λογικά σύμβολα της* Γ_1. *Έτσι, σε αντιστοιχία προς την πληθώρα πρωτοβάθμιων γλωσσών, δημιουργείται μια πληθώρα αξιωματικών συστημάτων, καθένα από τα οποία αποτελεί το κατάλληλο πλαίσιο για τη μελέτη αποδείξεων που εντάσσονται σε μια περιοχή γνώσης, τη θεωρία αριθμών παραδείγματος χάρη. Αυτό που πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα είναι ότι όλα αυτά τα αξιωματικά συστήματα θα έχουν μόνο έναν κανόνα, το Modus Ponens του προτασιακού λογισμού (- δες ενότητα 2.4). Θα μπορούσαμε να υιοθετήσουμε και έναν κανόνα που αφορά στον ποσοδείκτη* $\forall$, *αυτό όμως δεν είναι αναγκαίο – δες σχετικά τις παρατηρήσεις μετά τον επόμενο ορισμό του αξιωματικού συστήματος* $\mathrm{K}\Lambda_{\Gamma_1}$.

Θα ορίσουμε πρώτα μια έννοια που θα χρειαστούμε σε λίγο.

Ορισμός 3.12. Έστω ότι φ, ψ είναι τύποι. Θα λέμε ότι «ο ψ είναι γενίκευση του φ», ανν ο ψ ταυτίζεται με τον φ ή ο ψ είναι της μορφής $\forall y_1 ... \forall y_n \varphi$. □

Παραδείγματος χάρη, ο τύπος $\forall x_1(P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_1))$ είναι γενίκευση του $P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_2)$ και ο $\forall x_1 \forall x_3(Q(x_1) \vee R(x_1))$ είναι γενίκευση του $Q(x_1) \vee R(x_1)$.

Για τη συγκεκριμένη γλώσσα Γ_1, ορίζουμε το αξιωματικό σύστημα $\mathrm{K}\Lambda_{\Gamma_1} = < A_{\Gamma_1}, K_1 >$ ως εξής:

α) Το σύνολο K_1 είναι το ίδιο με το K_0 που είχαμε στον προτασιακό λογισμό, έχει δηλαδή μόνο ένα στοιχείο, τον κανόνα $M.P.$

β) Το σύνολο A_{Γ_1} των αξιωμάτων ισούται με την ένωση δύο ξένων συνόλων, των A_1 και M_{Γ_1}. Τα στοιχεία του A_1 καλούνται «λογικά αξιώματα», περιγράφουν το ρόλο των λογικών συμβόλων της Γ_1 και είναι όλες οι γενικεύσεις τύπων της ακόλουθης μορφής:

$A\Sigma 1$ $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

$A\Sigma 2$ $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

$A\Sigma 3$ $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

$A\Sigma 4$ $\forall x\varphi \to \varphi^x_t$,
όπου η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στο φ (δες Ορισμό 3.13) και φ^x_t είναι ο τύπος που παίρνουμε από το φ αντικαθιστώντας τη μεταβλητή x, όπου εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, με τον όρο t.

$A\Sigma 5$ $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

$A\Sigma 6$ $\varphi \to \forall x\varphi$, όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ.

$A\Sigma 7$ $x \approx x$

$A\Sigma 8$ $x \approx y \to (\varphi \leftrightarrow \varphi^*)$,
όπου φ ατομικός τύπος (βλ. Ορισμό 3.3) και φ^* τύπος που παίρνουμε από το φ αντικαθιστώντας τη x (σε μερικές ή όλες τις εμφανίσεις της) με y.

Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1– ΑΣ3 εξασφαλίζουν ότι ο ρόλος των συνδέσμων είναι ο ίδιος με αυτόν που είχαν στα πλαίσια του συστήματος $\mathcal{A}_0$ της ενότητας 2.4. Τα σχήματα ΑΣ4– ΑΣ6 αφορούν στη συμπεριφορά του ποσοδείκτη $\forall$, σε σχέση α) με το σύνδεσμο $\to$, β) τις δεσμευμένες μεταβλητές και γ) την αντικατάσταση μεταβλητής από όρο. (Αναβάλλουμε για λίγο τον ορισμό της έννοιας «αντικαταστάσιμη», καθώς και τη συζήτηση του περιορισμού που έχει τεθεί στο σχήμα ΑΣ4.) Τα υπόλοιπα σχήματα αφορούν βασικές ιδιότητες του συμβόλου $\approx$, δηλαδή την ανακλαστικότητα (το ΑΣ7) και τη δυνατότητα αντικατάστασης μιας μεταβλητής από άλλη «ισοδύναμη» σε ατομικούς τύπους (το ΑΣ8).
Τα στοιχεία του M_{Γ_1} καλούνται «μη λογικά αξιώματα» και εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη γλώσσα Γ_1 (αφού περιγράφουν το ρόλο των μη λογικών συμβόλων της). Αν, ας πούμε, το σύστημα αφορά στη $\Gamma_1^{\kappa\lambda}$, τότε $M_{\Gamma_1} = \emptyset$.

Αν όμως το σύστημα αφορά στη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$, τότε το M_{Γ_1} είναι το σύνολο των αξιωμάτων Peano() για την αριθμητική, δηλαδή το εξής σύνολο, το οποίο συνήθως συμβολίζεται με P:

$P1$ $\forall x_1\ x_1' \not\approx \mathbf{0}$

$P2$ $\forall x_1 \forall x_2 (x_1' \approx x_2' \to x_1 \approx x_2)$

$P3$ $\forall x_1\ x_1 \oplus \mathbf{0} \approx x_1$

$P4$ $\forall x_1 \forall x_2\ x_1 \oplus x_2' \approx (x_1 \oplus x_2)'$

$P5$ $\forall x_1\ x_1 \otimes \mathbf{0} \approx \mathbf{0}$

$P6$ $\forall x_1 \forall x_2\ x_1 \otimes x_2' \approx x_1 \otimes x_2 + x_1$

$P7$ $\varphi(\mathbf{0}) \wedge \forall x_0 (\varphi(x_0) \to \varphi(x_0')) \to \forall x_0 \varphi(x_0)$,
όπου $\varphi(x_0)$ τύπος της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ στον οποίο η μεταβλητή x_0 εμφανίζεται ελεύθερη.

Τα αξιώματα $P1 - P6$, τα οποία κατά πάσα πιθανότητα έχετε ξαναδεί, έστω και σε λίγο διαφορετική μορφή, εκφράζουν βασικές ιδιότητες των συναρτησιακών συμβόλων $'$, $\oplus$, $\otimes$: τα $P1 - P2$ ότι το $'$ συμβολίζει συνάρτηση που είναι 1-1 και δεν έχει ως τιμή το $\mathbf{0}$, τα $P3 - P4$ τον αναδρομικό ορισμό της $\oplus$ και τα $P5 - P6$ τον αναδρομικό ορισμό του $\otimes$. Το αξιωματικό σχήμα $P7$ αντιστοιχεί στη συνήθη αρχή της επαγωγής για το σύνολο των φυσικών αριθμών, μόνο όμως όσον αφορά σύνολα που «ορίζονται» από τύπους της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$. Συγκεκριμένα, αν φανταστούμε ότι ο τύπος-ιδιότητα $\varphi(x_0)$ αντιστοιχεί στο σύνολο , τότε το αξίωμα που προκύπτει από το $P7$ αντιστοιχεί στην πρόταση «αν $0 \in A$ και (για κάθε $n \in \mathbf{N}$, αν $n \in A$, τότε $n + 1 \in A$), τότε $A = \mathbf{N}$». Σημειώνουμε ότι στον τύπο φ επιτρέπεται να εμφανίζονται και άλλες ελεύθερες μεταβλητές, οι οποίες παίζουν το ρόλο παραμέτρων.

Ας έρθουμε τώρα στις διευκρινίσεις που εκκρεμούν σχετικά με το αξιωματικό σχήμα ΑΣ4. Η ιδέα είναι «αν κάθε αντικείμενο έχει την ιδιότητα φ, τότε και το συγκεκριμένο αντικείμενο t έχει τη φ», όμως πρέπει να προσέξουμε μήπως κάποιο κομμάτι του t είναι ασυμβίβαστο με κάποιο κομμάτι του φ: δεν πρέπει κάποια μεταβλητή που εμφανίζεται στον t να δεσμευθεί από κάποιο ποσοδείκτη του φ. Ας δούμε μ' ένα παράδειγμα τι θέλουμε ν' αποφύγουμε.

Παράδειγμα 3.16. Έστω φ ο τύπος $\exists y x \not\approx y$ και t ο όρος y. Τότε ο φ^x_t είναι ο τύπος $\exists y y \not\approx y$, οπότε $\forall x \varphi \to \varphi^x_t$ είναι η πρόταση

$$\forall x \exists y x \not\approx y \to \exists y y \not\approx y,$$

η οποία είναι ψευδής σχεδόν σ' όλες τις δομές για την Γ_1. Πράγματι, η πρόταση $\forall x \exists y x \not\approx y$ είναι αληθής σε κάθε δομή $\mathcal{A}$, της οποίας το σύμπαν έχει τουλάχιστο δυο στοιχεία, ενώ η $\exists y y \not\approx y$ είναι ψευδής σε κάθε δομή $\mathcal{A}$. Αν λοιπόν δε βάλουμε κάποιο περιορισμό στις αντικαταστάσεις μεταβλητών από όρους, θα έχουμε ως αξίωμα την πρόταση $\forall x \exists y x \not\approx y \to \exists y y \not\approx y$, πράγμα που δε συμβιβάζεται με την εύλογη επιθυμία μας να παίρνουμε ως λογικά αξιώματα έγκυρους τύπους. □

Η έννοια της αντικαταστασιμότητας ορίζεται με αναδρομικό τρόπο όπως ακολουθεί.

Ορισμός 3.13. Θα λέμε ότι «η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον φ», ανν

1) ο φ είναι ατομικός ή
2) ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ ή
3) ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ και στον χ ή
4) ο φ είναι της μορφής $\forall y \psi$ και
   α) η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall y \psi$ ή
   β) η y δεν εμφανίζεται στον t και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ.

□

Παραδείγματος χάρη, η x είναι αντικαταστάσιμη από τη x σε κάθε τύπο φ και η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από την y στον τύπο $P(x) \to \exists y Q(x, y)$.

Προφανώς, αν καμιά από τις μεταβλητές του t δεν εμφανίζεται στο φ, τότε η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στο φ.

Στη συνέχεια, θα δούμε πώς μια εφαρμογή της συνήθους αρχής της επαγωγής μπορεί να θεωρηθεί ως εφαρμογή του σχήματος $P7$.

Παράδειγμα 3.17. Για να δείξουμε ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει $m + n = n + m$, εφαρμόζουμε την αρχή της επαγωγής στο σύνολο

$$A = \{n \in \mathbf{N} | \text{ για κάθε } m, m + n = n + m\}.$$

Επαληθεύοντας ότι (α) $0 \in A$ και (β) για κάθε $n \in \mathbf{N}$, αν $n \in A$, τότε $n+1 \in A$, συμπεραίνουμε ότι όλοι οι φυσικοί αριθμοί ανήκουν στο A.

Η αντίστοιχη εφαρμογή του σχήματος $P7$ γίνεται ως εξής: Θεωρούμε τον τύπο $\forall x_1 x_1 \oplus x_0 \approx x_0 \oplus x_1$ ως τον τύπο $\varphi(x_0)$ και αποδεικνύουμε τυπικά τον τύπο $\forall x_1 x_1 \oplus \mathbf{0} \approx \mathbf{0} \oplus x_1$, δηλαδή τον $\varphi(\mathbf{0})$, και τον τύπο $\forall x_0(\forall x_1 x_1 \oplus x_0 \approx x_0 \oplus x_1 \to \forall x_1 x_1 \oplus x_0' \approx x_0' \oplus x_1)$, δηλαδή τον $\forall x_0(\varphi(x_0) \to \varphi(x_0'))$. Από τους τύπους αυτούς αποδεικνύεται τυπικά ο τύπος $\forall x_0 \varphi(x_0)$, δηλαδή ο τύπος $\forall x_0 \forall x_1 x_1 \oplus x_0 \approx x_0 \oplus x_1$.

□

Παρατηρήσεις.

α) Αντί για τα σύνολα A_1, K_1 που είδαμε προηγουμένως, μπορούμε να πάρουμε τα A_1', K_1', όπου

1) K_1' είναι το σύνολο που έχει δυο στοιχεία, τον κανόνα MP και τον κανόνα γενίκευσης:

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$$

2) A_1' είναι το σύνολο που έχει για στοιχεία όλες τις γενικεύσεις τύπων που δίνουν τα $A\Sigma 1 - 4$, $A\Sigma 7$, $A\Sigma 8$ και το σχήμα
$A\Sigma 5'$ $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$, όπου η x είναι δεσμευμένη στον φ.

Σημειώνουμε ότι υπάρχει γενικά η δυνατότητα, τόσο στον κατηγορηματικό, όσο και στον προτασιακό λογισμό, να αυξηθεί το πλήθος των αποδεικτικών κανόνων με αντίστοιχη μείωση του πλήθους των αξιωματικών σχημάτων. Η υιοθέτηση ενός μόνο αξιωματικού σχήματος και πολλών αποδεικτικών κανόνων οδηγεί στα λεγόμενα συστήματα «φυσικής παραγωγής» (natural deduction).

β) Οι τυπικές αποδείξεις στο ΚΛ_{Γ_1} αντιστοιχούν σε αποδείξεις που κάνουμε με προτάσεις της ελληνικής γλώσσας με την έννοια της κύριας ερμηνείας της Γ_1. Έτσι, παραδείγματος χάρη, οι τυπικές αποδείξεις στο $\text{ΚΛ}_{\Gamma_1^{\theta\alpha}} =< A_1 \cup P, K_1 >$

αντιστοιχούν σε αποδείξεις της θεωρίας αριθμών. Επειδή δε κάθε πρωτοβάθμια γλώσσα έχει τουλάχιστον ένα κατηγορηματικό ή συναρτησιακό σύμβολο, έχει καθιερωθεί ο όρος «κατηγορηματικός λογισμός» (τα συναρτησιακά σύμβολα μπορούν να θεωρηθούν ως κατηγορηματικά σύμβολα – σύγκρινε με τη συνολοθεωρητική ματιά: μια συνάρτηση είναι ειδική περίπτωση σχέσης, δηλαδή κατηγορήματος).

γ) Όπως και στον προτασιακό λογισμό, όταν αναφερόμαστε σε τυχόντα τύπο φ, στον οποίο υπάρχουν εμφανίσεις συνδέσμων εκτός από τους $\neg, \to$ ή/και του ποσοδείκτη $\forall$, θα εννοείται ότι αναφερόμαστε στον αντίστοιχο τύπο φ^*, ο οποίος 1) περιέχει μόνο τα σύμβολα $\neg, \to, \forall$ και 2) είναι λογικά ισοδύναμος με το φ (συζήτηση πριν από το Παράδειγμα 3.15). □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.8

Βρείτε ποιοι από τους ακόλουθους τύπους είναι λογικά αξιώματα και γιατί. (P είναι μονομελές και Q διμελές κατηγορηματικό σύμβολο, f είναι διθέσιο και g είναι μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο.)

Τύπος	Σωστό	Λάθος
$\forall y[\forall x(P(x) \to P(x)) \to (P(c) \to P(c))]$		
$\forall x \exists y Q(x,y) \to \exists y Q(y,y)$		
$(P(y) \to \forall x P(x)) \to \forall x(P(y) \to \forall x P(x))$		
$P(x) \to \forall x P(x)$		
$x_2 \approx x_0 \to [P(x_2, f(x_5, x_2)) \leftrightarrow P(x_2, f(x_5, x_0))]$		
$x_1 \approx x_2 \to (g(x_2) \approx g(x_3) \leftrightarrow g(x_1) \approx g(x_3))$		

Όπως και στο Κεφάλαιο 2, η επιλογή των αξιωματικών σχημάτων και του αποδεικτικού κανόνα είναι «καλή», δηλαδή α) τα ΑΣ1– ΑΣ8 δίνουν λογικά αληθείς τύπους και β) ο κανόνας MP διατηρεί τη λογική συνεπαγωγή. Λεπτομέρειες για το θέμα αυτό θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

Το ακόλουθο γεγονός θα μας φανεί πολύ χρήσιμο στη συνέχεια.

Πρόταση 3.2. Για κάθε τύπο φ, αν ο φ προκύπτει από μια ταυτολογία ψ με αντικατάσταση όλων των προτασιακών μεταβλητών με τυχόντες τύπους, τότε ο φ είναι τυπικό θεώρημα του $\mathrm{K}\Lambda_{\Gamma_1}$.

Απόδειξη. Έστω ότι ο προτασιακός τύπος ψ είναι ταυτολογία και φ είναι ο τύπος που προκύπτει από τον ψ μέσω αντικατάστασης των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται σ' αυτόν από τύπους. Με βάση το Θεώρημα 2.11, υπάρχει τυπική απόδειξη $\psi_1, \ldots, \psi_n$ του ψ στο σύστημα ΠΛ. Επειδή τα ΑΣ1– ΑΣ3 του αξιωματικού συστήματος $\mathrm{K}\Lambda_{\Gamma_1}$ είναι ουσιαστικά ίδια με τα αντίστοιχα του ΠΛ, η τυπική αυτή απόδειξη μπορεί να μετατραπεί σε τυπική απόδειξη του φ στο $\mathrm{K}\Lambda_{\Gamma_1}$ – απλά, στους $\psi_1, \ldots, \psi_n$ θα κάνουμε την αντικατάσταση προτασιακών μεταβλητών που έχει γίνει στον ψ για να προκύψει ο φ. □

Παρατήρηση. Με βάση την προηγούμενη πρόταση επιτρέπουμε να εμφανίζονται σε τυπικές αποδείξεις στο $\mathrm{K}\Lambda_{\Gamma_1}$ τύποι που προέρχονται, με την παραπάνω έννοια, από ταυτολογίες. □

Ας δούμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα τυπικής απόδειξης στο αξιωματικό σύστημα $\mathrm{K}\Lambda_{\Gamma_1}$. Ο τρόπος παρουσίασης της τυπικής απόδειξης είναι ίδιος με αυτόν που είχαμε στον προτασιακό λογισμό, δηλαδή με αρίθμηση στα αριστερά και αναφορά στα δεξιά της δικαιολογίας με βάση την οποία επιτρέπεται ο συγκεκριμένος τύπος να περιληφθεί στην απόδειξη.

Παράδειγμα 3.18. Θα δείξουμε ότι ο τύπος $P(x) \to \neg\forall y \neg P(y)$ είναι τυπικό θεώρημα του $\mathrm{K}\Lambda_{\Gamma_1}$, για τυχούσες μεταβλητές x, y, όπου P είναι μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο της Γ_1.

1.	$(\forall y \neg P(y) \to \neg P(x)) \to (P(x) \to \neg\forall y \neg P(y))$ (ο τύπος αυτός προέρχεται από την ταυτολογία $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$, αν βάλουμε στη θέση της προτασιακής μεταβλητής p τον $\forall y \neg P(y)$ και στη θέση της προτασιακής μεταβλητής q τον τύπο $P(x)$)	τυπικό θεώρημα
2.	$\forall y \neg P(y) \to \neg P(x)$ (ο τύπος αυτός προέρχεται από το ΑΣ4, αν βάλουμε στη θέση του φ τον τύπο $\neg P(y)$, στη θέση της x την y	$A\Sigma 4$

και στη θέση του t τη μεταβλητή x, οπότε φ_t^x είναι
ο τύπος $(\neg P(y))_x^y$, δηλαδή ο τύπος $\neg P(x)$)

3. $P(x) \to \neg\forall y \neg P(y)$ 1, 2, MP
(ο τύπος αυτός προκύπτει από τους τύπους 1 και 2
με βάση το MP, όπου στη θέση του φ έχουμε τον
τύπο $\forall y \neg P(y) \to \neg P(x)$ και στη θέση του ψ τον
τύπο $P(x) \to \neg\forall y \neg P(y)$) □

Επειδή είναι βολικότερο να έχουμε κατά νου **ένα** αξιωματικό σύστημα και όχι πολλά (ανάλογα με τη γλώσσα), θα ασχοληθούμε στη συνέχεια μόνο με το αξιωματικό σύστημα που έχει μόνο λογικά αξιώματα, το οποίο θα συμβολίζουμε για απλότητα ΚΛ. Αυτή η παραδοχή είναι δυνατή με βάση την εξής παρατήρηση:

Έστω Γ_1 τυχούσα πρωτοβάθμια γλώσσα και T σύνολο τύπων της Γ_1. Συμβολίζουμε με ΚΛ^T το αξιωματικό σύστημα $< A_1 \cup T, K_1 >$, δηλαδή το σύστημα με μη λογικά αξιώματα τα στοιχεία του T, και με ΚΛ το σύστημα $< A_1, K_1 >$. Τότε για κάθε τύπο έχουμε

$$\vdash_{K\Lambda^T} \varphi, \text{ ανν } T \vdash_{K\Lambda} \varphi \ \ (^*).$$

Πράγματι, $\vdash_{K\Lambda^T} \varphi$ σημαίνει ότι υπάρχει τυπική απόδειξη, τα στοιχεία της οποίας είναι αξιώματα, δηλαδή ανήκουν στο σύνολο $A_1 \cup T$, ή συνέπειες προηγούμενων με βάση τον κανόνα MP, ενώ $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$ σημαίνει ότι υπάρχει τυπική απόδειξη, τα στοιχεία της οποίας είναι αξιώματα, δηλαδή ανήκουν στο σύνολο A_1, ή υποθέσεις, δηλαδή ανήκουν στο T, ή συνέπειες προηγούμενων με βάση τον κανόνα MP. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι απλά βλέπουμε τα στοιχεία του T διαφορετικά, δηλαδή ως αξιώματα ή υποθέσεις, χωρίς αυτό να επηρεάζει την ουσία της τυπικής απόδειξης. Η (*) μας λέει ουσιαστικά ότι για τη λογική μελέτη όλων των συστημάτων της μορφής $K\Lambda^T$ αρκεί η μελέτη του συστήματος $K\Lambda$. Παραδείγματος χάρη, αντί να μελετήσουμε το σύστημα $K\Lambda^P =< A_1 \cup P, K_1 >$, αρκεί να μελετήσουμε τις τυπικές συνέπειες του συνόλου υποθέσεων P στα πλαίσια του συστήματος $K\Lambda$.

Παρατηρήσεις.

1) Υπάρχει και άλλος, φιλοσοφικός, λόγος που προτιμάμε να βλέπουμε τα αξιώματα ως υποθέσεις: τα αξιώματα θεωρούνται ως αδιαμφισβήτητες αλήθειες, ενώ

οι υποθέσεις βρίσκονται υπό αίρεση. Η άποψη αυτή φάνηκε ιδιαίτερα ελκυστική μετά την ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων γεωμετριών, οπότε διαπιστώθηκε ότι το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη για τη Γεωμετρία (Αίτημα των Παραλλήλων) ήταν απλά μια υπόθεση, ακριβώς όπως η πρόταση του Lobachevski και η πρόταση του Riemann, που έρχονται σε σύγκρουση με το αξίωμα του Ευκλείδη.

2) Οι παρατηρήσεις που έγιναν μετά τον Ορισμό 2.10 ισχύουν και για το νέο αξιωματικό σύστημα. Έτσι, θα τις χρησιμοποιούμε ελεύθερα στα παρακάτω. □

Επειδή ο ρόλος των συνδέσμων στο νέο πλαίσιο είναι ακριβώς ο ίδιος με εκείνον που είχαν στον προτασιακό λογισμό, τα θεωρήματα που αποδείξαμε εκεί ισχύουν και εδώ. Έτσι, έχουμε διαθέσιμα τα θεωρήματα απαγωγής, αντιθετοαναστροφής και σε άτοπο απαγωγής (δηλαδή, τα Θεωρήματα 2.8, 2.9 και 2.10). Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε και άλλα θεωρήματα που αφορούν στους ποσοδείκτες. Το πρώτο από αυτά αφορά στην εξής μέθοδο απόδειξης που χρησιμοποιούμε ευρέως: Αν θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε x έχει μια ιδιότητα, δείχνουμε ότι ένα τυχόν x έχει αυτή την ιδιότητα, αρκεί να μην κάνουμε κάποια υπόθεση για το x.

Θεώρημα 3.6. (Θεώρημα Γενίκευσης) Έστω $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Αν $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$ και η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κανένα στοιχείο του T, τότε $T \vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi$.

Απόδειξη. Έστω ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κανένα στοιχείο του T και $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$. Τότε υπάρχει μια τυπική απόδειξη $\varphi_1, ..., \varphi_n = \varphi$ στο ΚΛ από το T. Με επαγωγή στο i θα δείξουμε ότι για κάθε $1 \leq i \leq n$ ισχύει $T \vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi_i$.

Πρώτο βήμα: $i = 1$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

1) $\varphi_1 \in A_1$. Τότε $\forall x\varphi_1 \in A_1$, οπότε προφανώς $T \vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi_1$.

2) $\varphi_1 \in T$. Τότε η ακόλουθη τυπική απόδειξη στο ΚΛ δείχνει ότι $T \vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi_1$:

1.	φ_1	Υπόθεση
2.	$\varphi_1 \to \forall x\varphi_1$	$A\Sigma 6$
3.	$\forall x\varphi_1$	1, 2, MP

Δεύτερο βήμα: Έστω ότι $T \vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi_k$ για κάθε k τέτοιο που $k < i \leq n$. Θα δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi_i$. Διακρίνουμε πάλι δύο περιπτώσεις.

1) $\varphi_i \in A_1 \cup T$. Τότε έχουμε το ζητούμενο όπως πριν.

2) Ο φ_i είναι άμεση συνέπεια δύο τύπων φ_j, φ_l, για συγκεκριμένα $j, l < i$, με βάση το MP (οπότε ο φ_l είναι της μορφής $\varphi_j \to \varphi_i$). Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, έχουμε

$$T \vdash_{K\Lambda} \forall x \varphi_j \text{ και } T \vdash_{K\Lambda} \forall x(\varphi_j \to \varphi_i).$$

Κατασκευάζουμε τώρα την ακόλουθη τυπική απόδειξη στο ΚΛ:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & ... \\ .. & ... \\ . & \forall x \varphi_j \end{array}\right\} \text{τυπική απόδειξη του } \forall x \varphi_j \text{ από το } T$$

$$\left.\begin{array}{ll} +1. & ... \\ .. & ... \\ . & \forall x(\varphi_j \to \varphi_i) \end{array}\right\} \text{τυπική απόδειξη του } \forall x(\varphi_j \to \varphi_i) \text{ από το } T$$

μ+1.	$\forall x(\varphi_j \to \varphi_i) \to (\forall x \varphi_j \to \forall x \varphi_i)$	$A\Sigma 5$
μ+2.	$\forall x \varphi_j \to \forall x \varphi_i$	μ, μ+1, MP
μ+3.	$\forall x \varphi_i$	λ, μ+2, MP

Συνεπώς $T \vdash_{K\Lambda} \forall x \varphi_i$, οπότε η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης. Άρα $T \vdash_{K\Lambda} \forall x \varphi_n$, δηλαδή $T \vdash_{K\Lambda} \forall x \varphi$. □

Παρατήρηση. Ο περιορισμός που θέσαμε στη x στο προηγούμενο θεώρημα είναι απαραίτητος, όπως φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω ότι T είναι το σύνολο $\{P(x)\}$ και φ είναι ο τύπος $P(x)$, όπου P είναι μονομελές κατηγορηματικό σύμβολο της Γ_1. Τότε προφανώς ισχύει $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$, όμως δεν είναι αλήθεια ότι $T \vdash_{K\Lambda} \forall x \varphi$. Πράγματι, αν αλήθευε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \forall x \varphi$, τότε θα έπρεπε να ισχύει $T \models \forall x \varphi$ (με βάση το Θεώρημα Εγκυρότητας – δες την επόμενη ενότητα). Δηλαδή θα είχαμε ότι $P(x) \models \forall x P(x)$, πράγμα που αντιφάσκει με το Παράδειγμα 3.9.

Θα μπορούσαμε να δώσουμε και το εξής παράδειγμα, χωρίς χρήση της τυπικής γλώσσας: Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός έχει μια ιδιότητα. Θεωρούμε έναν τυχόντα φυσικό αριθμό x και επιχειρηματολογούμε για να δείξουμε ότι έχει την ιδιότητα αυτή. Πρέπει όμως να προσέξουμε, ώστε να μη χρησιμοποιήσουμε κάποια υπόθεση για το x, παραδείγματος χάρη ότι ο x είναι άρτιος. □

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα όπου χρησιμοποιούμε τα Θεωρήματα Γενίκευσης και Απαγωγής για να δείξουμε ότι ένας τύπος είναι τυπικό θεώρημα του ΚΛ.

Παράδειγμα 3.19. Θα δείξουμε ότι για κάθε τύπο φ και μεταβλητές x, y

$$\vdash_{K\Lambda} \forall x \forall y \varphi \to \forall y \forall x \varphi.$$

Λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x \forall y \varphi \vdash_{K\Lambda} \forall y \forall x \varphi.$$

Λόγω του Θεωρήματος Γενίκευσης, αφού η y είναι δεσμευμένη στον τύπο $\forall x \forall y \varphi$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x \forall y \varphi \vdash_{K\Lambda} \forall x \varphi.$$

Επειδή η x είναι δεσμευμένη στον τύπο $\forall x \forall y \varphi$, με βάση πάλι το Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x \forall y \varphi \vdash_{K\Lambda} \varphi.$$

Αυτό όμως προκύπτει από την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\forall x \forall y \varphi$	υπόθεση
2.	$\forall x \forall y \varphi \to \forall y \varphi$ (ο τύπος αυτός προκύπτει αν βάλουμε τον τύπο $\forall y \varphi$ στη θέση του φ και τον όρο x στη θέση της x, οπότε ο τύπος $(\forall y \varphi)^x_t$ είναι ο $(\forall y \varphi)^x_x$, δηλαδή ο $\forall y \varphi$ – όπως παρατηρήσαμε μετά τον Ορισμό 3.13, η x είναι αντικαταστάσιμη από τη x σε κάθε τύπο)	$A\Sigma 4$
3.	$\forall y \varphi$	1, 2, MP
4.	$\forall y \varphi \to \varphi$ (πράγματι, ο τύπος αυτός προκύπτει αν στη θέση της μεταβλητής x πάρουμε τη μεταβλητή y και στη θέση του όρου t πάρουμε τη μεταβλητή y, οπότε ο τύπος φ^x_t είναι ο τύπος φ^y_y, δηλαδή ο φ)	ΑΣ4
5.	φ	3, 4, MP $\square$

Συνεχίζουμε με άλλο παράδειγμα, για το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3.2.

Παράδειγμα 3.20. Θα δείξουμε ότι για τυχόντες τύπους φ, ψ και οποιαδήποτε μεταβλητή x είναι

$$\vdash_{K\Lambda} \forall x(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\varphi \wedge \forall x\psi.$$

Λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi \wedge \forall x\psi. \tag{3.18}$$

Όμως ισχύει

$$\vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi \to (\forall x\psi \to \forall x\varphi \wedge \forall x\psi), \tag{3.19}$$

αφού ο τύπος αυτός προέρχεται από την ταυτολογία $p \to (q \to p \wedge q)$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi \tag{3.20}$$

$$\text{και } \forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash_{K\Lambda} \forall x\psi. \tag{3.21}$$

(Πράγματι, αν αληθεύουν οι (3.19), (3.20) και (3.21), τότε με «συγκόλληση» τυπικών αποδείξεων και εφαρμογή του κανόνα MP, προκύπτει η (3.18).)

Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα γενίκευσης, αντί για την (3.20) αρκεί να δείξουμε την $\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash_{K\Lambda} \varphi$, για την οποία κατασκευάζουμε την εξής τυπική απόδειξη:

1.	$\forall x(\varphi \wedge \psi)$	υπόθεση
2.	$\forall x(\varphi \wedge \psi) \to \varphi \wedge \psi$	ΑΣ4
	(ο τύπος αυτός προκύπτει από το αξ/κό σχήμα ΑΣ4 αν βάλουμε τον τύπο $\varphi \wedge \psi$ στη θέση του φ και τη μεταβλητή x στη θέση του όρου t)	
3.	$\varphi \wedge \psi$	1, 2, MP
4.	$\varphi \wedge \psi \to \varphi$	τυπικό θεώρημα
	(προκύπτει από την ταυτολογία $p \wedge q \to p$)	
5.	φ	3, 4, MP

Εντελώς όμοια αποδεικνύεται και η (3.21), οπότε ισχύει το ζητούμενο. □

Γενικά, όταν θέλουμε να δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$, ακολουθούμε την εξής τακτική:

1. Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$, τότε αρκεί, σύμφωνα με το Θεώρημα Απαγωγής, να δείξουμε ότι $T \cup \{\psi\} \vdash_{K\Lambda} \chi$.

2. Αν ο φ είναι της μορφής $\forall x\psi$, όπου η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κανένα στοιχείο του T, τότε αρκεί, σύμφωνα με το Θεώρημα Γενίκευσης, να δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \psi$.

3. Αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$, τότε διακρίνουμε υποπεριπτώσεις:

   α) Αν ο ψ είναι της μορφής $\psi_1 \to \psi_2$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \psi_1$ και $T \vdash_{K\Lambda} \neg\psi_2$. Πράγματι, έχοντας αυτά ως δεδομένα, χρησιμοποιώντας το τυπικό θεώρημα $\psi_1 \to (\neg\psi_2 \to \neg(\psi_1 \to \psi_2))$, μπορούμε να δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$.

   β) Αν ο ψ είναι της μορφής $\neg\chi$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \chi$, αφού ο $\chi \to \neg\neg\chi$ είναι τυπικό θεώρημα.

   γ) Αν ο ψ είναι της μορφής $\forall x\chi$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \neg\chi^x_t$ για κάποιον όρο t για τον οποίο η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον χ. Πράγματι, έχοντας δείξει ότι $T \vdash_{K\Lambda} \neg\chi^x_t$, χρησιμοποιώντας το αξίωμα $\forall x\chi \to \chi^x_t$ και το τυπικό θεώρημα $(\forall x\chi \to \chi^x_t) \to (\neg\chi^x_t \to \neg\forall x\chi)$, μπορούμε να δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$.

Δραστηριότητα 3.9

Δείξτε ότι για τυχόντες τύπους φ, ψ και οποιαδήποτε μεταβλητή x ισχύει

$$\vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi \vee \forall x\psi \to \forall x(\varphi \vee \psi).$$

(**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε τα Θεωρήματα Απαγωγής και Γενίκευσης.)

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας ότι ο πρώτος νόμος μετακίνησης ποσοδείκτη είναι τυπικό θεώρημα του ΚΛ, δηλαδή θα δείξουμε ότι αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, τότε

$$\vdash_{K\Lambda} (\varphi \to \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi).$$

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι για οποιουσδήποτε τύπους χ_1, χ_2, για να δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \chi_1 \leftrightarrow \chi_2$, αρκεί να δείξουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \chi_1 \to \chi_2$ (*) και $T \vdash_{K\Lambda}$

$\chi_2 \to \chi_1$ (**). Πράγματι, ο τύπος

$$(\chi_1 \to \chi_2) \to ((\chi_2 \to \chi_1) \to (\chi_1 \leftrightarrow \chi_2))$$

είναι τυπικό θεώρημα του ΚΛ, αφού προέρχεται από ταυτολογία. Αν λοιπόν έχουμε ότι οι (*), (**) ισχύουν, τότε με συγκόλληση τυπικών αποδείξεων κατασκευάζουμε μια τυπική απόδειξη του $\chi_1 \leftrightarrow \chi_2$ από το .

Εδώ λοιπόν αρκεί να δείξουμε ότι οι τύποι $(\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$ και $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$ είναι τυπικά θεωρήματα του ΚΛ.

Παράδειγμα 3.21. Θα δείξουμε ότι, αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, τότε

$$\vdash_{K\Lambda} (\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi). \tag{3.22}$$

Αρκεί, λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής, να δείξουμε ότι

$$\varphi \to \forall x\psi \vdash_{K\Lambda} \forall x(\varphi \to \psi).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η x είναι δεσμευμένη στον τύπο $\varphi \to \forall x\psi$, αφού είναι δεσμευμένη στο φ (αρχική υπόθεση) και προφανώς είναι δεσμευμένη στο $\forall x\psi$. Άρα, λόγω του Θεωρήματος Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\varphi \to \forall x\psi \vdash_{K\Lambda} \varphi \to \psi.$$

Πάλι με βάση το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\varphi \to \forall x\psi, \varphi\} \vdash_{K\Lambda} \psi.$$

Αυτό όμως δείχνει η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\varphi \to \forall x\psi$	υπόθεση
2.	φ	υπόθεση
3.	$\forall x\psi$	1, 2, MP
4.	$\forall x\psi \to \psi$ (ο τύπος αυτός προκύπτει αν στη θέση του φ πάρουμε τον ψ και στη θέση του t πάρουμε τη x, οπότε ο τύπος φ^x_t είναι ο ψ^x_x, δηλαδή ο ψ)	$A\Sigma 4$
5.	ψ	3, 4, MP

Συνεπώς ισχύει η (3.22). □

Παράδειγμα 3.22. Θα δείξουμε ότι, αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, τότε

$$\vdash_{K\Lambda} \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi). \tag{3.23}$$

Πάλι λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής (δύο φορές), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \varphi\} \vdash_{K\Lambda} \forall x\psi.$$

Όμως η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε καμιά υπόθεση, αφού στη $\forall x(\varphi \to \psi)$ είναι προφανώς δεσμευμένη και στη φ είναι δεσμευμένη λόγω αρχικής υπόθεσης. Άρα, λόγω του Θεωρήματος Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \varphi\} \vdash_{K\Lambda} \psi,$$

πράγμα που δείχνει η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\forall x(\varphi \to \psi)$	υπόθεση
2.	φ	υπόθεση
3.	$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$ (ο τύπος αυτός προκύπτει αν στη θέση του φ πάρουμε τον $(\varphi \to \psi)$ και στη θέση του t πάρουμε τη x, οπότε ο φ_t^x είναι ο $(\varphi \to \psi)_x^x$, δηλαδή ο $(\varphi \to \psi)$)	$A\Sigma 4$
4.	$\varphi \to \psi$	1, 3, MP
5.	ψ	2, 4, MP

Άρα ισχύει η (3.23). □

Τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ7 και ΑΣ8, σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα σχήματα, εξασφαλίζουν ότι και οι υπόλοιπες βασικές ιδιότητες της ισότητας είναι τυπικά θεωρήματα του ΚΛ. Θα δείξουμε ότι αποδεικνύεται τυπικά η συμμετρικότητα και η δυνατότητα αντικατάστασης μεταβλητής από άλλη «ισοδύναμη» σε όρο της Γ_1. Αρχίζουμε με τη συμμετρική ιδιότητα για την ισότητα.

Παράδειγμα 3.23. Θα δείξουμε ότι $\vdash_{K\Lambda} \forall x \forall y(x \approx y \to y \approx x)$.
Λόγω του Θεωρήματος Γενίκευσης και του Θεωρήματος Απαγωγής, αρκεί να

δείξουμε ότι $x \approx y \vdash_{K\Lambda} y \approx x$.
Αυτό όμως το δείχνει η ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$x \approx y$	υπόθεση
2.	$x \approx y \to (x \approx x \to y \approx x)$	$A\Sigma 8$
	(ο τύπος αυτός προκύπτει από το σχήμα ΑΣ8 αν βάλουμε τον τύπο $x \approx x$ στη θέση του φ και τον τύπο $y \approx x$ στη θέση του φ^*)	
3.	$x \approx x \to y \approx x$	1, 3, MP
4.	$x \approx x$	$A\Sigma 7$
5.	$y \approx x$	3, 4, MP □

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι η τιμή ενός όρου της μορφής $f(y, z)$ δεν αλλάζει, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές του με «ισοδύναμές» τους.

Παράδειγμα 3.24. Θα δείξουμε ότι για κάθε διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο f έχουμε

$$\vdash_{K\Lambda} \forall y \forall z \forall u \forall w [y \approx u \to (z \approx w \to f(y, z) \approx f(u, w))].$$

Με βάση τα Θεωρήματα Γενίκευσης και Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{y \approx u, z \approx w\} \vdash_{K\Lambda} f(y, z) \approx f(u, w).$$

Κατασκευάζουμε λοιπόν την εξής τυπική απόδειξη:

1.	$y \approx u$	υπόθεση
2.	$z \approx w$	υπόθεση
3.	$y \approx u \to (f(y, z) \approx f(y, z) \to f(y, z) \approx f(u, z))$	$A\Sigma 8$
	(ο τύπος αυτός προκύπτει αν στο σχήμα ΑΣ8 βάλουμε τον τύπο $f(y, z) \approx f(y, z)$ στη θέση του φ και τον τύπο $f(y, z) \approx f(u, z)$ στη θέση του φ^*)	
4.	$f(y, z) \approx f(y, z) \to f(y, z) \approx f(u, z)$	1, 3, MP
5.	$\forall x_1\ x_1 \approx x_1$	$A\Sigma 7$
6.	$\forall x_1 x_1 \approx x_1 \to f(y, z) \approx f(y, z)$	$A\Sigma 4$
	(ο τύπος αυτός προκύπτει αν στο ΑΣ4 βάλουμε x_1 αντί για x, τον $x_1 \approx x_1$ στη θέση του φ και $f(y, z)$	

	στη θέση του t, οπότε φ^x_t είναι ο $f(y,z) \approx f(y,z)$)	
7.	$f(y,z) \approx f(y,z)$	5, 6, MP
8.	$f(y,z) \approx f(u,z)$	4, 7, MP
9.	$z \approx w \to (f(y,z) \approx f(u,z) \to f(y,z) \approx f(u,w))$	$A\Sigma 8$
	(ο τύπος αυτός προκύπτει αν βάλουμε z στη θέση της x, w στη θέση της y, τον $f(y,z) \approx f(u,z)$ στη θέση του φ και $f(y,z) \approx f(u,w)$ στη θέση του φ^*)	
10.	$f(y,z) \approx f(u,z) \to f(y,z) \approx f(u,w)$	2, 9, MP
11.	$f(y,z) \approx f(u,w)$	8, 10, MP

□

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η μεταβατικότητα του $\approx$ και η δυνατότητα αντικατάστασης μεταβλητής από άλλη «ισοδύναμη» σε ατομικό τύπο που περιέχει διμελές κατηγορηματικό σύμβολο (δες την Άσκηση 3.16). Στην πραγματικότητα, το ΑΣ8 μας εξασφαλίζει τη δυνατότητα αντικατάστασης μεταβλητής από «ισοδύναμή» της σε οποιονδήποτε τύπο φ.

Δραστηριότητα 3.4

Δείξτε ότι για οποιονδήποτε τύπο φ, αν η x είναι αντικαταστάσιμη από την y στο φ, τότε $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to (\varphi \leftrightarrow \varphi^*)$, όπου φ^* είναι τύπος που παίρνουμε από το φ αντικαθιστώντας τη x με την y σε μερικές ή όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της.
(**Υπόδειξη.** Δείξτε πρώτα ότι για κάθε όρο t ισχύει $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to t \approx t^*$, όπου t^* είναι όρος που παίρνουμε από τον t αντικαθιστώντας τη x με την y, σε όλες ή μερικές από τις εμφανίσεις της στον t.)

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, ένα σύμβολο σταθερής μπορεί να παίξει τον ίδιο ρόλο με μια μεταβλητή. Ας δούμε μια τέτοια περίπτωση.

Παράδειγμα 3.25. Θα δείξουμε ότι για τυχόντα μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P, Q και τυχόν σύμβολο σταθερής c ισχύει

$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall z P(z)\} \vdash_{K\Lambda} Q(c).$$

Πράγματι, αυτό φαίνεται από την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	υπόθεση
2.	$\forall z P(z)$	υπόθεση
3.	$\forall z P(z) \to P(c)$	$A\Sigma 4$
	(κάθε μεταβλητή είναι αντικαταστάσιμη σε κάθε τύπο από οποιοδήποτε σύμβολο σταθερής)	
4.	$P(c)$	2, 3, MP
5.	$\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (P(c) \to Q(c))$	$A\Sigma 4$
6.	$P(c) \to Q(c)$	1, 5, MP
7.	$Q(c)$	4, 6, MP

□

Αν στην παραπάνω τυπική απόδειξη αντικαταστήσουμε το c παντού με τη μεταβλητή y, τότε προκύπτει μια τυπική απόδειξη που δείχνει ότι

$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall z P(z)\} \vdash_{K\Lambda} Q(y).$$

Επιπλέον, επειδή η y δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε καμιά υπόθεση, το Θεώρημα Γενίκευσης δίνει ότι

$$\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall z P(z)\} \vdash_{K\Lambda} \forall y Q(y).$$

Το φαινόμενο που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα είναι γενικό και περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.7. (Θεώρημα Γενίκευσης Σταθερής) Έστω ότι $T \subseteq T(\Gamma_1)$. Αν $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$ και το σύμβολο σταθερής c δεν εμφανίζεται σε κανένα στοιχείο του T, τότε υπάρχει μεταβλητή y, που δεν εμφανίζεται στο φ, τέτοια ώστε $T \vdash_{K\Lambda} \forall y \varphi^c_y$. ($\varphi^c_y$ είναι ο τύπος που παίρνουμε από τον φ αντικαθιστώντας τη c παντού με y).

Απόδειξη. Δίνουμε μόνο τη βασική ιδέα, αφήνοντας τις λεπτομέρειες ως άσκηση (δες Άσκηση 3.17). Έστω λοιπόν τυπική απόδειξη $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ του φ από το T. Θεωρούμε μεταβλητή y που δεν εμφανίζεται σε κάποιον από τους $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία $(\varphi_1)^c_y, \ldots, (\varphi_n)^c_y$ αποτελεί τυπική απόδειξη του φ^c_y από το T. Έτσι προκύπτει ότι $T' \vdash_{K\Lambda} \varphi^c_y$, όπου T' είναι το πεπερασμένο σύνολο στοιχείων του που εμφανίζονται στην ακολουθία

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Με βάση το Θεώρημα Γενίκευσης, έχουμε ότι $T' \vdash_{K\Lambda} \forall y \varphi^c_y$, από το οποίο έπεται το ζητούμενο. $\square$

Μερικές φορές θέλουμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα για συγκεκριμένη μεταβλητή που έχει προεπιλεγεί. Ως πόρισμα του Θεωρήματος 3.7 έχουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 3.3. Έστω ότι $T \vdash_{K\Lambda} \varphi^y_c$, όπου το σύμβολο σταθερής c δεν εμφανίζεται σε στοιχείο του $T \cup \{\varphi\}$. Τότε $T \vdash_{K\Lambda} \forall y \varphi$ και υπάρχει τυπική απόδειξη του γεγονότος αυτού, στην οποία δεν εμφανίζεται καθόλου το c.

Απόδειξη. Έστω ότι $T \vdash_{K\Lambda} \varphi^y_c$. Τότε, με βάση το Θεώρημα 3.7, για κατάλληλη μεταβλητή z ισχύει $T \vdash_{K\Lambda} \forall z (\varphi^y_c)^c_z$ και υπάρχει τυπική απόδειξη που το δείχνει, στην οποία δεν εμφανίζεται το c. Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι το c δεν εμφανίζεται στο φ, ο τύπος $(\varphi^y_c)^c_z$ είναι ίδιος με τον τύπο φ^y_z (δες Άσκηση 3.19). Έχουμε λοιπόν ότι

$$T \vdash_{K\Lambda} \forall z \varphi^y_z. \tag{3.24}$$

Όμως ο τύπος $\forall z \varphi^y_z \rightarrow (\varphi^y_z)^z_y$ είναι αξίωμα με βάση το ΑΣ4 (η z είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο y στον τύπο φ^y_z, αφού η z δεν εμφανίζεται στο φ) και ο τύπος $(\varphi^y_z)^z_y$ είναι ο ίδιος με το φ. Άρα $\forall z \varphi^y_z \vdash_{K\Lambda} \varphi$ και συνεπώς, επειδή η y δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $\forall z \varphi^y_z$, έπεται, με βάση το Θεώρημα Γενίκευσης, ότι

$$\forall z \varphi^y_z \vdash_{K\Lambda} \forall y \varphi. \tag{3.25}$$

Το ζητούμενο έπεται από τις (3.24) και (3.25). $\square$

Μια άλλη συνέπεια του Θεωρήματος 3.7 είναι η δυνατότητα για «υπαρξιακή στιγμιογράφηση», δηλαδή για εφαρμογή της εξής πολύ χρήσιμης μεθόδου: Αν θέλουμε να αποδείξουμε κάτι έχοντας ως υπόθεση ότι υπάρχει x με κάποια ιδιότητα I, αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο υποθέτοντας ότι το αντικείμενο c έχει την ιδιότητα I, όπου c συγκεκριμένο (σταθερό) αντικείμενο που δεν αναφέρεται στο συμπέρασμα και για το οποίο δεν έχουμε κάνει κάποια άλλη υπόθεση.

Πόρισμα 3.1. Αν $T \cup \{\varphi^y_c\} \vdash_{K\Lambda} \psi$, όπου το σύμβολο σταθερής c δεν εμφανίζεται σε στοιχείο του συνόλου $T \cup \{\varphi, \psi\}$, τότε $T \cup \{\exists y \varphi\} \vdash_{K\Lambda} \psi$.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.10

Συμπληρώστε το όνομα του θεωρήματος (ή τα ονόματα των θεωρημάτων), που είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε καθένα από τα παρακάτω.

Σκοπός	**Θεωρήματα**
$\vdash_{K\Lambda} \exists x(\varphi \lor \psi) \to \exists x\varphi \lor \exists x\psi$	
$Q(x) \to \forall y R(y,y) \vdash_{K\Lambda} \forall y(Q(x) \to R(y,y))$	
$\exists x \forall y P(x,y) \vdash_{K\Lambda} \forall y \exists x P(x,y)$	

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα εφαρμογής του Πορίσματος 3.1.

Παράδειγμα 3.26. Θα δείξουμε ότι για κάθε τύπο φ ισχύει

$$\vdash_{K\Lambda} \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi.$$

Λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\exists x \forall y \varphi \vdash_{K\Lambda} \forall y \exists x \varphi.$$

Με βάση τώρα το Πόρισμα 3.1, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall y \varphi^x_c \vdash_{K\Lambda} \forall y \exists x \varphi$, όπου c σύμβολο σταθερής που δεν εμφανίζεται στο φ.
Τέλος, λόγω του Θεωρήματος Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall y \varphi^x_c \vdash_{K\Lambda} \exists x \varphi, \text{ δηλαδή ότι } \forall y \varphi^x_c \vdash_{K\Lambda} \neg \forall x \neg \varphi.$$

Αυτό όμως ισχύει, όπως φαίνεται από την ακόλουθη τυπική απόδειξη:

1.	$\forall y \varphi^x_c$	υπόθεση
2.	$\forall y \varphi^x_c \to \varphi^x_c$	$A\Sigma 4$
3.	φ^x_c	1, 2, MP
4.	$\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi^x_c$	$A\Sigma 4$
5.	$(\forall x \neg \varphi \to \neg \varphi^x_c) \to (\varphi^x_c \to \neg \forall x \neg \varphi)$	Πρόταση 3.2
6.	$\varphi^x_c \to \neg \forall x \neg \varphi$	4, 5, MP
7.	$\neg \forall x \neg \varphi$	3, 6, MP

□

Τι μπορούμε να κάνουμε όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το ΑΣ4 για συγκεκριμένη μεταβλητή x και συγκεκριμένο όρο t, ενώ η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον τύπο φ; Αυτό που γίνεται είναι να εφαρμόσουμε το συντακτικό ανάλογο του Θεωρήματος 3.5.

Θεώρημα 3.8. Για κάθε τύπο φ, μεταβλητή x και όρο t υπάρχει τύπος $\hat{\varphi}$ για τον οποίο
α) $\vdash_{K\Lambda} \varphi \leftrightarrow \hat{\varphi}$ και
β) η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στο $\hat{\varphi}$. □

Η ιδέα της απόδειξης είναι ουσιαστικά η ίδια με εκείνη του Θεωρήματος 3.5, δηλαδή να αντικαταστήσουμε τις ανεπιθύμητες δεσμευμένες μεταβλητές του φ (εδώ αυτές που εμφανίζονται στον όρο t) με άλλες που δε δημιουργούν πρόβλημα – δες την Άσκηση 3.23.

Αρκετά όμως ασχοληθήκαμε με το αξιωματικό σύστημα ΚΛ. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η συντακτική και η σημασιολογική προσέγγιση μιας απόδειξης με χρήση πρωτοβάθμιας γλώσσας είναι ισοδύναμες.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή ορίσαμε διάφορα αξιωματικά συστήματα για το λογισμό με τύπους πρωτοβάθμιων γλωσσών, η μελέτη των οποίων ανάγεται ουσιαστικά στη μελέτη εκείνου που έχει μόνο λογικά αξιώματα. Επίσης αποδείξαμε θεωρήματα που διευκολύνουν την κατασκευή αποδείξεων στο σύστημα αυτό και δώσαμε παραδείγματα τέτοιων αποδείξεων.

3.5 Εγκυρότητα και Πληρότητα

Στόχος

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ότι το αξιωματικό σύστημα ΚΛ είναι εξίσου καλό με το ΠΛ, δηλαδή έχει ως τυπικές συνέπειες ακριβώς τους λογικά αληθείς τύπους. Επίσης θα αναφερθούμε σε πορίσματα του γεγονότος αυτού, όπως είναι το Θεώρημα Συμπάγειας.

Προσδοκώμενα Αποτελέσματα

Όταν θα έχετε μελετήσει την ενότητα αυτή, θα μπορείτε να:

- *ελέγχετε αν ένας τύπος είναι τυπικό θεώρημα του ΚΛ,*
- *αναφέρετε τις βασικές ιδέες για την απόδειξη της πληρότητας του προτασιακού και του κατηγορηματικού λογισμού,*
- *χρησιμοποιείτε το θεώρημα συμπάγειας για να δείξετε ότι ένα άπειρο σύνολο τύπων είναι ικανοποιήσιμο.*

Έννοιες-κλειδιά

- *εγκυρότητα κατηγορηματικού λογισμού,*
- *σταθερές Henkin,*
- *πληρότητα κατηγορηματικού λογισμού.*

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Όπως και στο Κεφάλαιο 2, η επιλογή των λογικών αξιωμάτων είναι βέλτιστη, με την έννοια ότι οι τύποι που αποδεικνύονται τυπικά από τυχόν σύνολο υποθέσεων είναι ακριβώς αυτοί που το συνεπάγεται λογικά. Με άλλα λόγια, το σύστημα ΚΛ είναι «έγκυρο» και «πλήρες». Η βασική ιδέα για την απόδειξη του Θεωρήματος Εγκυρότητας είναι η ίδια με εκείνη της αντίστοιχης απόδειξης για το ΠΛ, απαιτεί *όμως πολύ περισσότερη δουλειά. Η απόδειξη του αντίστροφου, δηλαδή του Θεωρήματος Πληρότητας, είναι πολύ δυσκολότερη από οποιαδήποτε απόδειξη που προηγήθηκε. Επειδή όμως το αποτέλεσμα αυτό είναι ένα από τα θεμελιωδέστερα θεωρήματα της Μαθηματικής Λογικής, θα αναφερθούμε εκτενώς στις βασικές ιδέες απόδειξής του, αφήνοντας κάποιες λεπτομέρειες ως ασκήσεις.*

Αρχίζουμε με το αντίστοιχο του Θεωρήματος 2.14.

Θεώρημα 3.9. (Θεώρημα Εγκυρότητας Κατηγορηματικού Λογισμού) Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και κάθε $\varphi \in T(\Gamma_1)$ ισχύει

$$\text{αν } T \vdash_{K\Lambda} \varphi, \text{ τότε } T \models \varphi.$$

Απόδειξη. Υποθέτοντας ότι τα λογικά αξιώματα είναι έγκυροι τύποι και ότι ο κανόνας MP διατηρεί τη λογική συνεπαγωγή, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.14 προκύπτει ότι, αν $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$, τότε $T \models \varphi$.

Μένει λοιπόν να ελέγξουμε ότι α) τα ΑΣ1– ΑΣ8 οδηγούν σε λογικά αληθείς τύπους και β) ο MP διατηρεί τη λογική συνεπαγωγή.

Το β) αποδεικνύεται όπως και το αντίστοιχο γεγονός στην προτασιακή λογική.

Σε σχέση με το α) τώρα, σημειώνουμε κατ' αρχήν ότι για κάθε τύπο φ και κάθε γενίκευσή του ψ έχουμε $\models \varphi$ ανν $\models \psi$. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι η εγκυρότητα ενός τύπου είναι ανεξάρτητη από την ύπαρξη ή όχι καθολικών ποσοδεικτών στην αρχή του τύπου, δηλαδή από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.3. Για κάθε τύπο φ και μεταβλητή x, ο φ είναι έγκυρος, ανν ο $\forall x\varphi$ είναι έγκυρος.

Απόδειξη. Με βάση τον ορισμό της εγκυρότητας (βλέπε Ορισμό 3.9), έχουμε ότι ο φ είναι έγκυρος, ανν

(1) για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και για κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi[v]$.

Όμοια, ο $\forall x\varphi$ είναι έγκυρος, ανν:

(2) για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και για κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\mathcal{A} \models \forall x\varphi[v]$, δηλαδή ανν

(3) για κάθε δομή $\mathcal{A}$, κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ και κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$.

Όμως, για τυχούσα δομή $\mathcal{A}$, το να θεωρήσουμε όλες τις αποτιμήσεις της μορφής $v(x|a)$, όπου a τυχόν στοιχείο του σύμπαντος, ισοδυναμεί με το να θεωρήσουμε όλες τις αποτιμήσεις v στην $\mathcal{A}$. Άρα οι (1) και (3) είναι ισοδύναμες, οπότε ισχύει το ζητούμενο. □

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.9. Λόγω του Λήμματος 3.3, για να ελέγξουμε το α), αρκεί να ελέγξουμε ότι οι τύποι που έχουν τις μορφές των ΑΣ1– ΑΣ8 είναι έγκυροι.

Για τα ΑΣ1– ΑΣ3 δε χρειάζεται να κάνουμε τίποτε, αφού αυτά προέρχονται ουσιαστικά από τον προτασιακό λογισμό. Θα δείξουμε ότι το αξιωματικό σχήμα ΑΣ5 δίνει λογικά αληθείς τύπους.

Παράδειγμα 3.27. Θα δείξουμε ότι για οποιουσδήποτε τύπους φ, ψ και οποιαδήποτε μεταβλητή x ισχύει

$$\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi). \tag{3.26}$$

Με βάση την Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.5, η (3.26) ισοδυναμεί με

$$\{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} \models \forall x\psi. \tag{3.27}$$

Έστω τώρα $\mathcal{A}$ τυχούσα δομή και v τυχούσα αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{A} \models \forall x(\varphi \to \psi)[v]$ και $\mathcal{A} \models \forall x\varphi[v]$. Τότε ισχύουν οι

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \varphi \to \psi[v(x|a)] \tag{3.28}$$

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]. \tag{3.29}$$

Η (3.28) ισοδυναμεί με

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}|, \text{αν } \mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)], \text{τότε } \mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]. \tag{3.30}$$

Από τις (3.29) και (3.30) έπεται ότι για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ είναι $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$, δηλαδή ότι $\mathcal{A} \models \forall x\psi[v]$. Ισχύει λοιπόν η (3.27). □

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι από το ΑΣ6 προκύπτουν λογικά αληθείς τύποι.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.11

Δείξτε ότι για κάθε τύπο φ και μεταβλητή x, αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, τότε $\models \varphi \to \forall x \varphi$.

Είναι επίσης προφανές ότι $\models x \approx x$ για κάθε μεταβλητή x (αφού το σύμβολο $\approx$ ερμηνεύεται πάντα ως ταυτότητα). Άρα μένει να ελέγξουμε μόνο ότι τα ΑΣ4 και ΑΣ8 οδηγούν σε έγκυρους τύπους.

Θα ασχοληθούμε πρώτα με το ΑΣ4. Θα χρειαστούμε ένα λήμμα, το οποίο αφορά στον προσδιορισμό της τιμής αλήθειας του τύπου φ^x_t για μια αποτίμηση v, πράγμα που προϋποθέτει τον υπολογισμό της τιμής που δίνει η v σε όρους της μορφής s^x_t.

Λήμμα 3.4. Έστω $\mathcal{A}$ δομή για τη Γ_1 και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$.

1) Για τυχόντες όρους t, s της Γ_1 και οποιαδήποτε μεταβλητή x έχουμε

$$\overline{v}(s^x_t) = \overline{v(x|\overline{v}(t))}(s),$$

όπου $\overline{v}$ είναι η επέκταση της v στο σύνολο των όρων (Θεώρημα 3.2) και με s^x_t συμβολίζεται ο όρος που προκύπτει από τον s, αν αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις της x με την t.

2) Για κάθε τύπο φ, μεταβλητή x και όρο t, αν η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στο φ, τότε

$$\mathcal{A} \models \varphi^x_t[v], \text{ ανν } \mathcal{A} \models \varphi[v(x|\overline{v}(t))].$$

(Δηλαδή ο υπολογισμός της τιμής ενός όρου s, στον οποίο έγινε αντικατάσταση μιας μεταβλητής x από έναν όρο t, ισοδυναμεί με τον υπολογισμό της τιμής του αρχικού όρου s για την τροποποίηση της v που αντιστοιχεί στη μεταβλητή x την τιμή $\overline{v}(t)$ – όμοια για τον προσδιορισμό της τιμής αλήθειας του τύπου φ^x_t για τη v.)

Στην απόδειξη του Λήμματος 3.4 αφορά η ακόλουθη δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 3.5

Αποδείξτε το Λήμμα 3.4.

Επιστρέφοντας στο ΑΣ4, θεωρούμε οποιοδήποτε τύπο φ, οποιαδήποτε μεταβλη τή x και οποιονδήποτε όρο t τέτοια ώστε η x να είναι αντικαταστάσιμη από τον t στο φ. Θα δείξουμε ότι $\models \forall x\varphi \to \varphi_t^x$. Έστω λοιπόν τυχούσα δομή $\mathcal{A}$ και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ για την οποία $\mathcal{A} \models \forall x\varphi[v]$. Τότε για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$. Άρα, παίρνοντας $a = \overline{v}(t)$, έχουμε ότι $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|\overline{v}(t))]$ ή, σύμφωνα με το 2) του Λήμματος 3.4, ότι $\mathcal{A} \models \varphi_t^x[v]$, δηλαδή το ζητούμενο.

Ο έλεγχος ότι το ΑΣ8 οδηγεί σε έγκυρους τύπους γίνεται σε δύο βήματα. Δείχνουμε δηλαδή ότι η αντικατάσταση μεταβλητής με ισοδύναμη α) αφήνει αναλλοίωτη την τιμή ενός όρου και β) αφήνει αναλλοίωτη την τιμή αλήθειας ενός ατομικού τύπου. Η απόδειξη μοιάζει ουσιαστικά με εκείνη για τη Δραστηριότητα 3.4 – δες Άσκηση 3.24.
Έχουμε λοιπόν ουσιαστικά τελειώσει με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.9. □

Το Θεώρημα 3.9 στην ειδική περίπτωση που παίρνουμε $T = \emptyset$ εκφράζεται ως εξής:

Πόρισμα 3.2. Κάθε τυπικό θεώρημα του ΚΛ είναι λογικά αληθής τύπος. □

Άμεση συνέπεια του πορίσματος αυτού είναι ότι το σύστημα ΚΛ είναι συνεπές, δηλαδή αποκλείεται να υπάρχει τύπος φ τέτοιος που $\vdash_{K\Lambda} \varphi$ και $\vdash_{K\Lambda} \neg\varphi$. Πράγματι, αν υπήρχε τέτοιος τύπος φ, τότε θα ίσχυε ότι $\models \varphi \wedge \neg\varphi$, πράγμα αδύνατο.

Όπως και στο Κεφάλαιο 2, το Θεώρημα Εγκυρότητας συνεπάγεται ότι κάθε ικανοποιήσιμο σύνολο τύπων είναι συνεπές. Στην πραγματικότητα, αληθεύει κάτι περισσότερο.

Πρόταση 3.4. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
α) Το Θεώρημα 3.9.
β) Για κάθε σύνολο τύπων T, αν το T είναι ικανοποιήσιμο, τότε το T είναι συνεπές.

Απόδειξη. α)⇒β) Έστω ότι ισχύει το α) και T είναι σύνολο τύπων που είναι ικανοποιήσιμο, αλλά όχι συνεπές. Τότε υπάρχει τύπος φ τέτοιος ώστε $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$

και $T \vdash_{K\Lambda} \neg\varphi$. Λόγω του Θεωρήματος 3.9, ισχύει τότε $T \models \varphi$ και $T \models \neg\varphi$. Όμως το T είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχει δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v τέτοια ώστε η v να ικανοποιεί το T στην $\mathcal{A}$. Τότε θα ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ και $\mathcal{A} \models \neg\varphi[v]$, που είναι αδύνατο.

β)⇒α) Έστω ότι ισχύει το β) και T είναι σύνολο τύπων και φ τύπος τέτοιος που $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$, αλλά $T \not\models \varphi$. Τότε το σύνολο $T \cup \{\neg\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο, άρα, λόγω της υπόθεσης, είναι συνεπές. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ισχύουν ταυτόχρονα οι

$$T \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{K\Lambda} \neg\varphi \text{ (προφανώς) και } T \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{K\Lambda} \varphi \text{ (αφού } T \vdash_{K\Lambda} \varphi).$$

Έτσι ισχύει το ζητούμενο. □

Συνεχίζουμε με το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.9, που απέδειξε ο K. Goedel το 1930.

Θεώρημα 3.10. (Θεώρημα Πληρότητας Κατηγορηματικού Λογισμού)
Για κάθε $T \subseteq T(\Gamma_1)$ και κάθε $\varphi \in T(\Gamma_1)$

$$\text{αν } T \models \varphi, \text{ τότε } T \vdash_{K\Lambda} \varphi.$$ □

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, θα αναφέρουμε μερικά αποτελέσματα που συνδέονται άμεσα με το Θεώρημα Πληρότητας.

Πόρισμα 3.3. Κάθε λογικά αληθής τύπος είναι τυπικό θεώρημα του ΚΛ.

Πρόταση 3.5. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
α) Το Θεώρημα 3.10.
β) Για κάθε σύνολο τύπων T, αν το T είναι συνεπές, τότε το T είναι ικανοποιήσιμο.

Θεώρημα 3.11. (Θεώρημα Συμπάγειας Κατηγορηματικού Λογισμού)
Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του συνόλου τύπων T είναι ικανοποιήσιμο, τότε το T είναι ικανοποιήσιμο. □

Το Πόρισμα 3.3 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.10. Η απόδειξη του

Θεωρήματος 3.11 είναι παρόμοια με εκείνη του Θεωρήματος 2.6 και αφήνεται ως άσκηση (δες Άσκηση 3.25), ενώ η απόδειξη της Πρότασης 3.5 μοιάζει με την απόδειξη της Πρότασης 3.4 και είναι το ζητούμενο της ακόλουθης άσκησης.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.12

Αποδείξτε την Πρόταση 3.5.

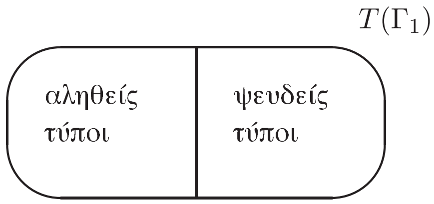
Θα ασχοληθούμε με τα βασικά σημεία της πολύ τεχνικής απόδειξης του Θεωρήματος Πληρότητας, αφήνοντας αρκετές λεπτομέρειες ως ασκήσεις. Όπως στα περισσότερα σύγχρονα εγχειρίδια, θα ακολουθηθεί η εναλλακτική απόδειξη του L. Henkin (1949) και όχι η πρωτότυπη απόδειξη του K. Goedel. Με βάση την Πρόταση 3.5, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνεπές σύνολο τύπων είναι ικανοποιήσιμο. Έστω λοιπόν T συνεπές σύνολο τύπων. Για ευκολία, θα υποθέσουμε τα εξής:

α) Η Γ_1 είναι αριθμήσιμη, δηλαδή έχει αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων. Βέβαια το θεώρημα αυτό ισχύει για όλες τις πρωτοβάθμιες γλώσσες, πολλές από τις οποίες έχουν μη αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων (και χρησιμοποιούνται για καθαρά μαθηματικές μελέτες). Όμως, όπως έχουμε ήδη δει, οι πρωτοβάθμιες γλώσσες που μας ενδιαφέρουν συνήθως έχουν (πεπερασμένο πλήθος μη λογικών συμβόλων και άρα) αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων (το σύνολο των μεταβλητών είναι αριθμήσιμο) κι έτσι ο περιορισμός αυτός δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικός.

β) Το $\approx$ δεν είναι σύμβολο της Γ_1 και έχουμε τροποποιήσει κατάλληλα τον τρόπο που ορίζουμε την έννοια της δομής (Ορισμός 3.4), τον ορισμό αλήθειας του Tarski (Ορισμός 3.7) κτλ. Η παραδοχή αυτή μειώνει την τεχνική δυσκολία της απόδειξης.

Η κατευθυντήρια γραμμή για την απόδειξη είναι η εξής:

Έστω ότι έχουμε τυχούσα δομή $\mathcal{A}$ για τη Γ_1 και τυχούσα αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$. Τότε προκύπτει ένας διαχωρισμός του συνόλου των τύπων της Γ_1 σε δυο «ίσα» μέρη: το σύνολο των τύπων που ικανοποιούνται από τη v στην $\mathcal{A}$ και το σύνολο των τύπων που δεν ικανοποιούνται από τη v στην $\mathcal{A}$ (που είναι ακριβώς οι αρνήσεις των τύπων του πρώτου μέρους):



Αντίστροφα, έστω ότι μας έχει δοθεί ένας διαχωρισμός του συνόλου των τύπων σε δύο μέρη, έστω Σ και P, όπου το Σ υποτίθεται ότι περιέχει τους τύπους που αληθεύουν και το P τους τύπους που δεν αληθεύουν. Τότε είναι δυνατό να εκμαιεύσουμε από το Σ τον ορισμό μιας δομής $\mathcal{A}$ και μιας αποτίμησης v έτσι, ώστε οι τύποι που αληθεύουν για τη v στην $\mathcal{A}$ να είναι ακριβώς οι τύποι που ανήκουν στο Σ. Η ιδέα είναι ότι

(i) το σύμπαν της δομής θα περιέχει ως στοιχεία ακριβώς τους όρους της Γ_1, δηλαδή τις εκφράσεις της που αντιπροσωπεύουν «αληθινά αντικείμενα» και

(ii) τα κατηγορηματικά σύμβολα θα ερμηνευθούν όπως μας υποβάλλει το Σ, ενώ τα συναρτησιακά σύμβολα και τα σύμβολα σταθερών ως οι όροι που προκύπτουν με φυσιολογικό τρόπο.

Για να μπορέσουμε λοιπόν να δείξουμε ότι το T είναι ικανοποιήσιμο, αρκεί να προσδιορίσουμε ένα σύνολο τύπων που να «καθορίζει την πλήρη αλήθεια» και να περιέχει το T. Μ' άλλα λόγια, το ζητούμενο είναι ένα σύνολο τύπων Σ που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

σ1. $T \subseteq \Sigma$,

σ2. το Σ είναι συνεπές,

σ3. το Σ είναι πλήρες, δηλαδή για κάθε τύπο $\varphi : \varphi \in \Sigma$ ή $\neg\varphi \in \Sigma$,

σ4. το Σ πράγματι αντιπροσωπεύει την αλήθεια.

Ξεκινώντας από το T, θα ορίσουμε διαδοχικά συνεπή σύνολα τύπων που ικανοποιούν τις συνθήκες σ4 και σ3. Η συνθήκη σ4 ουσιαστικά σημαίνει ότι για κάθε τύπο της μορφής $\exists y\varphi$ (δηλαδή $\neg\forall y\neg\varphi$) που έχει μπει στο Σ πρέπει ο τύπος φ^y_c

να έχει μπει στο Σ για κάποιο σύμβολο σταθερής c. Δηλαδή, κάθε φορά που το Σ ισχυρίζεται ότι «υπάρχει στοιχείο y του σύμπαντος που έχει την ιδιότητα φ», πρέπει το Σ να ισχυρίζεται επίσης ότι «το c έχει την ιδιότητα φ» για συγκεκριμένο στοιχείο c του σύμπαντος. Η επιλογή των σταθερών πρέπει να γίνει με προσεκτικό τρόπο, ώστε να αποφύγουμε προβλήματα. Προσθέτουμε λοιπόν στη γλώσσα Γ_1 ένα αριθμήσιμο σύνολο **νέων** συμβόλων σταθερών $\{d_0, d_1, d_2, \ldots\}$ και έτσι προκύπτει η γλώσσα Γ_1^H – το H προέρχεται από τη λέξη Henkin, αφού τα νέα σύμβολα καλούνται συνήθως *σταθερές Henkin* ή *μάρτυρες Henkin* (αφού κάθε τέτοιο σύμβολο «μαρτυρά» κάποια ιδιότητα). Στη συνέχεια δουλεύουμε στα πλαίσια της επαυξημένης γλώσσας Γ_1^H.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι το T είναι συνεπές, αν το θεωρήσουμε ως σύνολο τύπων της Γ_1. Πράγματι, έστω ότι το είναι αντιφατικό, δηλαδή υπάρχει τύπος φ τέτοιος ώστε $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$ και $T \vdash_{K\Lambda} \neg\varphi$. Με βάση την απόδειξη του Θεωρήματος 3.7, μπορούμε να αντικαταστήσουμε όλα τα νέα σύμβολα σταθερών που εμφανίζονται στις τυπικές αποδείξεις που δείχνουν ότι $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$ και $T \vdash_{K\Lambda} \neg\varphi$ με μεταβλητές και να συμπεράνουμε ότι υπάρχουν τυπικές αποδείξεις που χρησιμοποιούν τύπους της Γ_1 και δείχνουν ότι $T \vdash_{K\Lambda} \varphi^*$ και $T \vdash_{K\Lambda} \neg\varphi^*$, για κατάλληλο $\varphi^* \in T(\Gamma_1)$. Άρα το T είναι αντιφατικό ως υποσύνολο του $T(\Gamma_1)$, πράγμα αδύνατο.

Στη συνέχεια θα προσθέσουμε στο τύπους που εξασφαλίζουν ότι ισχύει η σ4. Θεωρούμε λοιπόν όλα τα διατεταγμένα ζεύγη της μορφής $< \varphi, y >$, όπου φ είναι τύπος της Γ_1 και y είναι μεταβλητή της Γ_1. Επειδή το σύνολο των τύπων της Γ_1 είναι αριθμήσιμο (– δες Άσκηση 3.26), υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος τέτοιων ζευγών, ας πούμε

$$< \varphi_0, y_0 >, < \varphi_1, y_1 >, \ldots, < \varphi_n, y_n >, \ldots.$$

Ορίζουμε τώρα αναδρομικά το σύνολο T_n ως εξής:

$$\begin{aligned} T_0 &= T, \\ T_{n+1} &= T_n \cup \{\exists y_n \varphi_n \rightarrow (\varphi_n)^{y_n}_{d_{k_n}}\}, \text{ όπου } d_{k_n} \text{ είναι νέο σύμβολο σταθερής} \\ &\quad\ \text{που δεν εμφανίζεται σε στοιχείο του συνόλου } \{\varphi_n\} \cup T_n. \end{aligned}$$

Είναι σημαντικό η επιλογή του συμβόλου d_{k_n} να γίνει προσεκτικά: επιλέγουμε εκείνο από τα νέα σύμβολα σταθερής που έχει το μικρότερο δείκτη και δεν εμφανίζεται ούτε στους τύπους που έχουν ήδη προστεθεί στο T ούτε στον τύπο υπό θεώρηση φ_n.

Έστω T_∞ το σύνολο που προκύπτει, αφού έχουμε προσθέσει στο όλους τους τύπους παραπάνω, δηλαδή $T_\infty = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} T_n$. Σημειώνουμε ότι, για τυχόν $i \in \mathbf{N}$, αν $T_\infty \vdash_\Lambda \exists y_i \varphi_i$, τότε $T_\infty \vdash_\Lambda (\varphi_i)^{y_i}_{d_{k_i}}$.

Η επιλογή των συμβόλων d_{k_i} μας εξασφαλίζει ότι το T_∞ είναι συνεπές σύνολο τύπων.

Δραστηριότητα 3.6

Αποδείξτε ότι το σύνολο T_∞ είναι συνεπές.

(**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 3 μετά τον Ορισμό 2.10, το Θεώρημα σε άτοπο απαγωγής και την Πρόταση 3.3.)

Έχοντας ορίσει μια συνεπή επέκταση του T που ικανοποιεί τη συνθήκη σ4, προχωρούμε σε νέα συνεπή επέκταση που ικανοποιεί και τη συνθήκη σ3. Θεωρούμε λοιπόν όλους τους τύπους και προσθέτουμε στο T_∞ «ακριβώς τους μισούς», με συμβιβαστό τρόπο. Συγκεκριμένα, δεδομένης μιας απαρίθμησης $\psi_0, \psi_1, \ldots$ των τύπων της Γ_1^H, ορίζουμε αναδρομικά το σύνολο τύπων Σ_n ως εξής:

$$\Sigma_0 = T_\infty$$
$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \begin{cases} \{\psi_n\}, & \text{αν } \Sigma_n \cup \{\psi_n\} \text{ συνεπές} \\ \{\neg\psi_n\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έστω Σ το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Sigma_n$. Προφανώς το Σ ικανοποιεί τις συνθήκες σ1 και σ3. Επίσης ικανοποιεί και τη συνθήκη σ4, αφού περιέχει το T_∞. Ισχυριζόμαστε ότι το Σ ικανοποιεί τη συνθήκη σ2, δηλαδή ότι το Σ είναι συνεπές.

Πράγματι, έστω ότι το Σ είναι αντιφατικό. Τότε, με βάση την Παρατήρηση 3 μετά τον Ορισμό 2.10, υπάρχει κάποιο $m \in \mathbf{N}$ για το οποίο το Σ_m είναι αντιφατικό. Θεωρούμε το ελάχιστο τέτοιο m, το οποίο πρέπει να ισούται με $n+1$, για κάποιο $n \in \mathbf{N}$(το Σ_0 είναι συνεπές!). Από τον ορισμό του Σ_{n+1} όμως, αυτό σημαίνει ότι **και** το σύνολο $\Sigma_n \cup \{\psi_n\}$ είναι αντιφατικό (– αλλιώς το $\Sigma_n \cup \{\psi_n\}$ θα ήταν συνεπές και άρα το ίσο του Σ_{n+1} θα ήταν συνεπές) **και** το σύνολο $\Sigma_n \cup \{\neg\psi_n\}$ είναι αντιφατικό (αφού αυτό ισούται με το Σ_{n+1}). Άρα, λόγω του Θεωρήματος 2.10, $\Sigma_n \vdash_{K\Lambda} \neg\psi_n$ και $\Sigma_n \vdash_{K\Lambda} \neg\neg\psi_n$, οπότε το Σ_n είναι αντιφατικό. Αυτό όμως είναι άτοπο, λόγω της επιλογής του $m = n+1$. Άρα ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή το Σ είναι συνεπές.

Παρατηρούμε ότι το Σ έχει την εξής ιδιότητα:

$$\text{Για κάθε τύπο } \varphi, \text{αν } \Sigma \vdash_{K\Lambda} \varphi, \text{τότε } \varphi \in \Sigma. \tag{3.31}$$

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει τύπος φ τέτοιος ώστε $\Sigma \vdash_{K\Lambda} \varphi$, αλλά $\varphi \notin \Sigma$. Αφού το Σ είναι πλήρες, θα ισχύει $\neg\varphi \in \Sigma$. Τότε όμως $\Sigma \vdash_{K\Lambda} \neg\varphi$, οπότε το Σ είναι αντιφατικό, πράγμα άτοπο.

Έχοντας τώρα το σύνολο Σ, προχωρούμε στον ορισμό δομής και αποτίμησης για τις οποίες ικανοποιούνται όλα τα στοιχεία του T.

Ορίζουμε τη δομή $\mathcal{A}^H$ για τη Γ_1^H ως εξής:

1) Το σύμπαν της $\mathcal{A}^H$ είναι το σύνολο $O(\Gamma_1^H)$ των όρων της Γ_1^H.

2) Για κάθε n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο P της Γ_1^H (ισοδύναμα, της Γ_1) και οποιαδήποτε στοιχεία $t_1, \ldots, t_n$ του σύμπαντος ισχύει

$$< t_1, \ldots, t_n > \in P^{\mathcal{A}^H}, \text{ ανν } P(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma.$$

3) Για κάθε n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο f της Γ_1^H (ισοδύναμα, της Γ_1) και οποιαδήποτε στοιχεία $t_1, \ldots, t_n$ του σύμπαντος ισχύει

$$f^{\mathcal{A}^H}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n) \in |\mathcal{A}^H|.$$

4) Για κάθε σύμβολο σταθερής c της Γ_1 έχουμε $c^{\mathcal{A}^H} = c$ και για κάθε νέο σύμβολο σταθερής d έχουμε $d^{\mathcal{A}^H} = d$.

Θεωρούμε επίσης την αποτίμηση v στην $\mathcal{A}^H$ που ορίζεται ως $v(x) = x$ για κάθε μεταβλητή x.

Από τον ορισμό της δομής $\mathcal{A}^H$ έπεται ότι η v επεκτείνεται με «ωραίο» τρόπο στο σύνολο των όρων της Γ_1^H.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.13

Δείξτε ότι για κάθε όρο t της $\Gamma_1^H : \overline{v}(t) = t$.

Σημείωση. Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στο χειρισμό των όρων της Γ_1^H, αφού θεωρούνται ταυτόχρονα ως εκφράσεις της τυπικής γλώσσας και ως αντικείμενα, στοιχεία του σύμπαντος της $\mathcal{A}^H$. □

Επειδή ο ορισμός της δομής $\mathcal{A}^H$ υποβλήθηκε από το Σ, ισχύει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.5. Για κάθε $\varphi \in T(\Gamma_1^H)$ ισχύει $\mathcal{A}^H \models \varphi[v]$, ανν $\varphi \in \Sigma$.

Απόδειξη. Δες Δραστηριότητα 3.7. □

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.10.
Λόγω του Λήμματος 3.5, το ικανοποιείται από την αποτίμηση v στη δομή $\mathcal{A}^H$. Όμως η $\mathcal{A}^H$ είναι δομή για την επαυξημένη γλώσσα Γ_1^H, όχι την αρχική Γ_1, χρειάζεται επομένως λίγη δουλειά ακόμη.

Ορίζουμε λοιπόν ως δομή $\mathcal{A}$ για τη γλώσσα Γ_1 τον «περιορισμό της δομής $\mathcal{A}^H$ στη γλώσσα Γ_1». Δηλαδή, κρατώντας ίδιο το σύμπαν, παραλείπουμε από τον ορισμό της δομής $\mathcal{A}^H$ τις ερμηνείες των συμβόλων σταθερών $\{d_0, d_1, d_2, \ldots\}$. (Προσοχή, τα σύμβολα αυτά παραμένουν ως στοιχεία του σύμπαντος, απλά δεν είναι σύμβολα της γλώσσας και συνεπώς δεν απαιτείται η ερμηνεία τους.) Με βάση τώρα την Άσκηση 3.27, επειδή κάθε στοιχείο του T είναι τύπος της «πτωχότερης» γλώσσας Γ_1, τα σύμβολα της οποίας ερμηνεύονται με τον ίδιο τρόπο και στις δυο δομές, για κάθε $\varphi \in T$ ισχύει

$$\mathcal{A}^H \models \varphi[v] \ \text{ ανν } \ \mathcal{A} \models \varphi[v].$$

Συνεπώς όλα τα στοιχεία του ικανοποιούνται από τη v στην $\mathcal{A}$. □

Δραστηριότητα 3.7

Αποδείξτε το Λήμμα 3.5.

(**Υπόδειξη.** Χρησιμοποιήστε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου φ. Η περίπτωση τύπου της μορφής $\forall y \psi$ στηρίζεται ουσιαστικά στη χρήση των σταθερών Henkin. Θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα 3.9, την Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.13 και την Άσκηση 3.14.)

Χρησιμοποιώντας μια από τις βασικές ιδέες της απόδειξης του Θεωρήματος 3.10, συγκεκριμένα τη μέθοδο επέκτασης του συνόλου T_∞ στο πλήρες και συνεπές σύνολο Σ, είναι δυνατό να αποδείξουμε το Θεώρημα Πληρότητας Προτασιακού Λογισμού, δηλαδή το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.12. Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων T και κάθε προτασιακό τύπο φ

$$\text{αν } T \models \varphi, \text{ τότε } T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι οι Προτάσεις 3.4 και 3.5 μεταφέρονται εύκολα στο πλαίσιο της προτασιακής λογικής, δηλαδή ισχύουν αν ως λαμβάνει τυχόν σύνολο προτασιακών τύπων και ως φ ληφθεί τυχών προτασιακός τύπος – σχετικά δες το Παράδειγμα 2.16 και την Άσκηση 2.14. Συνεπώς, για ν' αποδείξουμε το Θεώρημα, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι κάθε συνεπές σύνολο προτασιακών τύπων είναι ικανοποιήσιμο.

Θεωρούμε λοιπόν τυχόν συνεπές σύνολο προτασιακών τύπων και μια απαρίθμηση $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \ \varphi_n, \ldots$ του συνόλου των προτασιακών τύπων (η γλώσσα Γ_0 έχει αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων, άρα το σύνολο $T(\Gamma_0)$ είναι αριθμήσιμο). Ορίζουμε αναδρομικά το σύνολο T_n ως εξής:

$$T_0 = T$$
$$T_{n+1} = T_n \cup \begin{cases} \{\varphi_n\}, & \text{αν το } T_n \cup \{\varphi_n\} \text{ είναι συνεπές} \\ \{\neg\varphi_n\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έστω, τέλος, $T_\infty = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} T_n$. Προφανώς το T_∞ είναι πλήρες. Όπως για το σύνολο Σ στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.10, αποδεικνύεται ότι το T_∞ είναι και συνεπές. Επίσης αποδεικνύεται, όπως και για το Σ, ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ, αν $T_\infty \vdash \varphi$, τότε $\varphi \in T_\infty$.
Ορίζουμε τώρα μια αποτίμηση v ως εξής: $v(p_i) = A$, ανν $p_i \in T_\infty$. Τότε ισχύει το εξής λήμμα.

Λήμμα 3.6. Για κάθε προτασιακό τύπο φ έχουμε $\overline{v}(\varphi) = A$, ανν $\varphi \in T_\infty$.

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.12.
Αφού $T \subseteq T_\infty$, θα ισχύει $\overline{v}(\varphi) = A$ για κάθε στοιχείο φ του T, δηλαδή η v ικανοποιεί το T. □

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.14

Αποδείξτε το Λήμμα 3.6.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Πληρότητας Κατηγορηματικού Λογισμού για την περίπτωση που η τυπική γλώσσα περιέχει το $\approx$, η βασική ιδέα, δηλαδή ο προσδιορισμός του συνόλου των «αληθών» τύπων, είναι η ίδια, πρέπει όμως να γίνουν τροποποιήσεις στον ορισμό της δομής, στην οποία ικανοποιούνται τα στοιχεία του – λεπτομέρειες υπάρχουν, παραδείγματος χάρη, στα 5), 6) της βιβλιογραφίας παρακάτω.

Θα τελειώσουμε την ενότητα με ένα σχόλιο για τη σπουδαιότητα των Θεωρημάτων Εγκυρότητας και Πληρότητας του Κατηγορηματικού Λογισμού. Υπενθυμίζουμε κατ' αρχήν ότι το βασικό ερώτημα που μας ενδιαφέρει είναι το εξής:

Είναι δυνατό να ελέγξουμε αποτελεσματικά αν $T \models \varphi$ ή όχι, για τυχόν σύνολο τύπων και τυχόντα τύπο φ;

Όπως αναφέραμε στην ενότητα 3.2, αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει τέτοια διαδικα σία ελέγχου. Όμως το ακόλουθο γεγονός παρέχει κάποια ανακούφιση.

Με βάση τα Θεωρήματα 3.9 και 3.10, η σχέση $T \models \varphi$ ισοδυναμεί με $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$. Αντί λοιπόν να ελέγχουμε κατά πόσον ισχύει $T \models \varphi$, μπορούμε να ελέγχουμε κατά πόσον ισχύει $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$. Το καλό είναι ότι το σύνολο $\{\varphi : T \vdash_{K\Lambda} \varphi\}$ είναι «αναδρομικά απαριθμήσιμο», δηλαδή υπάρχει μια αποτελεσματική διαδικασία που παράγει «τελικά» όλες τις τυπικές συνέπειες του συνόλου υποθέσεων T. Δε θα προχωρήσουμε σε λεπτομέρειες, η βασική ιδέα είναι ότι είναι δυνατό με μηχανικό τρόπο να παράγουμε (όλες τις) πεπερασμένες ακολουθίες τύπων και για καθεμία να ελέγχουμε αν αποτελεί τυπική απόδειξη από το σύνολο υποθέσεων T, με τη βεβαιότητα ότι κάθε τόσο θα παίρνουμε απάντηση «ναι», δηλαδή θα βρίσκουμε έναν τύπο που αποδεικνύεται τυπικά από το T ή, ισοδύναμα, που έπεται λογικά από το T.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή δείξαμε ότι το αξιωματικό σύστημα ΚΛ, όπως και το αξιωματικό σύστημα ΠΛ που είδαμε στο Κεφάλαιο 2, είναι έγκυρο και πλήρες. Μ' άλλα λόγια, για οποιονδήποτε τύπο φ *και οποιοδήποτε σύνολο τύπων* T, *το να συμπεραίνουμε λογικά (δηλαδή εξετάζοντας την αλήθεια, με βάση τον ορισμό του Tarski) το* φ *από το* T *είναι ισοδύναμο με το να αποδεικνύουμε το* φ *από το* T *στα πλαίσια του ΚΛ, δηλαδή παίρνοντας υπόψη μας τη συντακτική μορφή των στοιχείων του* $T \cup \{\varphi\}$, *σε σχέση με τα αξιώματα και τον αποδεικτικό κανόνα του ΚΛ.*

Σύνοψη Κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό ορίσαμε τις πρωτοβάθμιες γλώσσες, συμβολικές γλώσσες που παρέχουν μεγαλύτερη εκφραστική δυνατότητα από την τυπική γλώσσα της προτασιακής λογικής – στα πλαίσιά τους η ανάλυση προτάσεων γίνεται θεωρώντας όχι μόνο τις συνδετικές λέξεις, αλλά και τις εκφράσεις που δείχνουν ποσότητα, ιδιότητα και διάκριση αντικειμένων. Στη συνέχεια είδαμε πώς γίνεται, με χρήση τέτοιων γλωσσών, εξαγωγή συμπερασμάτων από υποθέσεις, με δύο τρόπους: α) σημασιολογικά, δηλαδή μέσω ερμηνείας των συμβόλων της γλώσσας μέσα σε μια δομή (ορισμός αλήθειας του Tarski) και β) συντακτικά, δηλαδή στα πλαίσια του αξιωματικού συστήματος ΚΛ (αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-ΑΣ8 και αποδεικτικός κανόνας MP*). Για καθένα από τους τρόπους αυτούς, δώσαμε παραδείγματα εφαρμογής τους και μελετήσαμε μεθόδους που επιτρέπουν να καταλήγουμε ευκολότερα από υποθέσεις σε συμπεράσματα (Νόμοι Ποσοδεικτών, Θεώρημα Γενίκευσης, Θεώρημα Γενίκευσης Σταθερών). Επίσης, αποδείξαμε ότι κάθε τύπος μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας μπορεί να γραφεί σε κανονική ποσοδεικτική μορφή, δηλαδή με ποσοδείκτες εμπρός και κατόπιν ένα μέρος χωρίς ποσοδείκτες. Τέλος, αποδείξαμε ότι το αξιωματικό σύστημα ΚΛ είναι έγκυρο και πλήρες, δηλαδή ότι, για οποιοδήποτε σύνολο υποθέσεων* T*, από το* T *αποδεικνύονται στο ΚΛ ακριβώς οι τύποι που αποτελούν λογικές συνέπειες του* T *(δηλαδή, αληθεύουν κατ' ανάγκην όταν αληθεύουν όλα τα στοιχεία του* T*). Η μέθοδος απόδειξης της πληρότητας του συστήματος ΚΛ, που είδαμε για την κάπως απλούστερη περίπτωση πρωτοβάθμιας γλώσσας χωρίς το σύμβολο* $\approx$*, αποτελεί εργαλείο θεμελιώδους σημασίας για τη Λογική.*

Λύσεις Ασκήσεων Αυτοαξιολόγησης

Άσκηση 3.1.

Δουλεύουμε όπως στο Παράδειγμα 2.1, δηλαδή με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ. Αν ο φ είναι ατομικός, τότε δεν υπάρχουν στο φ ούτε δεξιές ούτε αριστερές παρενθέσεις, άρα έχει την ιδιότητα. Οι περιπτώσεις των συνδέσμων είναι ακριβώς ίδιες με αυτές στην προτασιακή λογική. Έστω τέλος ότι ο φ είναι της μορφής $\forall x\psi$, όπου ο ψ έχει την ιδιότητα. Τότε όμως ο φ έχει ακριβώς τόσες δεξιές παρενθέσεις όσες ο ψ και όμοια για τις αριστερές. Άρα ο αριθμός των δεξιών παρενθέσεων στο φ είναι ίδιος με τον αριθμό αριστερών παρενθέσεων, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Σχόλιο. Αν δώσατε πλήρη απάντηση, ωραία, έχετε κατανοήσει τη λειτουργία της αρχής της επαγωγής στο πλαίσιο των πρωτοβάθμιων γλωσσών. Αν δεν τα καταφέρατε, μήπως δυσκολευτήκατε με τους ατομικούς τύπους; Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι η χρήση παρενθέσεων σε όρους (σημείωση α) μετά τον Ορισμό 3.2) και ατομικούς τύπους (σημείωση α) μετά τον Ορισμό 3.3) γίνεται για λόγους ευκολίας, δηλαδή οι παρενθέσεις αυτές δε «μετράνε» ως γνήσιες παρενθέσεις. Ακόμη κι αν τις μετρήσουμε όμως, πάλι ο αριθμός των δεξιών παρενθέσεων είναι ίδιος με τον αριθμό των αριστερών παρενθέσεων (αρχή επαγωγής στο $O(\Gamma_1)$).

Άσκηση 3.2.

α) Η x_1 είναι δεσμευμένη στον τύπο $\forall x_1 Q(x_1)$, αφού εμπίπτει στο πεδίο εφαρμογής του ποσοδείκτη, και είναι επίσης δεσμευμένη στον τύπο $\exists x_2 Q(x_2)$, αφού δεν εμφανίζεται καθόλου. Άρα η x_1 είναι δεσμευμένη στον τύπο $\forall x_1 Q(x_1) \leftrightarrow \exists x_2 Q(x_2)$.

Όμοια, η x_2 είναι δεσμευμένη στον αρχικό τύπο. Άρα καμιά μεταβλητή δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο αυτό, δηλαδή ο τύπος είναι πρόταση της Γ_1.
β) Η x_1 εμφανίζεται στον ατομικό τύπο $Q(x_1)$, άρα εμφανίζεται ελεύθερη σ' αυτόν και συνεπώς και στον τύπο $\exists x_1 Q(x_1) \wedge Q(x_1)$.
γ) Δεν υπάρχουν μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο $\exists x_3(Q(x_3) \rightarrow \forall x_4 Q(x_4))$, δηλαδή ο τύπος αυτός είναι πρόταση.
δ) Οι μεταβλητές x_1, x_2 εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο, αφού εμφανίζονται (ελεύθερες) σε έναν υποτύπο του – στην πραγματικότητα και στους δυο υποτύπους του.

Σχόλιο. Αν απαντήσατε σωστά, μπράβο, έχετε καταλάβει όχι μόνο τον Ορισμό 3.5, αλλά και τη χρήση των παρενθέσεων σε τύπους. Αν δυσκολευτήκατε, δεν πειράζει, ο ορισμός της «ελεύθερης εμφάνισης» μεταβλητής σε τύπο δεν είναι τετριμμένος. Μήπως, παραδείγματος χάρη, δεν προσέξατε ότι ο ποσοδείκτης $\exists x_1$ εφαρμόζεται μόνο στον τύπο $Q(x_1)$ και όχι στον $Q(x_1) \wedge Q(x_1)$; (Το δεύτερο θα ίσχυε, αν ο τύπος ήταν ο $\exists x_1(Q(x_1) \wedge Q(x_1))$.)

Άσκηση 3.3.

α) Σύμφωνα με τον ορισμό του Tarski, η $\mathcal{N}_\sigma^* \models x_1 \mathbf{E} x_2 \wedge x_2 \mathbf{E} x_3 \to x_1 \mathbf{E} x_3[v]$ ισοδυναμεί με

$$\text{αν } \mathcal{N}_\sigma^* \models x_1 \mathbf{E} x_2 \wedge x_2 \mathbf{E} x_3[v], \tag{3.32}$$

$$\text{τότε } \mathcal{N}_\sigma^* \models x_1 \mathbf{E} x_3[v]. \tag{3.33}$$

Όμως η (3.32) είναι ισοδύναμη με $\mathcal{N}_\sigma^* \models x_1 \mathbf{E} x_2[v]$ και $\mathcal{N}_\sigma^* \models x_1 \mathbf{E} x_2[v]$, δηλαδή με $< v(x_1), v(x_2) > \in \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma^*}$ και $< v(x_2), v(x_3) > \in \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma^*}$, δηλαδή με $< 5, 0 > \in \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma^*}$ και $< 0, 3 > \in \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma^*}$, δηλαδή με $0 < 5$ και $3 < 0$. Άρα η (3.32) δεν ισχύει, οπότε η συνεπαγωγή «αν (3.32), τότε (3.33)» αληθεύει και συνεπώς η v ικανοποιεί τον τύπο στη $\mathcal{N}_\sigma^*$.

β) Εφαρμόζοντας πάλι τον ορισμό του Tarski, έχουμε ότι η

$$\mathcal{N}_\sigma^* \models \exists x_4 (x_4 \not\mathbf{E} x_1 \wedge x_4 \not\mathbf{E} x_3)[v] \tag{3.34}$$

ισοδυναμεί με ότι υπάρχει $n \in |\mathcal{N}_\sigma^*|$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{N}_\sigma^* \models x_4 \not\mathbf{E} x_1 \wedge x_4 \not\mathbf{E} x_3[v(x_4|n)]. \tag{3.35}$$

Η (3.35) όμως ισοδυναμεί με

$$< v(x_4|n)(x_4), v(x_4|n)(x_1) > \notin \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma^*} \text{ και } < v(x_4|n)(x_4), v(x_4|n)(x_3) > \notin \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma^*},$$

δηλαδή με $< n, 0 > \notin \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma^*}$ και $< n, 3 > \notin \mathbf{E}^{\mathcal{N}_\sigma^*}$, δηλαδή με

$$n \leq 0 \text{ και } n \leq 3. \tag{3.36}$$

Άρα η (3.34) ισχύει, ανν υπάρχει φυσικός n που ικανοποιεί την (3.36), πράγμα που αληθεύει. Συνεπώς η $[v]$ ικανοποιεί τον τύπο στη $\mathcal{N}_\sigma^*$.

Σχόλιο. Βρήκατε και τις δυο σωστές απαντήσεις; Ωραία, έχετε συνειδητοποιήσει πώς δουλεύει ο ορισμός του Tarski. Αν όμως αστοχήσατε, μήπως χρησιμοποιήσατε διαφορετική ερμηνεία του συμβόλου **E** από αυτή που υπαγορεύει η δομή που εξετάζουμε;

Άσκηση 3.4.

Η αποτίμηση v ικανοποιεί τον τύπο φ στη δομή $\mathcal{A}$.	$\mathcal{A} \not\models \varphi$
Η πρόταση φ δεν αληθεύει στη δομή $\mathcal{A}$.	$\models \varphi$
Το σύνολο τύπων συνεπάγεται λογικά τον τύπο φ.	$\models \varphi \leftrightarrow \psi$
Οι τύποι φ, ψ είναι λογικά ισοδύναμοι.	$v \models \varphi[\mathcal{A}]$
Ο τύπος φ είναι έγκυρος.	$T \models \varphi$

Σχόλιο. Ήταν όλες οι αντιστοιχίσεις σας σωστές; Ωραία, έχετε εξοικειωθεί με το σημασιολογικό συμβολισμό που έχουμε ορίσει. Αν όχι, μήπως πρέπει να ξαναδιαβάσετε τους Ορισμούς 3.7 και 3.9; Σημειώστε ότι ο συμβολισμός $v \models \varphi[\mathcal{A}]$ δεν είναι απαράδεκτος (για να χρησιμοποιηθεί για την πρώτη έννοια), απλά δεν είναι αυτός που έχουμε υιοθετήσει.

Άσκηση 3.5.

α) Έστω ότι $T \cup \{\varphi\} \models \psi$, δηλαδή ότι για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ ισχύει το εξής:

Αν η v ικανοποιεί το $T \cup \{\varphi\}$ στην $\mathcal{A}$, τότε η v ικανοποιεί τον τύπο ψ στην $\mathcal{A}$ (*).

Θεωρούμε δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ που ικανοποιούν το σύνολο T. Τότε ή $\mathcal{A} \models \varphi[v]$ ή $\mathcal{A} \not\models \varphi[v]$. Αν ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, τότε η v ικανοποιεί το $T \cup \{\varphi\}$ στην $\mathcal{A}$, οπότε $\mathcal{A} \models \psi[v]$ (λόγω της (*)). Άρα στην περίπτωση αυτή ισχύει η συνεπαγωγή «αν $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, τότε $\mathcal{A} \models \psi[v]$».
Έστω τώρα ότι $\mathcal{A} \not\models \varphi[v]$. Τότε τετριμμένα ισχύει η «αν $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, τότε

$\mathcal{A} \models \psi[v]$». Και στις δυο περιπτώσεις λοιπόν ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi[v]$, δηλαδή το ζητούμενο.

Για το αντίστροφο, έστω ότι $T \models \varphi \to \psi$, δηλαδή για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και κάθε αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$, αν η v ικανοποιεί το στην $\mathcal{A}$, τότε ισχύει $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi[v]$.

Θεωρούμε τώρα δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ που ικανοποιούν το $T \cup \{\varphi\}$. Τότε προφανώς η v ικανοποιεί το στην $\mathcal{A}$, άρα $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi[v]$. Όμως η v ικανοποιεί και το φ στην $\mathcal{A}$, άρα $\mathcal{A} \models \psi[v]$. Συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.

β) Όμοια.

Σχόλιο. Η άσκηση αυτή είναι ανάλογη της Άσκησης 2.3, με τη διαφορά ότι, αντί να θεωρούμε μόνο αποτιμήσεις (των προτασιακών μεταβλητών), θεωρούμε δομές και αποτιμήσεις (των μεταβλητών). Αν σας φάνηκε εύκολη, τότε έχετε κατανοήσει ότι η διαφορά αυτή δεν είναι ουσιαστική. Αν όμως συναντήσατε κάποια δυσκολία, μην ανησυχείτε, σκεφθείτε πάλι τους Ορισμούς 3.7 και 3.9.

Άσκηση 3.6.

α) Έστω $\mathcal{A}$ τυχούσα δομή και v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$. Σύμφωνα με τον ορισμό του Tarski, η $\mathcal{A} \models \neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi[v]$ ισοδυναμεί με «$\mathcal{A} \models \neg\exists x\varphi[v]$, ανν $\mathcal{A} \models \forall x\neg\varphi[v]$», δηλαδή με «$\mathcal{A} \not\models \exists x\varphi[v]$, ανν $\mathcal{A} \models \forall x\neg\varphi[v]$», δηλαδή με

$$\text{δεν υπάρχει } a \in |\mathcal{A}| \text{ για το οποίο } \mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)], \tag{3.37}$$

$$\text{ανν για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ ισχύει } \mathcal{A} \not\models \varphi[v(x|a)]. \tag{3.38}$$

Η χρήση των εκφράσεων «υπάρχει» και «για κάθε» στα ελληνικά είναι τέτοια ώστε οι (3.37), (3.38) να είναι πράγματι ισοδύναμες. Παραδείγματος χάρη, η πρόταση «δεν υπάρχει $n \in \mathbf{N}$ για το οποίο $n < 0$» είναι ισοδύναμη με την «για κάθε $n \in \mathbf{N}$ ισχύει $n \not< 0$». Συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.

β) Η χρήση της έκφρασης «υπάρχει» στα ελληνικά εξασφαλίζει ότι η σειρά εφαρμογής της σε δύο ή περισσότερες μεταβλητές δεν έχει ουσιαστική σημασία.

Σχόλιο. Σας φάνηκε εύκολη η άσκηση; Τότε χειρίζεστε με άνεση τον ορισμό της αλήθειας του Tarski και τον ορισμό της λογικής συνεπαγωγής. Αν συναντήσατε δυσκολία, δεν πειράζει, πρέπει να συνειδητοποιήσετε ότι η χρήση των συμβόλων $\forall, \exists$ απλά αντανακλά τις ιδιότητες των αντίστοιχων εκφράσεων της ελληνικής γλώσσας.

Άσκηση 3.7.

Κατ' αρχήν μεταγράφουμε τον τύπο σε μορφή που έχει την ιδιότητα του θεωρήματος αλφαβητικών παραλλαγών. Για ευκολία, υποθέτουμε ότι η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο θ – αλλιώς την αντικαθιστούμε με κατάλληλη μεταβλητή. Με τη μεταβλητή y όμως μπορεί να έχουμε πρόβλημα, αφού μπορεί να εμφανίζεται ελεύθερη και στον ψ και στο θ. Έτσι, επιλέγουμε μεταβλητή z που δεν εμφανίζεται (ελεύθερη) στον τύπο ψ και αντικαθιστούμε τον τύπο $\exists y\theta$ με το λογικά ισοδύναμο τύπο $\exists z\eta$, όπου η είναι ο θ^y_z, δηλαδή ο τύπος που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της y στον θ με τη z. Αντί για τον αρχικό τύπο, μπορούμε λοιπόν ισοδύναμα να θεωρήσουμε τον τύπο $\forall x\exists y\psi \to \exists z\eta$. Στη συνέχεια μετακινούμε τους ποσοδείκτες με οποιονδήποτε από τους ακόλουθους τρεις τρόπους.

α) Πρώτα τους ποσοδείκτες της υπόθεσης:

$$\begin{array}{rcll} \forall x\exists y\psi \to \exists z\eta & \equiv & \exists x(\exists y\psi \to \exists z\eta) & \text{τρίτος νόμος μετακίνησης} \\ & \equiv & \exists x\forall y(\psi \to \exists z\eta) & \text{τέταρτος νόμος μετακίνησης} \\ & \equiv & \exists x\forall y\exists z(\psi \to \eta) & \text{δεύτερος νόμος μετακίνησης} \end{array}$$

β) Πρώτα τον ποσοδείκτη του συμπεράσματος:

$$\begin{array}{rcll} \forall x\exists y\psi \to \exists z\eta & \equiv & \exists z(\forall x\exists y\psi \to \eta) & \text{δεύτερος νόμος μετακίνησης} \\ & \equiv & \exists z\exists x(\exists y\psi \to \eta) & \text{τρίτος νόμος μετακίνησης} \\ & \equiv & \exists z\exists x\forall y(\psi \to \eta) & \text{τέταρτος νόμος μετακίνησης} \end{array}$$

γ) Πρώτα τον ένα ποσοδείκτη της υπόθεσης και μετά τον ποσοδείκτη του συμπεράσματος:

$$\begin{array}{rcll} \forall x\exists y\psi \to \exists z\eta & \equiv & \exists x(\exists y\psi \to \exists z\eta) & \text{τρίτος νόμος μετακίνησης} \\ & \equiv & \exists x\exists z(\exists y\psi \to \eta) & \text{δεύτερος νόμος μετακίνησης} \\ & \equiv & \exists x\exists z\forall y(\psi \to \eta) & \text{τέταρτος νόμος μετακίνησης} \end{array}$$

Σχόλιο. Αν δε συναντήσατε δυσκολία, πολύ καλά, έχετε μάθει να χειρίζεστε άνετα τους νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών. Αν δυσκολευτήκατε, ίσως θα έπρεπε να ξαναδιαβάσετε την απόδειξη του θεωρήματος κανονικής ποσοδεικτικής μορφής.

Αν δεν πειστήκατε ότι οι τρεις τύποι σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που βρήκαμε είναι λογικά ισοδύναμοι, σκεφθείτε τα εξής: Ο τύπος του β) και ο τύπος του γ) είναι ισοδύναμοι, με βάση το δεύτερο νόμο εναλλαγής ποσοδεικτών. Επίσης, ο τύπος του α) είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο του γ), λόγω των υποθέσεών μας για τις μεταβλητές – ενώ γενικά ο συνδυασμός $\forall y \exists z$ δεν είναι ισοδύναμος με τον $\exists z \forall y$ (δες Άσκηση 3.8), το γεγονός ότι η μεταβλητή y είναι δεσμευμένη στον τύπο η μας εξασφαλίζει τη λογική ισοδυναμία.

Παρατήρηση. Η υπόθεσή μας ότι οι τύποι ψ και θ είναι ανοικτοί έχει μεγάλη σημασία. Χωρίς αυτή δε θα βρίσκαμε τύπο σε κανονική ποσοδεικτική μορφή, αφού δε θα γνωρίζαμε ποιοι ποσοδείκτες κρύβονται μέσα στον ψ ή στο θ.

Άσκηση 3.8.

	Σωστό	Λάθος
$\forall y[\forall x(P(x) \to P(x)) \to (P(c) \to P(c))]$	$\surd$	
$\forall x \exists y Q(x,y) \to \exists y Q(y,y)$		$\surd$
$(P(y) \to \forall x P(x)) \to \forall x(P(y) \to \forall x P(x))$	$\surd$	
$P(x) \to \forall x P(x)$		$\surd$
$x_2 \approx x_0 \to [P(x_2, f(x_5, x_2)) \leftrightarrow P(x_2, f(x_5, x_0))]$,	$\surd$	
$x_1 \approx x_2 \to (g(x_2) \approx g(x_3) \leftrightarrow g(x_1) \approx g(x_3))$		$\surd$

Σχόλια.

α) Ο τύπος αυτός προκύπτει από το σχήμα ΑΣ4, αν πρώτα γενικεύσουμε ως προς y, δηλαδή προτάξουμε τον ποσοδείκτη $\forall y$, και μετά αντικαταστήσουμε τον τύπο φ με τον τύπο $P(x) \to P(x)$ και τον όρο t με το σύμβολο σταθερής c, οπότε ο τύπος φ^x_t είναι ο $(P(x) \to P(x))^x_c$, δηλαδή ο $P(c) \to P(c)$. Όπως έχουμε αναφέρει, μια μεταβλητή είναι πάντα αντικαταστάσιμη από ένα σύμβολο σταθερής.

β) Ο τύπος αυτός δεν είναι λογικό αξίωμα, αφού δεν προκύπτει από κανένα αξιωματικό σχήμα. Ειδικότερα, δεν προκύπτει από το ΑΣ4, αφού η μεταβλητή x δεν είναι αντικαταστάσιμη από την y στον τύπο $\exists y Q(x,y)$.

γ) Ο τύπος είναι αξίωμα με βάση το σχήμα ΑΣ6, αφού είναι της μορφής $\varphi \to \forall x \varphi$, όπου φ είναι ο τύπος $P(y) \to \forall x P(x)$, στον οποίο η μεταβλητή x είναι δεσμευμένη.

δ) Ο τύπος αυτός δεν είναι αξίωμα, αφού δεν προκύπτει από κάποιο από τα σχήματα ΑΣ1– ΑΣ8. Ειδικότερα, δεν προκύπτει από το ΑΣ6, αφού η x εμφανίζεται ελεύθερη στον τύπο $P(x)$(που αντιστοιχεί στο φ).

ε) Ο τύπος είναι της μορφής $x \approx y \to (\varphi \leftrightarrow \varphi^*)$, όπου x, y είναι οι μεταβλητές (αντίστοιχα) x_2 και x_0, φ είναι ο ατομικός τύπος $P(x_2, f(x_5, x_2))$ και φ^* είναι ο τύπος $P(x_2, f(x_5, x_0))$, που προκύπτει από τον $P(x_2, f(x_5, x_2))$, αν αντικαταστήσουμε τη δεύτερη εμφάνιση της x_2 με τη x_0. Άρα ο τύπος είναι αξίωμα με βάση το ΑΣ8.

στ) Ο τύπος αυτός δεν προκύπτει από κάποιο σχήμα. Ειδικότερα, δεν προκύπτει με βάση το ΑΣ8, διότι η μεταβλητή που έχει αντικατασταθεί στον ατομικό τύπο $g(x_2) \approx g(x_3)$ (που αντιστοιχεί στο φ του σχήματος) είναι η x_2, δηλαδή η μεταβλητή που εμφανίζεται <u>δεύτερη</u> στον τύπο $x_1 \approx x_2$ (που αντιστοιχεί στο $x \approx y$ του σχήματος).

Αν όλες οι απαντήσεις σας ήταν σωστές, μπράβο, έχετε ξεκαθαρίσει ποιες μορφές τύπων οδηγούν σε λογικά αξιώματα. Αν όχι, ίσως σας έχει ξεφύγει κάποιος από τους περιορισμούς που αφορούν στα σχήματα ΑΣ4, ΑΣ6 και ΑΣ8. Ειδικά σε σχέση με το ΑΣ8, προσέξτε: μας δίνει τη δυνατότητα να αντικαθιστούμε μόνο τη μεταβλητή που εμφανίζεται πρώτη στον τύπο $x \approx y$. Βέβαια, επειδή η συμμετρικότητα του $\approx$ αποδεικνύεται στο ΚΛ (δες το Παράδειγμα 3.23), μπορούμε να αντικαθιστούμε και τη δεύτερη μεταβλητή, πρέπει όμως να αναφέρεται ρητά η εν λόγω ιδιότητα του $\approx$.

Άσκηση 3.9.

Με βάση το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \vdash_{K\Lambda} \forall x(\varphi \vee \psi).$$

Επειδή η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην υπόθεση (αφού είναι δεσμευμένη στον τύπο $\forall x\varphi$ και στον τύπο $\forall x\psi$), αρκεί, σύμφωνα με το Θεώρημα Γενίκευσης, να δείξουμε ότι

$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \vdash_{K\Lambda} \varphi \vee \psi.$$

Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash_{K\Lambda} \neg(\forall x\varphi \vee \forall x\psi).$$

Όμως, ο τύπος $\neg\forall x\varphi \wedge \neg\forall x\psi \to \neg(\forall x\varphi \vee \forall x\psi)$ είναι τυπικό θεώρημα, αφού προέρχεται από την ταυτολογία $\neg p \wedge \neg q \to \neg(p \vee q)$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg(\varphi \vee \psi) \vdash_{K\Lambda} \neg\forall x\varphi \wedge \neg\forall x\psi.$$

Ο τύπος $\neg\forall x\varphi \to (\neg\forall x\psi \to \neg\forall x\varphi \wedge \neg\forall x\psi)$ είναι επίσης τυπικό θεώρημα του ΚΛ. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash_{K\Lambda} \neg\forall x\varphi$ και $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash_{K\Lambda} \neg\forall x\psi$ ή, σύμφωνα με το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής, ότι

$$\forall x\varphi \vdash_{K\Lambda} \varphi \vee \psi \tag{3.39}$$

$$\text{και } \forall x\psi \vdash_{K\Lambda} \varphi \vee \psi. \tag{3.40}$$

Για την (3.39) κατασκευάζουμε την εξής τυπική απόδειξη:

1.	$\forall x\varphi$	υπόθεση
2.	$\forall x\varphi \to \varphi$	ΑΣ4
3.	φ	1, 2, MP
4.	$\varphi \to \varphi \vee \psi$	τυπικό θεώρημα
5.	$\varphi \vee \psi$	3, 4, MP

Με ακριβώς όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η (3.40).

Σχόλιο. Αν τα καταφέρατε, πολύ καλά, έχετε εξοικειωθεί τόσο με το Θεώρημα Γενίκευσης όσο και με τον τρόπο που χρησιμοποιείται η Πρόταση 3.2. Αν είχατε προβλήματα, μήπως ξεχάσατε ότι μπορούμε να εφαρμόζουμε τα θεωρήματα που αποδείξαμε για τον προτασιακό λογισμό;

Άσκηση 3.10.

Σκοπός	**Θεωρήματα**
$\vdash_{K\Lambda} \exists x(\varphi \vee \psi) \to \exists x\varphi \vee \exists x\psi$	Απαγωγής, Πόρισμα 3.1
$Q(x) \to \forall y R(y,y) \vdash_{K\Lambda} \forall y(Q(x) \to R(y,y))$	Γεν. Σταθερής, Απαγωγής
$\exists x\forall y P(x,y) \vdash_{K\Lambda} \forall y\exists x P(x,y)$	Γενίκευσης, Γεν. Σταθερής

Σχόλιο. Εδώ βέβαια υπάρχει αρκετή ελευθερία, σχετικά με τα θεωρήματα που θα εφαρμόσουμε, αλλά και με τη σειρά εφαρμογής τους. Αν σκεφτήκατε λοιπόν να εφαρμόσεις θεωρήματα διαφορετικά από αυτά που αναφέρονται, δε σημαίνει ότι κάνατε λάθος, απλά ακολουθήσατε μια διαφορετική κεντρική ιδέα για να φτάσετε στο ίδιο αποτέλεσμα. Παραδείγματος χάρη, για τη δεύτερη περίπτωση, η ιδέα ήταν ως εξής: Με βάση το Θεώρημα Γενίκευσης Σταθερών, αρκεί να δείξουμε ότι $Q(x) \to \forall y R(y,y) \vdash_{K\Lambda} Q(x) \to R(c,c)$, όπου c σύμβολο σταθερής που δεν εμφανίζεται σε στοιχείο του $\{Q(x) \to \forall y R(y,y), Q(x) \to R(y,y)\}$. Στη συνέχεια, με βάση το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι $\{Q(x) \to \forall y R(y,y),\ Q(x)\} \vdash_{K\Lambda} R(c,c)$. Εσείς όμως ίσως σκεφτήκατε ως εξής: Με βάση το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι $\exists y \neg(Q(x) \to R(y,y)) \vdash_{K\Lambda} \neg(Q(x) \to \forall y R(y,y))$. Στη συνέχεια, μπορεί να εφαρμόζεται το Πόρισμα 3.1 κτλ.

Άσκηση 3.11.

Έστω φ τύπος και x μεταβλητή που δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ. Με βάση την Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.5, αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi \models \forall x \varphi$. Θεωρούμε λοιπόν δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ τέτοιες που $\mathcal{A} \models \varphi[v]$. Από τον ορισμό του Tarski, έχουμε ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x \varphi, \text{ αν και μόνο αν } \text{ για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ ισχύει } \mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)].$$

Όμως οι αποτιμήσεις $v, v(x|a)$ συμφωνούν σε όλες τις μεταβλητές που διαφέρουν από τη x, οπότε, για τυχόν $a \in |\mathcal{A}|$, οι $v, v(x|a)$ συμφωνούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στο φ. Συνεπώς, με βάση τη Δραστηριότητα 3.1, για τυχόν $a \in |\mathcal{A}|$ έχουμε

$$\mathcal{A} \models \varphi[v], \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)].$$

Αφού $\mathcal{A} \models \varphi[v]$, έπεται ότι $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$, για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Σχόλιο. Δεν είχατε δυσκολία; Ωραία, έχετε κατανοήσει όχι μόνο τον ορισμό αλήθειας του Tarski, αλλά και το ρόλο που παίζουν οι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών σε τύπους. Αν όμως είχατε κάποια δυσκολία, μήπως δεν είχατε συνειδητοποιήσει τη σπουδαιότητα της Δραστηριότητας 3.1;

Σημείωση. Στην πραγματικότητα, αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, τότε $\varphi \equiv \forall x \varphi$. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να υποθέτουμε ότι οι ποσοδείκτες κάθε τύπου δεν είναι «πλασματικοί», δηλαδή οι μεταβλητές που είναι ποσοδειγμένες εμφανίζονται ελεύθερες στον τύπο.

Άσκηση 3.12.

α)⇒β) Έστω ότι ισχύει το α) και είναι σύνολο τύπων που είναι συνεπές αλλά όχι ικανοποιήσιμο. Τότε για τυχόντα τύπο φ ισχύει $\models \varphi$ και $\models \neg\varphi$. Άρα, λόγω του Θεωρήματος 3.10, $\vdash_{K\Lambda} \varphi$ και $\vdash_{K\Lambda} \neg\varphi$, οπότε το είναι αντιφατικό, πράγμα άτοπο.

β)⇒α) Έστω ότι ισχύει το β). Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή υπάρχει σύνολο τύπων T και τύπος φ τέτοια ώστε ισχύει $T \models \varphi$, αλλά δεν ισχύει $\vdash_{K\Lambda} \varphi$. Με βάση το Θεώρημα σε άτοπο απαγωγής, το σύνολο $T \cup \{\neg\varphi\}$ είναι συνεπές. Άρα, λόγω της υπόθεσης, το $T \cup \{\neg\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο, δηλαδή υπάρχει δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ που ικανοποιεί το $T \cup \{\neg\varphi\}$ στην $\mathcal{A}$. Αυτό όμως αντιφάσκει με την υπόθεσή μας ότι το T συνεπάγεται λογικά το φ.

Σχόλιο. Αν σας φάνηκε εύκολη, ωραία, έχετε εξοικειωθεί πολύ τόσο με έννοιες όπως «ικανοποιήσιμος» όσο και με βασικές ιδιότητές τους. Αν δυσκολευτήκατε, δεν πειράζει, ίσως πρέπει να σκεφτείτε πάλι την Παρατήρηση 3 αμέσως μετά τον Ορισμό 2.5, καθώς και το Θεώρημα 2.10.

Άσκηση 3.13.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του t.

α) Αν ο t είναι μεταβλητή, τότε το ζητούμενο ισχύει λόγω του ορισμού της αποτίμησης v.

β) Έστω ότι ο t είναι σύμβολο σταθερής c της Γ_1. Τότε $\overline{v}(c) = c^{\mathcal{A}^H} = c$, από τον ορισμό της δομής $\mathcal{A}^H$. Όμοια, αν ο t είναι νέο σύμβολο σταθερής d.

γ) Έστω ότι ο t είναι της μορφής $f(t_1, \ldots, t_n)$, όπου οι όροι $t_1, \ldots, t_n$ έχουν την ιδιότητα, δηλαδή $\overline{v}(t_i) = t_i$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Τότε

$$\begin{array}{rcll} \overline{v}(f(t_1,\ldots,t_n)) & = & f^{\mathcal{A}^H}(\overline{v}(t_1),\ldots,\overline{v}(t_n)) & (\text{ορισμός } \overline{v}) \\ & = & f^{\mathcal{A}^H}(t_1,\ldots,t_n) & (\text{επαγωγική υπόθεση}) \\ & = & f(t_1,\ldots,t_n) & (\text{ορισμός της } \mathcal{A}^H). \end{array}$$

Σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει λοιπόν το ζητούμενο.

Σχόλιο. Αν βρήκατε εύκολη την άσκηση, έχετε κατανοήσει τον ορισμό της δομής $\mathcal{A}^H$. Αν δυσκολευτήκατε, ίσως είχατε ξεχάσει πώς επεκτείνεται μια τυχούσα αποτίμηση στο σύνολο των όρων (Θεώρημα 3.2).

Άσκηση 3.14.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του προτασιακού τύπου φ.

α) Αν ο φ είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε το ζητούμενο ισχύει λόγω του ορισμού της αποτίμησης a.

β) Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$. Τότε

$$\begin{aligned} \overline{a}(\varphi) = A, \quad & \text{αν και μόνο αν} \quad \overline{a}(\psi) = \Psi && (\text{ρόλος } \neg) \\ & \text{αν και μόνο αν} \quad \psi \notin T_\infty && (\text{επαγωγική υπόθεση}) \\ & \text{αν και μόνο αν} \quad \varphi \in T_\infty && (T_\infty \text{ πλήρες}). \end{aligned}$$

γ) Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$. Τότε

$$\begin{aligned} \overline{a}(\psi \to \chi) = \Psi, \quad & \text{ανν} \quad \overline{a}(\psi) = A \text{ και } \overline{a}(\chi) = \Psi && (\text{ρόλος } \to) \\ & \text{ανν} \quad \psi \in T_\infty \text{ και } \chi \notin T_\infty && (\text{επαγωγική υπόθεση}). \end{aligned}$$

Όμως η σχέση «$\psi \in T_\infty$ και $\chi \notin T_\infty$» είναι ισοδύναμη με την «$\psi \to \chi \notin T_\infty$».

Πράγματι, έστω ότι $\psi \in T_\infty$ και $\chi \notin T_\infty$ και $\psi \to \chi \in T_\infty$. Τότε προφανώς $T_\infty \vdash \chi$, άρα $\chi \in T_\infty$, πράγμα άτοπο. Άρα, αν $\psi \in T_\infty$ και $\chi \notin T_\infty$, τότε $\psi \to \chi \notin T_\infty$.

Για το αντίστροφο, έστω ότι $\psi \to \chi \notin T_\infty$, οπότε $\neg(\psi \to \chi) \in T_\infty$. Όμως $\vdash \neg(\psi \to \chi) \to \psi$ και $\vdash \neg(\psi \to \chi) \to \neg\chi$, άρα $T_\infty \vdash \psi$ και $T_\infty \vdash \neg\chi$, οπότε $\psi \in T_\infty$ και $\neg\chi \in T_\infty$, δηλαδή $\psi \in T_\infty$ και $\chi \notin T_\infty$.

Συνεπώς ισχύει «$\overline{a}(\psi \to \chi) = \Psi$ αν και μόνο αν $\psi \to \chi \notin T_\infty$»
και άρα ισχύει «$\overline{a}(\psi \to \chi) = A$ αν και μόνο αν $\psi \to \chi \in T_\infty$».

Σχόλιο. Τα καταφέρατε; Ωραία, έχετε μάθει να εκμεταλλεύεστε την πληρότητα ενός συνόλου (προτασιακών) τύπων. Αν αντιμετωπίσατε δυσκολίες, μήπως οφείλονται στο ότι δεν χρησιμοποιήσατε το γεγονός ότι κάθε πλήρες σύνολο περιέχει τις τυπικές συνέπειές του;

Λύσεις Δραστηριοτήτων

Δραστηριότητα 3.1.

Η δραστηριότητα αυτή είναι ανάλογη της Δραστηριότητας 2.1. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ.

α) Έστω ότι ο φ είναι ατομικός τύπος, ας πούμε της μορφής $P(t_1, \ldots, t_n)$. Θεωρούμε δομή $\mathcal{A}$ για τη Γ_1 και αποτιμήσεις v_1, v_2 στην $\mathcal{A}$ που συμφωνούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στο φ, δηλαδή στις μεταβλητές που εμφανίζονται στο φ. Θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσον ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[v_1], \text{ ανν } \mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)[v_2],$$

δηλαδή ότι

$$< \overline{v_1}(t_1), \ldots, \overline{v_1}(t_n) > \in P^{\mathcal{A}}, \text{ ανν } < \overline{v_2}(t_1), \ldots, \overline{v_2}(t_n) > \in P^{\mathcal{A}}. \tag{3.41}$$

Οι v_1, v_2 συμφωνούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται στον όρο t_1, στον όρο t_2 κτλ. Άρα, λόγω του Λήμματος 3.1, ισχύουν $\overline{v_1}(t_1) = \overline{v_2}(t_1), \ldots, \overline{v_1}(t_n) = \overline{v_2}(t_n)$, οπότε ισχύει η (3.41) και συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.

Αν ο φ είναι της μορφής $t \approx s$, τότε το ζητούμενο έπεται όμοια.

β) Αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ ή $\psi \wedge \chi$ ή ..., το ζητούμενο έχει ουσιαστικά αποδειχθεί στα πλαίσια της Δραστηριότητας 2.1, αφού ο ορισμός του Tarski αντιμετωπίζει τους συνδέσμους όπως ακριβώς τους περιγράφουν οι πίνακες αλήθειας στην προτασιακή λογική.

γ) Έστω τώρα ότι ο φ είναι της μορφής $\forall x\psi$ και ο ψ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Θεωρούμε δομή $\mathcal{A}$ για τη Γ_1 και αποτιμήσεις v_1, v_2 στην $\mathcal{A}$ που συμφωνούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στο φ. Ο έλεγχος του κατά πόσο «$\mathcal{A} \models \forall x\psi[v_1]$, ανν $\mathcal{A} \models \forall x\psi[v_2]$» ισοδυναμεί με το να ελέγξουμε αν ισχύει

$$\begin{gathered}\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \psi[v_1(x|a)], \text{ ανν}\\ \text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \psi[v_2(x|a)].\end{gathered}$$

Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχήν ότι οι μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον ψ είναι όσες εμφανίζονται ελεύθερες στο φ και η x (αν ο ποσοδείκτης $\forall$ είναι γνήσιος). Έστω τώρα τυχόν $a \in |\mathcal{A}|$. Οι αποτιμήσεις $v_1(x|a), v_2(x|a)$ συμφωνούν στις πρώτες, αφού η $v_1(x|a)$ (αντίστοιχα $v_2(x|a)$) συμφωνεί με τη v_1 (αντίστοιχα

v_2) σ' αυτές, και προφανώς συμφωνούν στη x. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι $\mathcal{A} \models \psi[v_1(x|a)]$ ανν $\mathcal{A} \models \psi[v_2(x|a)]$. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A} \models \psi[v_1(x|a)]$, τότε έπεται ότι για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\mathcal{A} \models \psi[v_2(x|a)]$ και αντίστροφα. Συνεπώς ο τύπος $\forall x\psi$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

Δραστηριότητα 3.2.

Θεωρούμε τυχόντες τύπους φ, ψ και τυχούσα μεταβλητή x. Για το πρώτο μέρος, έχουμε να ελέγξουμε ότι για κάθε δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\mathcal{A} \models \forall x\varphi \vee \forall x\psi \to \forall x(\varphi \vee \psi)[v]$, δηλαδή

$$\text{αν } \mathcal{A} \models \forall x\varphi \vee \forall x\psi[v], \tag{3.42}$$

$$\text{τότε } \mathcal{A} \models \forall x(\varphi \vee \psi)[v]. \tag{3.43}$$

Η (3.42) ισοδυναμεί με $\mathcal{A} \models \forall x\varphi[v]$ ή $\mathcal{A} \models \forall x\psi[v]$, δηλαδή με

$$\left.\begin{array}{rl} & \text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)] \\ \text{ή} & \text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \psi[v(x|a)], \end{array}\right\} \tag{3.44}$$

ενώ η (3.43) ισοδυναμεί με

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \varphi[v] \text{ ή } \mathcal{A} \models \psi[v]. \tag{3.45}$$

Όμως ο τρόπος χειρισμού της έκφρασης «για κάθε» στα ελληνικά είναι τέτοιος ώστε να εξασφαλίζεται ότι, αν αληθεύει η (3.44), τότε αληθεύει η (3.45). Η ιδέα είναι ότι, για τυχόν σύνολο, αν κάθε στοιχείο του συνόλου έχει μια ιδιότητα Ι ή κάθε στοιχείο του συνόλου έχει μια ιδιότητα Κ, τότε κάθε στοιχείο του συνόλου έχει την ιδιότητα Ι ή την ιδιότητα Κ.

Για το δεύτερο μέρος, το ζητούμενο είναι ένα «αντιπαράδειγμα», δηλαδή μια δομή για την οποία αληθεύει η (3.45), αλλά δεν αληθεύει η (3.44). Θεωρούμε γλώσσα Γ_1 που περιέχει δύο μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P, Q, δομή $\mathcal{A}$ με σύμπαν το σύνολο με δύο στοιχεία $\{a_0, a_1\}$, ερμηνεία του συμβόλου P το σύνολο $\{a_0\}$ και ερμηνεία του Q το σύνολο $\{a_1\}$. Παίρνοντας ως φ τον τύπο $P(x)$ και ως ψ τον τύπο $Q(x)$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι αληθεύει η (3.45), ενώ δεν αληθεύει η (3.44).

Δραστηριότητα 3.3.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου η.

α) Έστω ότι ο τύπος η είναι ατομικός, ας πούμε της μορφής $P(t_1, \ldots, t_n)$. Θεωρούμε δομή $\mathcal{A}$ και αποτίμηση v στην $\mathcal{A}$ και ελέγχουμε κατά πόσον ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x P(t_1, \ldots, t_n)[v], \text{ ανν } \mathcal{A} \models \forall y (P(t_1, \ldots, t_n))^x_y[v]. \tag{3.46}$$

Όμως η αντικατάσταση της x από τη y στον τύπο $P(t_1, \ldots, t_n)$ ισοδυναμεί με αντικατάσταση σε καθένα από τους όρους $t_1, \ldots, t_n$. Δηλαδή η (3.46) γίνεται

$$\mathcal{A} \models \forall x P(t_1, \ldots, t_n)[v], \tag{3.47}$$

$$\text{αν και μόνο αν } \mathcal{A} \models \forall y P((t_1)^x_y, \ldots, (t_n)^x_y)[v]. \tag{3.48}$$

Η (3.47) ισοδυναμεί με

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } < \overline{v(x|a)}(t_1), \ldots, \overline{v(x|a)}(t_n) > \in P^{\mathcal{A}}, \tag{3.49}$$

ενώ η (3.48) ισοδυναμεί με

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } < \overline{v(y|a)}((t_1)^x_y), \ldots, \overline{v(x|a)}((t_n)^x_y) > \in P^{\mathcal{A}}. \tag{3.50}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.2, για τυχόν $a \in |\mathcal{A}|$ ισχύει $\overline{v(x|a)}(t_i) = \overline{v(y|a)}((t_i)^x_y)$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Άρα η (3.49) ισοδυναμεί με την (3.50) και συνεπώς ισχύει η ζητούμενη σχέση (3.46).

Η περίπτωση ο η να είναι της μορφής $t \approx s$ είναι όμοια.

β) Έστω τώρα ότι ο η είναι της μορφής $\neg\chi$, όπου ο χ έχει την ιδιότητα. Θέλουμε να ελέγξουμε αν ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x \neg\chi[v], \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{A} \models \forall y (\neg\chi)^x_y[v],$$

δηλαδή αν ισχύει ότι

$$\left.\begin{array}{l} \text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \neg\chi[v(x|a)], \text{ αν και μόνο αν} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models (\neg\chi)^x_y[v(y|a)]. \end{array}\right\} \tag{3.51}$$

Όμως $(\neg\chi)^x_y = \neg(\chi^x_y)$, άρα η (3.51) ισοδυναμεί με

$$\left.\begin{array}{l} \text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \not\models \chi[v(x|a)], \text{ αν και μόνο αν} \\ \text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \not\models \chi^x_y[v(y|a)]. \end{array}\right\} \tag{3.52}$$

Από την επαγωγική υπόθεση όμως έχουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l}\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \chi[v(x|a)], \text{ αν και μόνο αν}\\ \text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \chi^x_y[v(y|a)].\end{array}\right\} \tag{3.53}$$

Προφανώς η (3.52) έπεται από την (3.53), δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Η περίπτωση διθέσιου συνδέσμου είναι όμοια.

γ) Έστω, τέλος, ότι ο η είναι της μορφής $\forall z\chi$. Το ζητούμενο είναι αν ισχύει ή όχι ότι

$$\mathcal{A} \models \forall x \forall z \chi[v], \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{A} \models \forall y (\forall z \chi)^x_y[v]. \tag{3.54}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μεταβλητή z είναι διαφορετική από τη x – αλλιώς η x είναι δεσμευμένη στον τύπο $\forall z\chi$, οπότε $(\forall z\chi)^x_y = \forall z\chi$ και το ζητούμενο ισχύει προφανώς. Παρατηρώντας ότι ο τύπος $(\forall z\chi)^x_y$ είναι ίδιος με τον τύπο $\forall z(\chi^x_y)$, έχουμε ότι η (3.54) ισοδυναμεί με

$$\mathcal{A} \models \forall x \forall z \chi[v], \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{A} \models \forall y \forall z (\chi^x_y)[v],$$

δηλαδή, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο εναλλαγής ποσοδεικτών, με

$$\mathcal{A} \models \forall z \forall x \chi[v], \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{A} \models \forall z \forall y (\chi^x_y)[v],$$

που ισοδυναμεί με

$$\left.\begin{array}{l}\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \forall x\chi[v(z|a)], \text{ αν και μόνο αν}\\ \text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \forall y(\chi^x_y)[v(z|a)].\end{array}\right\} \tag{3.55}$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι για κάθε αποτίμηση v' ισχύει

$$\mathcal{A} \models \forall x\chi[v'], \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{A} \models \forall y(\chi^x_y)[v']. \tag{3.56}$$

Όμως για κάθε $a \in |\mathcal{A}|$ η αποτίμηση $v(z|a)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια αποτίμηση v'. Άρα η (3.56) συνεπάγεται τη (3.55), δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Δραστηριότητα 3.4.

Αποδεικνύουμε πρώτα ό,τι αναφέρεται στην υπόδειξη, δηλαδή ότι $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to (t \approx t^*)$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του t.

α) Έστω ότι ο t είναι μεταβλητή. Αν μεν ο t είναι η x, τότε ο t^* είναι η y και το ζητούμενο είναι $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to x \approx y$, το οποίο ισχύει (ουσιαστικά με βάση το

Παράδειγμα 2.14). Αν πάλι ο t είναι οποιαδήποτε μεταβλητή z διαφορετική από τη x, τότε ο t^* είναι ο ίδιος ο t και το ζητούμενο είναι ότι $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to z \approx z$. Όμως, ο τύπος $z \approx z$ είναι αξίωμα, άρα $\vdash_{K\Lambda} z \approx z$ και συνεπώς $x \approx y \vdash_{K\Lambda} z \approx z$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

β) Έστω ότι ο t είναι το σύμβολο σταθερής c. Τότε ο t^* είναι πάλι το c, οπότε το ζητούμενο είναι ότι $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to c \approx c$, το οποίο προκύπτει με χρήση του σχήματος ΑΣ7 (ουσιαστικά όπως στο α) παραπάνω).

γ) Έστω ότι ο t είναι της μορφής $f(t_1, \ldots, t_n)$, όπου οι όροι $t_1, \ldots, t_n$ έχουν την ιδιότητα. Έτσι, γνωρίζουμε ότι

$$\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to t_1 \approx t_1^*, \ \ldots, \ \vdash_{K\Lambda} x \approx y \to t_n \approx t_n^* \tag{3.57}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to f(t_1, \ldots, t_n) \approx (f(t_1, \ldots, t_n))^*$, δηλαδή

$$\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to f(t_1, \ldots, t_n) \approx f(t_1^*, \ldots, t_n^*). \tag{3.58}$$

Όπως για το Παράδειγμα 3.24, μπορούμε όμως να δείξουμε ότι

$$\vdash_{K\Lambda} t_1 \approx t_1^* \to (\ldots \to (t_n \approx t_n^* \to f(t_1, \ldots, t_n) \approx f(t_1^*, \ldots, t_n^*)) \ldots). \tag{3.59}$$

Από τις (3.57) έπεται ότι

$$x \approx y \vdash_{K\Lambda} t_1 \approx t_1^*, \ \ldots, \ x \approx y \vdash_{K\Lambda} t_n \approx t_n^*. \tag{3.60}$$

Εύκολα τώρα συμπεραίνουμε την (3.58) από τις (3.59) και (3.60). □

Ας έρθουμε τώρα στον κύριο στόχο μας, δηλαδή ότι

$$\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to (\varphi \leftrightarrow \varphi^*). \tag{3.61}$$

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου φ, υποθέτοντας ότι η x εμφανίζεται ελεύθερη σ' αυτόν – αλλιώς, ο φ^* είναι ο ίδιος με το φ και η (3.61) ισχύει προφανώς.

α) Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $P(t_1, \ldots, t_n)$. Το ζητούμενο είναι

$$\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to [P(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow (P(t_1, \ldots, t_n))^*],$$

δηλαδή

$$\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to (P(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow P(t_1^*, \ldots, t_n^*)). \tag{3.62}$$

Με βάση το πρώτο μέρος, έχουμε ότι

$$\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to t_1 \approx t_1^*, \ \ldots, \vdash_{K\Lambda} x \approx y \to t_n \approx t_n^*. \tag{3.63}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.63), μπορούμε να αποδείξουμε την (3.62) – δες και β) της Άσκησης 3.16.

Αν ο φ είναι της μορφής $t \approx s$, εργαζόμαστε παρόμοια.

β) Έστω ότι ο τύπος φ είναι της μορφής $\neg\psi$, όπου ο ψ έχει την ιδιότητα, δηλαδή ισχύει $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to (\psi \leftrightarrow \psi^*)$. Όμως, ο τύπος $(\psi \leftrightarrow \psi^*) \leftrightarrow (\neg\psi \leftrightarrow (\neg\psi)^*)$ είναι τυπικό θεώρημα του ΚΛ, αφού προέρχεται από ταυτολογία, και ο τύπος $(\neg\psi)^*$ είναι ο ίδιος με τον $\neg\psi^*$. Άρα, με συγκόλληση τυπικών αποδείξεων, προκύπτει ότι $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to (\varphi \leftrightarrow \varphi^*)$, δηλαδή το ζητούμενο.

γ) Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$, τότε εργαζόμαστε ουσιαστικά όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

δ) Έστω τέλος ότι ο φ είναι της μορφής $\forall z\psi$ (όμοια για $\exists z\psi$), όπου ο ψ έχει την ιδιότητα, δηλαδή ισχύει

$$\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to (\psi \leftrightarrow \psi^*). \tag{3.64}$$

Λόγω της αρχικής υπόθεσης ότι η x είναι αντικαταστάσιμη από την y στο φ, η μεταβλητή z είναι διαφορετική από την y. (Επίσης η z είναι διαφορετική από τη x, αφού υποθέσαμε ότι η x εμφανίζεται ελεύθερη στο φ.)

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι ο φ^* είναι ο τύπος $\forall z\psi^*$ (δηλαδή, ο $\forall z(\psi^*)$).

Λόγω της (3.64), ισχύουν οι $x \approx y \vdash_{K\Lambda} \psi \to \psi^*$ και $x \approx y \vdash_{K\Lambda} \psi^* \to \psi$. Άρα, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.14, προκύπτουν οι $x \approx y \vdash_{K\Lambda} \forall z\psi \to \forall z\psi^*$ και $x \approx y \vdash_{K\Lambda} \forall z\psi^* \to \forall z\psi$, από τις οποίες έπεται ότι $x \approx y \vdash_{K\Lambda} \forall z\psi \leftrightarrow \forall z\psi^*$. Άρα, λόγω του Θεωρήματος Απαγωγής, συμπεραίνουμε ότι $\vdash_{K\Lambda} x \approx y \to (\forall z\psi \leftrightarrow \forall z\psi^*)$, δηλαδή το ζητούμενο.

Σχόλιο. Αν καλύψατε σωστά όλες τις περιπτώσεις, συγχαρητήρια, αυτό δείχνει ότι έχετε άνεση στη χρήση αρκετών τεχνικών που έχουμε εισαγάγει. Αν συναντήσατε δυσκολίες, μην απογοητεύεστε, ήταν μια πράγματι απαιτητική δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 3.5.

1) Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του s. Η απόδειξη είναι παρό-

μοια με εκείνη του Λήμματος 3.2 – το γεγονός ότι εδώ αντικαθιστούμε τη μεταβλητή x με όρο, αντί να την αντικαταστήσουμε με άλλη μεταβλητή, δεν επηρεάζει ουσιαστικά τη διαδικασία.

2) Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου φ.

α) Έστω ότι ο φ είναι ατομικός, ας πούμε της μορφής $s \approx r$, όπου s, r είναι όροι. Τότε

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{A} \models \varphi^x_t[v], & \text{ανν} & \mathcal{A} \models (s \approx r)^x_t[v] & \\
& \text{ανν} & \mathcal{A} \models s^x_t \approx r^x_t[v] & \text{(διαδικασία αντικατάστασης)} \\
& \text{ανν} & \overline{v}(s^x_t) = \overline{v}(r^x_t) & \text{(ορισμός Tarski)} \\
& \text{ανν} & \overline{v(x|\overline{v}(t))}(s) = \overline{v(x|\overline{v}(t))}(r) & \text{(μέρος 1 της Δραστηριότητας)} \\
& \text{ανν} & \mathcal{A} \models s \approx r[v(x|\overline{v}(t))] & \text{(ορισμός Tarski)} \\
& \text{ανν} & \mathcal{A} \models \varphi[v(x|\overline{v}(t))]. &
\end{array}$$

Όμοια δουλεύουμε αν ο φ είναι της μορφής $P(s_1, \ldots, s_n)$.

β) Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$, όπου ο ψ έχει την ιδιότητα. Τότε, με βάση τον ορισμό του Tarski, έχουμε

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{A} \models \varphi^x_t[v], & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models (\neg\psi)^x_t[v] & \\
& \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models \neg\psi^x_t[v] & \text{(διαδικασία αντικατάστασης)} \\
& \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \not\models \psi^x_t[v] & \text{(ορισμός Tarski)} \\
& \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \not\models \psi[v(x|\overline{v}(t))] & \text{(επαγωγική υπόθεση)} \\
& \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models \neg\psi[v(x|\overline{v}(t))] & \text{(ορισμός Tarski)} \\
& \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A} \models \varphi[v(x|\overline{v}(t))]. &
\end{array}$$

Όμοια δουλεύουμε αν ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$, όπου οι ψ, χ έχουν την ιδιότητα.

γ) Έστω τώρα ότι ο φ είναι της μορφής $\forall y\psi$ και όλοι οι τύποι μικρότερης πολυπλοκότητας έχουν την ιδιότητα – προσοχή, εδώ πρέπει να θυμηθείτε τη σημείωση 2 μετά το Θεώρημα 3.1. Τότε

$$\left.\begin{array}{l}
\mathcal{A} \models \varphi^x_t[v], \text{ ανν } \mathcal{A} \models (\forall y\psi)^x_t[v], \text{ ανν } \mathcal{A} \models \forall y(\psi^x_t)[v], \\
\text{ανν για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \psi^x_t[v(y|a)].
\end{array}\right\} \tag{3.65}$$

Ο τύπος ψ_t^x έχει μικρότερη πολυπλοκότητα από το φ, άρα έχει την ιδιότητα, δηλαδή για κάθε αποτίμηση v'

$$\mathcal{A} \models \psi_t^x[v'], \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{A} \models \psi[v'(x|\overline{v'}(t))].$$

Συνεπώς, θεωρώντας την αποτίμηση $v(y|a)$ ως v', έχουμε ότι η (3.65) ισοδυναμεί με

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \psi[v(y|a)(x|\overline{v(y|a)}(t))]. \tag{3.66}$$

Επειδή όμως η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται στον t, η τιμή του t δεν εξαρτάται από την τιμή της y, άρα $\overline{v(y|a)}(t) = \overline{v}(t)$. Συνεπώς η (3.66) γίνεται

$$\text{για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \psi[v(y|a)(x|\overline{v}(t))]$$

$$\text{ή για κάθε } a \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A} \models \psi[v(x|\overline{v}(t))(y|a)], \tag{3.67}$$

αφού δεν παίζει ρόλο με ποια σειρά αλλάζουμε τις τιμές που η v δίνει στις μεταβλητές x, y. Όμως, με βάση τον ορισμό του Tarski, η (3.67) ισοδυναμεί με $\mathcal{A} \models \forall y \psi[v(x|\overline{v}(t))]$, δηλαδή με $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|\overline{v}(t))]$, που είναι το ζητούμενο. Έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγική απόδειξη.

Δραστηριότητα 3.6.

Έστω ότι το T_∞ είναι αντιφατικό. Τότε υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ για το οποίο το T_m είναι αντιφατικό (θυμήσου την Παρατήρηση 3 μετά τον Ορισμό 2.10). Θεωρούμε το ελάχιστο τέτοιο m, το οποίο ισούται με $n+1$, για κάποιο $n \in \mathbf{N}$ (αφού το $_0$ είναι συνεπές). Επειδή το σύνολο $T_n \cup \{\exists y_n \varphi_n \to (\varphi_n)_{d_{k_n}}^{y_n}\}$ είναι αντιφατικό, λόγω του θεωρήματος απαγωγής σε άτοπο, ισχύει

$$T_n \vdash_{K\Lambda} \neg(\exists y_n \varphi_n \to (\varphi_n)_{d_{k_n}}^{y_n}).$$

Όμως $\vdash_{K\Lambda} \neg(\varphi \to \psi) \to \varphi$ και $\vdash_{K\Lambda} \neg(\varphi \to \psi) \to \neg\psi$ για τυχόντες τύπους φ, ψ (λόγω της Πρότασης 3.2). Άρα

$$T_n \vdash_{K\Lambda} \exists y_n \varphi_n \tag{3.68}$$

$$\text{και } T_n \vdash_{K\Lambda} \neg(\varphi_n)_{d_{k_n}}^{y_n}. \tag{3.69}$$

Η επιλογή του συμβόλου σταθερής d_{k_n} είναι τέτοια που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε, από την (3.69), με βάση την Πρόταση 3.3, ότι

$$T_n \vdash_{K\Lambda} \forall y_n \neg \varphi_n. \tag{3.70}$$

Από τις (3.68) και (3.70) όμως έπεται ότι το T_n είναι αντιφατικό, πράγμα που δε συμβιβάζεται με την επιλογή του n.

Δραστηριότητα 3.7.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ.

α) Έστω ότι ο φ είναι ατομικός, δηλαδή τύπος της μορφής $P(t_1, \ldots, t_n)$ (θυμήσου ότι το $\approx$ δεν είναι σύμβολο της γλώσσας). Τότε

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}^H \models P(t_1, \ldots, t_n)[v], & \text{ανν} & <\overline{v}(t_1), \ldots, \overline{v}(t_n)> \in P^{\mathcal{A}^H} \\ & & \text{(ορισμός 3.7)} \\ & \text{ανν} & <t_1, \ldots, t_n> \in P^{\mathcal{A}^H} \\ & & \text{(Άσκηση αυτ. 3.13)} \\ & \text{ανν} & P(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma \\ & & \text{(ορισμός } \mathcal{A}^H). \end{array}$$

β) Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$, όπου ο ψ έχει την ιδιότητα. Τότε

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A}^H \models \neg\psi[v], & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{A}^H \not\models \psi[v] & \text{(ορισμός Tarski)} \\ & \text{αν και μόνο αν} & \psi \notin \Sigma & \text{(επαγωγική υπόθεση)} \\ & \text{αν και μόνο αν} & \neg\psi \in \Sigma & \text{(πληρότητα του } \Sigma). \end{array}$$

Όμοια αν ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$, όπου οι ψ, χ έχουν την ιδιότητα.

γ) Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ο φ είναι της μορφής $\forall y\psi$, όπου κάθε τύπος μικρότερης πολυπλοκότητας έχει την ιδιότητα. Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι

$$\mathcal{A}^H \models \forall y\psi[v] \ \text{ αν και μόνο αν } \ \forall y\psi \in \Sigma.$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι αν $\mathcal{A}^H \models \forall y\psi[v]$, τότε $\forall y\psi \in \Sigma$ – στην απόδειξη αυτή θα γίνει σαφής ο ρόλος των σταθερών Henkin.

Έστω λοιπόν ότι $\mathcal{A}^H \models \forall y\psi[v]$, αλλά $\forall y\psi \notin \Sigma$. Τότε

$$\text{για κάθε } t \in |\mathcal{A}| \text{ είναι } \mathcal{A}^H \models \psi[v(y|t)] \tag{3.71}$$

και $\neg\forall y\psi \in \Sigma$. Όμως $\vdash_{K\Lambda} \neg\forall y\psi \leftrightarrow \neg\forall y\neg\neg\psi$, με βάση το γεγονός ότι $\vdash_{K\Lambda}$ $\psi \leftrightarrow \neg\neg\psi$ και την Άσκηση 3.14. Άρα, επειδή το Σ έχει την ιδιότητα (3.31), ισχύει $\neg\forall y\neg\neg\psi \in \Sigma$. Συνεπώς, για το νέο σύμβολο σταθερής d για το οποίο ο τύπος $\neg\forall y\neg\neg\psi \rightarrow \neg\psi^y_d$ ανήκει στο Σ, ισχύει $\neg\psi^y_d \in \Sigma$, οπότε $\psi^y_d \notin \Sigma$. Όμως, ο τύπος ψ^y_d είναι μικρότερης πολυπλοκότητας από το φ, άρα θα ισχύει $\mathcal{A}^H \not\models \psi^y_d[v]$ (λόγω της επαγωγικής υπόθεσης). Άρα, λόγω του Λήμματος 3.4 (προφανώς η y είναι αντικαταστάσιμη από το d στον τύπο ψ), ισχύει $\mathcal{A}^H \not\models \psi[v(y|\overline{v}(d))]$, δηλαδή, με βάση την Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 3.13, ισχύει:

$$\mathcal{A}^H \not\models \psi[v(y|d)]. \tag{3.72}$$

Η (3.72) προφανώς αντιφάσκει με την (3.71), συνεπώς ισχύει το ζητούμενο.

Τώρα θ' αποδείξουμε το αντίστροφο, δηλαδή ότι αν $\forall y\psi \in \Sigma$, τότε $\mathcal{A}^H \models \forall y\psi[v]$.

Έστω λοιπόν ότι $\forall y\psi \in \Sigma$. Θα δείξουμε ότι ισχύει $\mathcal{A}^H \models \forall y\psi[v]$ ή, ισοδύναμα, λόγω του ορισμού του Tarski, ότι

$$\text{για κάθε } t \in O(\Gamma_1^H) \text{ είναι } \mathcal{A}^H \models \psi[v(y|t)].$$

Θεωρούμε τυχόντα όρο t της Γ_1^H. Επειδή θα απαιτηθεί χρήση του ΑΣ4 για τον τύπο ψ, τη μεταβλητή y και τον όρο t, πρέπει να ισχύει ο περιορισμός της αντικαταστασιμότητας της y από τον t. Αυτό εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 3.8. Θεωρούμε δηλαδή τύπο $\hat{\psi}$ για τον οποίο

$$\vdash_{K\Lambda} \psi \leftrightarrow \hat{\psi} \;\text{ και }\; \text{η } y \text{ είναι αντικαταστάσιμη από τον } t \text{ στον } \hat{\psi}.$$

Παρατηρούμε ότι με βάση την Άσκηση 3.14, ισχύει $\vdash_{K\Lambda} \forall y\psi \leftrightarrow \forall y\hat{\psi}$. Αφού $\forall y\psi \in \Sigma$, λόγω της ιδιότητας (3.31) του Σ, ισχύει $\forall y\hat{\psi} \in \Sigma$. Όμως ο τύπος $\forall y\hat{\psi} \rightarrow \hat{\psi}^y_t$ είναι αξίωμα, άρα $\vdash_{K\Lambda} \forall y\hat{\psi} \rightarrow \hat{\psi}^y_t$ και συνεπώς, πάλι λόγω της (3.31), $\forall y\hat{\psi} \rightarrow \hat{\psi}^y_t \in \Sigma$. Τότε όμως $\Sigma \vdash_{K\Lambda} \hat{\psi}^y_t$ και άρα $\hat{\psi}^y_t \in \Sigma$. Ο τύπος $\hat{\psi}^y_t$ έχει μικρότερη πολυπλοκότητα από το φ, άρα, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ισχύει $\mathcal{A}^H \models \hat{\psi}^y_t[v]$ και συνεπώς, λόγω του Λήμματος 3.4, $\mathcal{A}^H \models \hat{\psi}[v(y|\overline{v}(t))]$, δηλαδή $\mathcal{A}^H \models \hat{\psi}[v(y|t)]$. Αφού $\vdash_{K\Lambda} \psi \leftrightarrow \hat{\psi}$, θα ισχύει και $\mathcal{A}^H \models \psi[v(y|t)]$, δηλαδή το ζητούμενο.

Ασκήσεις Ανακεφαλαίωσης

Άσκηση 3.1. Βρείτε τα δενδροδιαγράμματα των τύπων

$$\exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2) \to \forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2), \ \ [(\forall x(\varphi \to \psi) \wedge \exists x \varphi) \to \exists x \psi].$$

Άσκηση 3.2. Ποιοι τύποι μετά την απαλοιφή των παρενθέσεων γράφονται

$$\forall x_1 Q(x_1) \wedge P(x_1, x_2) \to \exists x_2 \neg P(x_1, x_2),$$
$$\neg \exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2) \vee \forall x_1 Q(x_1) \leftrightarrow Q(x_2);$$

Άσκηση 3.3. α) Βρείτε τύπους της $\Gamma_1^{\theta\sigma}$ που αντιστοιχούν στις προτάσεις: «Υπάρχει ένα σύνολο, που δεν έχει στοιχεία», «Κάθε σύνολο είναι στοιχείο ενός συνόλου».
β) Βρείτε τύπους της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ που αντιστοιχούν στις προτάσεις: «Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός, που δεν είναι ο επόμενος κανενός φυσικού αριθμού», «Δύο τυχόντες φυσικοί αριθμοί έχουν γινόμενο διαφορετικό από το άθροισμά τους».

Άσκηση 3.4. Έστω v αποτίμηση στη δομή $\mathcal{N}^*$ για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ (Παράδειγμα 3.4(iv)) για την οποία $v(x_1) = -3$, $v(x_2) = -4$ και $v(x_3) = 0$.

α) Προσδιορίστε τις τιμές των ακόλουθων όρων για την v στην $\mathcal{N}^*$:

$$(x_1' \oplus x_2'')' \oplus (x_1 \otimes x_3), \ \ x_2 \otimes (x_1 \oplus (x_3'' \otimes \mathbf{0})).$$

β) Ποιοι από τους ακόλουθους τύπους αληθεύουν για τη v στην $\mathcal{N}^*$;

$$\exists x_1 \ \mathbf{0}'' \otimes x_1 \approx x_2, \ \ \forall x_1 \ x_1 \not\approx \mathbf{0} \to x_3 \approx x_2.$$

Άσκηση 3.5. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ είναι αληθείς στη δομή $\mathcal{N}$;

$$\exists x_1 \ x_1 \oplus x_1 \approx \mathbf{0}, \ \ \forall x_1 \ x_1 \approx x_1 \vee \exists x_0 \ x_0 \not\approx x_0,$$
$$\forall x_1 \ x_1 \not\approx x_1 \to \forall x_1 \forall x_2 \ x_1 \oplus x_2 \approx x_2 \oplus x_1.$$

Άσκηση 3.6. Έστω $\Sigma \subseteq T(\Gamma_1)$ και $\mathcal{A}$ δομή για τη Γ_1. Είναι αλήθεια ότι, αν κάθε στοιχείο του Σ είναι ικανοποιήσιμο στην $\mathcal{A}$, τότε και το Σ είναι ικανοποιήσιμο στην $\mathcal{A}$;

Άσκηση 3.7. Έστω Γ_1^δ η γλώσσα της θεωρίας διάταξης, δηλαδή η πρωτοβάθμια γλώσσα με μόνο μη λογικό σύμβολο το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $\prec$. Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ οι δομές για τη Γ_1^δ που ορίζονται ως εξής:

$$|\mathcal{A}| = \mathbf{N},\ |\mathcal{B}| = \mathbf{Z},\ |\mathcal{C}| = \mathbf{Q} \text{ και } \prec^{\mathcal{A}} = <^{\mathbf{N}},\ \prec^{\mathcal{B}} = <^{\mathbf{Z}},\ \prec^{\mathcal{C}} = <^{\mathbf{Q}}.$$

Βρείτε προτάσεις φ, ψ της Γ_1^δ τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} &\text{α) } \mathcal{B} \models \varphi \ \text{ και } \ \mathcal{A} \models \neg\varphi \\ &\text{β) } \mathcal{C} \models \psi \ \text{ και } \ \mathcal{B} \models \neg\psi. \end{aligned}$$

Άσκηση 3.8. Δείξτε ότι για κάθε διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P και οποιεσδήποτε μεταβλητές x, y

$$\begin{aligned} &\text{α) } \exists x \forall y P(x,y) \models \forall y \exists x P(x,y) \\ &\text{β) } \forall y \exists x P(x,y) \not\models \exists x \forall y P(x,y). \end{aligned}$$

Άσκηση 3.9. α) Δείξτε ότι για τυχόντες τύπους φ, ψ και οποιαδήποτε μεταβλητή x ισχύει $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$.
β) Βρείτε τύπους φ, ψ και μεταβλητή x για τα οποία ισχύει $\not\models \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

Άσκηση 3.10. Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε τύπους φ, ψ και μεταβλητή x, αν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ, τότε $\models (\forall x\psi \to \varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$.

Άσκηση 3.11. Αποδείξτε το νόμο αντικατάστασης της κατηγορηματικής λογικής, δηλαδή ότι για τυχόντες τύπους φ, ψ, χ, αν ο χ είναι υποτύπος του φ τέτοιος που $\chi \equiv \psi$ και δεν υπάρχει μεταβλητή που εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ, ενώ είναι δεσμευμένη στο φ, τότε $\varphi \equiv \varphi[\chi/\psi]$.

Άσκηση 3.12. Έστω $\Pi \subseteq \Pi(\Gamma_1)$ τέτοιο που για κάθε $\varphi \in \Pi(\Gamma_1)$ έχουμε $\Pi \models \varphi$ ή $\Pi \models \neg\varphi$. Έστω επίσης $\mathcal{A}$ ένα μοντέλο του Π. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varphi \in \Pi(\Gamma_1)$ ισχύει

$$\mathcal{A} \models \varphi, \text{ αν και μόνο αν } \Pi \models \varphi.$$

Άσκηση 3.13. Βρείτε τύπους σε κανονική ποσοδεικτική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμοι με τους

$$\forall x(P(x) \to x \approx y) \to (\exists z P(z) \to \exists u z \approx u),$$
$$\exists x x \approx y \to (P(x) \to \neg \exists z x \approx z).$$

Άσκηση 3.14. Δείξτε ότι για κάθε σύνολο τύπων T, τυχόντες τύπους φ, ψ και οποιαδήποτε μεταβλητή x, με την προυπόθεση ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κάποιο στοιχείο του T, ισχύει

$$\text{αν } T \vdash \varphi \to \psi, \text{ τότε } T \vdash \forall x \varphi \to \forall x \psi.$$

Άσκηση 3.15. Δείξτε ότι για τυχόντα μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα P, Q

$$\{Q(x), \forall y(Q(y) \to \forall z P(z))\} \vdash \forall x P(x).$$

Άσκηση 3.16. Αποδείξτε ότι για οποιεσδήποτε μεταβλητές x, y, z, u
α) $\vdash \forall x \forall y \forall z(x \approx y \to (y \approx z \to x \approx z))$
β) $\vdash \forall x \forall y \forall z \forall u[x \approx z \to (y \approx u \to (P(x, y) \leftrightarrow P(z, u))]$.

Άσκηση 3.17. Αποδείξτε το Θεώρημα Γενίκευσης Σταθερής (Θεώρημα 3.7).

Άσκηση 3.18. Δείξτε με παράδειγμα ότι η συνθήκη που υπάρχει στο Θεώρημα 3.7 για το σύμβολο σταθερής c είναι απαραίτητη.

Άσκηση 3.19. Έστω φ τύπος και x, y μεταβλητές. Δείξτε τα εξής:

α) Δεν ισχύει πάντα ότι ο τύπος $(\varphi_y^x)_x^y$ ταυτίζεται με το φ.

β) Αν η y δεν εμφανίζεται καθόλου στο φ, τότε η y είναι αντικαταστάσιμη από τη x στο φ_y^x και ο $(\varphi_y^x)_x^y$ ταυτίζεται με το φ.

Άσκηση 3.20. Αποδείξτε το Πόρισμα 3.1.

Άσκηση 3.21. Δείξτε ότι ο τύπος του Παραδείγματος 3.26 είναι τυπικό θεώρημα, χωρίς να χρησιμοποιήσετε το Πόρισμα 3.1.

Άσκηση 3.22. Δείξτε ότι για τυχόν διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P έχουμε

$$\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \forall x P(y,x).$$

Άσκηση 3.23. Αποδείξτε το Θεώρημα 3.8.

Άσκηση 3.24. Έστω δομή $\mathcal{A}$, v αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ και x, y τυχούσες μεταβλητές. Δείξτε τα εξής:

α) Για οποιονδήποτε όρο t, $\mathcal{A} \models x \approx y \to t \approx t^*[v]$, όπου t^* είναι όρος που παίρνουμε από τον t αντικαθιστώντας τη x με την y σε μερικές ή όλες τις εμφανίσεις της.

β) Για κάθε ατομικό τύπο φ ισχύει $\mathcal{A} \models x \approx y \to (\varphi \leftrightarrow \varphi^*)[v]$.

Άσκηση 3.25. Αποδείξτε το Θεώρημα 3.11.

Άσκηση 3.26. Δείξτε ότι, αν η Γ_1 έχει αριθμήσιμο πλήθος συμβόλων, τότε το σύνολο των τύπων της Γ_1 είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 3.27. Έστω Γ_1, Γ_1' πρωτοβάθμιες γλώσσες τέτοιες ώστε κάθε σύμβολο της Γ_1 είναι σύμβολο της Γ_1'. Δείξτε ότι για τυχούσα δομή $\mathcal{A}'$ για τη Γ_1' και τυχούσα αποτίμηση v στην $\mathcal{A}'$ ισχύει ότι για κάθε τύπο φ της Γ_1

$$\mathcal{A}' \models \varphi[v], \text{ αν και μόνο αν } \mathcal{A} \models \varphi[v],$$

όπου $\mathcal{A}$ είναι ο περιορισμός στη Γ_1 της δομής $\mathcal{A}'$, δηλαδή η δομή που παίρνουμε από την $\mathcal{A}'$ παραλείποντας τις ερμηνείες των συμβόλων της Γ_1' που δεν είναι σύμβολα της Γ_1.

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Μητακίδης: *Από τη Λογική στο Λογικό Προγραμματισμό και την Prolog*, Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1992.

[2] Μ. Μπόριτσιτς: *Λογική και Απόδειξη*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1995.

[3] Α. Τζουβάρας: *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής*, Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1987.

[4] H. D. Ebbinghaus, J. Flum & W. Thomas: *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[5] H. B. Enderton: *A mathematical introduction to logic*, Academic Press, New York, 1972.

[6] J. H. Gallier: *Logic for Computer Science*, J. Wiley & Sons, New York, 1987.

[7] E. Mendelson: *Introduction to Mathematical Logic*, Wadsworth & Brooks/Cole, Belmont, California, 1987.

Επίλογος

Χωρίς αμφιβολία, υπάρχουν κάποια θέματα που δεν καλύφθηκαν στο παρόν εγχειρίδιο, αν και συχνά θεωρούνται ως βασικά θέματα Μαθηματικής Λογικής, μεταξύ των οποίων είναι τα εξής:

α) λογισμός συνάψεων Gentzen (Gentzen sequent calculus)

β) μέθοδος επίλυσης (resolution)

γ) πρώτο θεώρημα μη πληρότητας του Goedel.

Για τα α), β), που αφορούν εναλλακτικές προσεγγίσεις της έννοιας της συντακτικής συνεπαγωγής, μπορείς να βρεις αναλυτικές παρουσιάσεις στα 1), 2) της βιβλιογραφίας.

Το αποτέλεσμα που αναφέρεται στο γ) θεωρείται σημαντικότατο, αφού λέει ότι υπάρχει διάκριση ανάμεσα στην αλήθεια και στη συντακτική συνεπαγωγή. Παραδείγματος χάρη, (υποθέτοντας ότι το P είναι συνεπές) το σύνολο των προτάσεων που αληθεύουν στη συνήθη δομή $\mathcal{N}$ (δες Παράδειγμα 3.4(iii)) δεν ταυτίζεται με το σύνολο των προτάσεων που αποδεικνύονται τυπικά στο σύστημα $\mathrm{K}\Lambda^P$ (δες συζήτηση μετά το Παράδειγμα 3.18), δηλαδή υπάρχει μια πρόταση φ_G της $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{N} \models \varphi_G, \text{ αλλά } \nvdash_{K\Lambda^P} \varphi_G \text{ (ή, ισοδύναμα, } P \nvdash_{K\Lambda} \varphi_G).$$

Κατά συνέπεια, παρόλο που η αλήθεια συνδέεται με την αποδειξιμότητα, με την έννοια των Θεωρημάτων 3.9 και 3.10, η αλήθεια δε μπορεί να αναχθεί πλήρως στην αποδειξιμότητα. Μ' άλλα λόγια, επειδή η αποδειξιμότητα από δοθέν σύνολο υποθέσεων οδηγεί σε «αναδρομικά απαριθμήσιμο» σύνολο (δες συζήτηση στο τέλος της ενότητας 3.5), η αλήθεια (για τη δομή $\mathcal{N}$) δεν μπορεί να είναι «μηχανική», δηλαδή να αναχθεί στη μηχανική διαδικασία τυπικής απόδειξης. Αναλυτικές παρουσιάσεις του θεωρήματος αυτού μπορείς να βρεις στα 3), 5) και 7) της βιβλιογραφίας.

Υποδείξεις για τη Λύση των Ασκήσεων Ανακεφαλαίωσης

Κεφάλαιο 2

Άσκηση 2.1.

Εφαρμόζοντας τον αναδρομικό ορισμό της f, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&f(((p_1 \to p_2) \wedge ((\neg p_2) \to p_0))) = \\
&f((p_1 \to p_2)) + f(((\neg p_2) \to p_0)) + 1 = \\
&(f(p_1) + f(p_2) + 1) + (f((\neg p_2)) + f(p_0) + 1) + 1 = \\
&(f(p_1) + f(p_2) + 1) + ((f(p_2) + 1) + f(p_0) + 1) + 1 = \\
&(0 + 0 + 1) + ((0 + 1) + 0 + 1) + 1 = 4.
\end{aligned}
$$

Όμοια υπολογίζουμε ότι $g(((p_1 \vee (p_2 \to p_3)) \wedge (\neg p_3))) = 3$.

β) Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ. Αν ο φ είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε $f(\varphi) = 0 \leq 0 = g(\varphi)$. Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ και $f(\psi) \leq g(\psi)$. Τότε $f(\varphi) = f(\psi) + 1 \leq g(\psi) + 1 = g(\varphi)$.

Τέλος, έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\psi \vee \chi$, όπου οι ψ, χ έχουν την ιδιότητα, δηλαδή ισχύουν οι $f(\psi) \leq g(\psi)$ και $f(\chi) \leq g(\chi)$. Τότε

$$f(\varphi) = f(\psi) + f(\chi) + 1 \leq max(f(\psi), f(\chi)) + 1 \leq max(g(\psi), g(\chi)) + 1 = g(\varphi).$$

Άσκηση 2.2.

α) Αρκεί να δειχθεί ότι για οποιεσδήποτε αποδεκτές συναρτήσεις $b_1 : T_1 \to \{A, \Psi\}$ και $b_2 : T_2 \to \{A, \Psi\}$, οι b_1, b_2 συμφωνούν στα κοινά στοιχεία των ${}_1, {}_2$. Όμως, με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του προτασιακού τύπου φ, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε φ που ανήκει και στο πεδίο ορισμού της b_1 και στο πεδίο ορισμού της b_2 ισχύει $b_1(\varphi) = b_2(\varphi)$. Αυτό εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι οι b_1, b_2 συμφωνούν στις προτασιακές μεταβλητές και ακολουθούν τους κανόνες (*) του Θεωρήματος 2.4.

β) Έστω ότι υπάρχει προτασιακός τύπος που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\overline{a}$. Τότε υπάρχει τέτοιος με ελάχιστη πολυπλοκότητα και έστω φ ένας από αυτούς. Ο φ δεν μπορεί να είναι προτασιακή μεταβλητή, άρα είναι της μορφής $\neg\psi$ ή $\psi \wedge \chi$ ή ... Ας υποθέσουμε ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$. Τότε ο ψ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\overline{a}$, δηλαδή στο πεδίο ορισμού κάποιας αποδεκτής συνάρτησης b με πεδίο ορισμού . Ορίζουμε τη συνάρτηση $b' : T \cup \{\neg\psi\} \to \{A, \Psi\}$, όπου $b' \lceil T = b$ και $b'(\neg\psi) = F_\neg(b(\psi))$. Τότε η b' είναι αποδεκτή και ο $\neg\psi$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της, οπότε ο $\neg\psi$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\overline{a}$, που είναι άτοπο.

γ) Αφού κάθε αποδεκτή συνάρτηση είναι επέκταση της a, η $\overline{a}$ είναι και αυτή επέκταση της a. Έστω τώρα φ τυχών τύπος και b τυχούσα αποδεκτή συνάρτηση τέτοια ώστε ο $\neg\varphi$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της b. (Με βάση το α) παραπάνω, οποιαδήποτε τέτοια αποδεκτή συνάρτηση είναι εξίσου καλή.) Τότε

$$\overline{a}(\neg\varphi) = b(\neg\varphi) = F_\neg(b(\varphi)) = F_\neg(\overline{a}(\varphi)).$$

Όμοια δείχνουμε ότι ισχύουν όλες οι υπόλοιπες από τις σχέσεις (*).

δ) Έστω $\hat{a} : T(\Gamma_0) \to \{A, \Psi\}$ αποδεκτή συνάρτηση. Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ, δείχνουμε ότι για κάθε προτασιακό τύπο φ ισχύει $\overline{a}(\varphi) = \hat{a}(\varphi)$. Συνεπώς, η $\overline{a}$ ταυτίζεται με την $\hat{a}$.

Άσκηση 2.3.

α) Από τον ορισμό της ταυτολογικής συνεπαγωγής, ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi, \quad & \text{ανν} \quad \text{για κάθε αποτίμηση } a, \text{ αν η } a \text{ ικανοποιεί} \\ & \qquad \text{το } \Sigma \cup \{\varphi\}, \text{ τότε η } a \text{ ικανοποιεί τον } \psi \\ \Sigma \models \varphi \to \psi, \quad & \text{ανν} \quad \text{για κάθε αποτίμηση } a, \text{ αν η } a \text{ ικανοποιεί} \\ & \qquad \text{το } \Sigma, \text{ τότε η α ικανοποιεί τον } \varphi \to \psi. \end{aligned}$$

Όμως, με βάση τον πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής, η τυχούσα αποτίμηση a ικανοποιεί τον τύπο $\varphi \to \psi$, ανν ισχύει ότι

αν η a ικανοποιεί το φ, τότε η a ικανοποιεί τον ψ.

Συνεπώς, ισχύει το ζητούμενο.

β) Όμοια, με βάση τον ορισμό της ταυτολογικής ισοδυναμίας και τον πίνακα αλήθειας του συνδέσμου $\leftrightarrow$.

Άσκηση 2.4.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ, όπου φ τυχόν στοιχείο του συνόλου των προτασιακών τύπων που κατασκευάζονται μόνο με χρήση των συνδέσμων $\neg, \vee, \wedge$.

Αν ο φ είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε ο φ^* ταυτίζεται με τον $\neg\varphi$, οπότε ισχύει προφανώς ότι $\neg\varphi \equiv \varphi^*$.

Έστω τώρα ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ και ότι ο ψ έχει την ιδιότητα, δηλαδή $\neg\psi \equiv \psi^*$. Τότε ο φ^* είναι ο $\neg\psi^*$ και $\neg\neg\psi \equiv \neg\psi^*$, δηλαδή $\neg\varphi \equiv \varphi^*$.

Τέλος, έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\psi \vee \chi$ και ότι οι ψ, χ έχουν την ιδιότητα, δηλαδή $\neg\psi \equiv \psi^*$ και $\neg\chi \equiv \chi^*$. Τότε ο φ^* είναι ο $\psi^* \wedge \chi^*$ και $\psi^* \wedge \chi^* \equiv \neg\psi \wedge \neg\chi \equiv \neg(\psi \vee \chi)$, οπότε $\varphi^* \equiv \neg\varphi$.

(Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \wedge \chi$, τότε δουλεύουμε όμοια.)

Άσκηση 2.5.

α) Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι $\varphi \wedge \psi \models \psi$, για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ.

Έστω τώρα ότι $\varphi \models \psi$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί τον προτασιακό τύπο φ ικανοποιεί και τον προτασιακό τύπο ψ. Συνεπώς, κάθε αποτίμηση που ικανοποιεί το φ ικανοποιεί και τον προτασιακό τύπο $\varphi \wedge \psi$. Άρα $\varphi \models \varphi \wedge \psi$, οπότε ισχύει το ζητούμενο. β) Όμοια.

Άσκηση 2.6.

Έστω το σύνολο των προτασιακών τύπων που έχουν την εξής ιδιότητα:

> για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους ψ, χ, αν ο χ είναι υποπροτασιακός τύπος του φ και $\chi \equiv \psi$, τότε $\varphi \equiv \varphi[\chi/\psi]$.

Δείχνουμε τώρα ότι το ικανοποιεί τις συνθήκες α), β) της αρχής της επαγωγής (Θεώρημα 2.2).

α) Αν ο φ είναι προτασιακή μεταβλητή, τότε (ο μόνος υποπροτασιακός τύπος του φ είναι ο ίδιος ο φ και συνεπώς) ο $\varphi[\chi/\psi]$ είναι ο ψ. Άρα, αν υποθέσουμε ότι $\chi \equiv \psi$, έπεται προφανώς ότι $\varphi \equiv \varphi[\chi/\psi]$.

β) Έστω ότι ο φ είναι της μορφής $\neg\varphi_1$, όπου ο φ_1 έχει την ιδιότητα. Θεωρούμε προτασιακούς τύπους ψ, χ, όπου ο χ είναι υποπροτασιακός τύπος του φ_1 και

$\chi \equiv \psi$. Αν ο χ είναι υποπροτασιακός τύπος του φ_1, τότε $\varphi_1 \equiv \varphi_1[\chi/\psi]$, με βάση την επαγωγική υπόθεση. Άρα $\neg\varphi_1 \equiv \neg\varphi_1[\chi/\psi]$, δηλαδή $\varphi \equiv \varphi[\chi/\psi]$.

Αν ο χ είναι ο ίδιος ο $\neg\varphi_1$, δηλαδή ο φ, τότε ο $\varphi[\chi/\psi]$ ταυτίζεται με τον ψ, οπότε προφανώς ισχύει $\varphi \equiv \varphi[\chi/\psi]$.

γ) Όμοια δουλεύουμε αν ο φ είναι της μορφής $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Άσκηση 2.7.

Αρκεί να δείξουμε ότι ο σύνδεσμος $\vee$ εκφράζεται με τη βοήθεια των $\neg, \rightarrow$ (αφού το σύνολο $\{\neg, \vee\}$ είναι πλήρες). Όμως, για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ, ψ, ισχύει: $\varphi \vee \psi \equiv (\neg\varphi) \rightarrow \psi$.

Άσκηση 2.8.

Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα αλήθειας του φ, όπου φ προτασιακός τύπος που έχει κατασκευαστεί μόνο με χρήση των $+, \leftrightarrow$, περιέχει άρτιο πλήθος τιμών αλήθειας A. Ένα παράδειγμα είναι ο ακόλουθος πίνακας. (Για αυστηρή απόδειξη, πρέπει να χρησιμοποιηθεί η αρχή της επαγωγής για το σύνολο των προτασιακών τύπων που κατασκευάζονται μόνο με τους $+, \leftrightarrow$.)

p	q	$p+q$	$(p+q) \leftrightarrow p$	$(p+q)+q$	$((p+q)+q)+p$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ

Όμως, ο πίνακας αλήθειας του $p_0 \vee p_1$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα, άρα ο σύνδεσμος $\vee$ δεν μπορεί να εκφραστεί μέσω των συνδέσμων $+, \leftrightarrow$.

Άσκηση 2.9.

α) Κατασκευάζουμε πίνακες αλήθειας ή χρησιμοποιούμε τη μέθοδο που είδαμε στο Παράδειγμα 2.8.

β) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της ταυτολογικής συνεπαγωγής και τον πίνακα αλήθειας της συνεπαγωγής.

Άσκηση 2.10.

α) Με βάση το Θεώρημα Απαγωγής (Θεώρημα 2.8), αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\neg\varphi$. Κατασκευάζουμε λοιπόν την εξής τυπική απόδειξη:

1.	φ	υπόθεση
2.	$\varphi \to (\neg\neg\neg\varphi \to \varphi)$	ΑΣ1
3.	$\neg\neg\neg\varphi \to \varphi$	1, 2, MP
4.	$(\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to ((\neg\neg\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\varphi)$	ΑΣ3
5.	$\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	Παράδ. 2.15
6.	$(\neg\neg\neg\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\varphi$	4, 5, MP
7.	$\neg\neg\varphi$	3, 6, MP

β) Με βάση το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι $\{\varphi \to \neg\psi, \psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$, που προκύπτει με βάση την εξής τυπική απόδειξη:

1.	$\varphi \to \neg\psi$	υπόθεση
2.	ψ	υπόθεση
3.	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	Παράδειγμα 2.15
4.	$\neg\neg\varphi \to \neg\psi$	1, 3, Πόρισμα 2.2(i)
5.	$(\neg\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$	Δραστηριότητα 2.4(ii)
6.	$\psi \to \neg\varphi$	4, 5, MP
7.	$\neg\varphi$	2, 6, MP

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\{\varphi \to \psi, \varphi \to \neg\psi\} \vdash_{\Pi\Lambda} \neg\varphi$. Τώρα χρησιμοποιούμε το ΑΣ3, το τυπικό θεώρημα $\neg\neg\varphi \to \varphi$ και το Πόρισμα 2.2(i).

δ) Όμοια με το γ).

Άσκηση 2.11.

Σύμφωνα με το Θεώρημα Απαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$T \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \to \neg\psi \text{ ανν } T \vdash_{\Pi\Lambda} \psi \to \neg\varphi.$$

Όμως, ο προτασιακός τύπος $(\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$ είναι τυπικό θεώρημα του ΠΛ (Άσκηση 2.10 β)). Συνεπώς, αν μας δοθεί μια τυπική απόδειξη του προτασιακού τύπου $\varphi \to \neg\psi$ από το , μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη του προτασιακού τύπου $\psi \to \neg\varphi$ από το και αντίστροφα.

Άσκηση 2.12.

Αρκεί να δείξουμε ότι όλα τα αξιώματα του ΠΛ$'$ είναι τυπικά θεωρήματα του ΠΛ και αντίστροφα. Ας δούμε πρώτα γιατί τα ΑΣ1$'$-ΑΣ4$'$ δίνουν τυπικά θεωρήματα του ΠΛ.

ΑΣ1$'$. Για τυχόντα προτασιακό τύπο φ, ο $\varphi \vee \varphi \rightarrow \varphi$ είναι συντομογραφία του $(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$, που αποδεικνύεται τυπικά στο ΠΛ ως εξής:

1.	$(\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$	ΑΣ3
2.	$\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$	Παράδειγμα 2.14
3.	$(\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$	1, 2, MP

ΑΣ2$'$. Για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ, ο $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ είναι συντομογραφία του $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$, που είναι τυπικό θεώρημα του ΠΛ, με βάση τη Δραστηριότητα 2.4(i) και το γεγονός ότι $\vdash_{\Pi\Lambda} \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.

Όμοια δουλεύουμε για τα ΑΣ3$'$ και ΑΣ4$'$.

Ας στραφούμε τώρα στα ΑΣ1-ΑΣ3 και ας δείξουμε ότι δίνουν τυπικά θεωρήματα του ΠΛ$'$. Αποδεικνύουμε κατ' αρχήν το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα Για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ, χ:

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash_{\Pi\Lambda'} \varphi \rightarrow \chi.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ, χ

$$\{\neg\varphi \vee \psi, \neg\psi \vee \chi\} \vdash_{\Pi\Lambda'} \neg\varphi \vee \chi.$$

Αυτό όμως προκύπτει από την εξής τυπική απόδειξη:

1.	$(\neg\psi \vee \chi) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \chi))$	ΑΣ4$'$
2.	$\neg\psi \vee \chi$	υπόθεση
3.	$(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \chi)$	1, 2, MP
4.	$\neg\varphi \vee \psi$	υπόθεση
5.	$\neg\varphi \vee \chi$	3, 4, MP

□

ΑΣ1. Για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ, ο $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ είναι συντομογραφία του $\varphi \rightarrow (\neg\psi \vee \varphi)$, που είναι τυπικό θεώρημα του ΠΛ$'$, με βάση την εξής τυπική απόδειξη:

1.	$\varphi \rightarrow (\varphi \vee \neg\psi)$	ΑΣ2$'$
2.	$(\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow (\neg\psi \vee \varphi)$	ΑΣ3$'$
3.	$\varphi \rightarrow (\neg\psi \vee \varphi)$	1, 2, Πόρισμα παραπάνω.

Όμοια δουλεύουμε για τα ΑΣ2 και ΑΣ3.

Άσκηση 2.13.

α) Έστω T σύνολο προτασιακών τύπων. Με βάση τον ορισμό του τελεστή $^{-}$, ισχύει $\overline{T} \subseteq \overline{\overline{T}}$. Για να δείξουμε ότι $\overline{\overline{T}} \subseteq \overline{T}$, θεωρούμε $\varphi \in \overline{\overline{T}}$. Τότε $\overline{T} \vdash_{\Pi\Lambda} \varphi$, δηλαδή υπάρχει τυπική απόδειξη $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ του φ από το $\overline{T}$. Όμως, για κάθε $\varphi_i \in \overline{T}$ υπάρχει τυπική απόδειξη $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{in_i}$ του φ_i από το T. Άρα, με επαγωγή (στο πλήθος των στοιχείων του $\overline{T}$ που εμφανίζονται στην ακολουθία $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$), μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τυπική απόδειξη $\psi_1, \ldots, \psi_l$ του φ από το T. Συνεπώς $\varphi \in \overline{T}$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

β) Έστω ότι $\varphi \in \overline{T \cap \Sigma}$. Τότε υπάρχει τυπική απόδειξη $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ του φ από το $T \cap \Sigma$. Προφανώς η $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ αποτελεί τυπική απόδειξη του φ από το και τυπική απόδειξη του φ από το Σ. Άρα $\varphi \in \overline{T} \cap \overline{\Sigma}$.

Αν τώρα θεωρήσουμε ως το σύνολο $\{\neg p_0, p_0\}$, ως Σ το σύνολο $\{p_0, p_1\}$ και ως φ τον προτασιακό τύπο $p_0 \wedge p_1$, τότε έχουμε ότι $\varphi \in \overline{T} \cap \overline{\Sigma}$, αλλά $\varphi \notin \overline{T \cap \Sigma}$ (αφού $p_0 \not\models p_0 \wedge p_1$).

γ), δ) Όμοια.

Άσκηση 2.14.

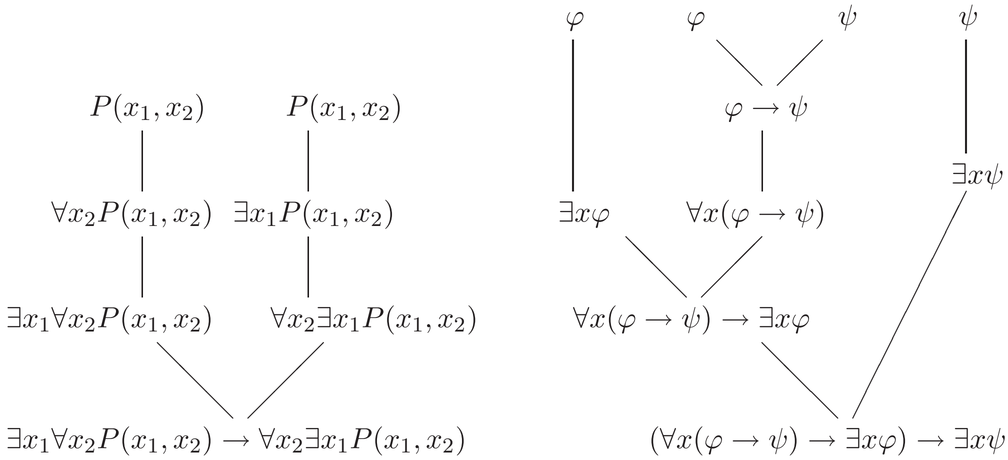
Ακολουθούμε την αντίστροφη διαδικασία από αυτή του Παραδείγματος 2.16, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Εγκυρότητας (Θεώρημα 2.14) αντί για το Θεώρημα Πληρότητας (Θεώρημα 2.12).

Άσκηση 2.15.

Με βάση το Θεώρημα Πληρότητας (Θεώρημα 2.12), αρκεί οι προτασιακοί τύποι αυτοί να είναι ταυτολογίες, πράγμα που μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα.

Κεφάλαιο 3

Άσκηση 3.1.



Άσκηση 3.2.

$[(\forall x_1 Q(x_1) \wedge P(x_1, x_2)) \to \exists x_2(\neg P(x_1, x_2))]$,
$[((\neg \exists x_1 \forall x_2 P(x_1, x_2)) \vee \forall x_1 Q(x_1)) \leftrightarrow Q(x_2)]$.

Άσκηση 3.3.

α) Δύο τέτοιοι τύποι είναι, αντίστοιχα, οι $\exists x_0 \forall x_1 x_1 \not\mathbf{E} x_0$, $\forall x_0 \exists x_1 x_0 \mathbf{E} x_1$.

β) Δύο τέτοιοι τύποι είναι, αντίστοιχα, οι $\exists x_0 \forall x_1 x_0 \not\approx x_1'$, $\forall x_0 \forall x_1 x_0 \otimes x_1 \not\approx x_0 \oplus x_1$.

Άσκηση 3.4.

α) $v((x_1' \oplus x_2'')' \oplus (x_1 \otimes x_3)) = -11$, $v(x_2 \otimes (x_1 \oplus (x_3'' \otimes \mathbf{0}))) = -12$.

β) Σύμφωνα με τον ορισμό αλήθειας του Tarski (Ορισμός 3.7),

$$\mathcal{N}^* \models \exists x_1 \mathbf{0}'' \otimes x_1 \approx x_2[v], \text{ ανν υπάρχει } -n \in |\mathcal{N}^*| \text{ τέτοιο ώστε } (-2) \otimes^{\mathcal{N}^*} (-n) = (-4).$$

Όμως $(-2) \otimes^{\mathcal{N}^*} (-2) = (-4)$, άρα η v ικανοποιεί τον τύπο $\exists x_1 \mathbf{0}'' \otimes x_1 \approx x_2$ στην $\mathcal{N}^*$.
Όμοια βλέπουμε ότι η v ικανοποιεί τον τύπο $\forall x_1 x_1 \not\approx \mathbf{0} \to x_3 \approx x_2$ στην $\mathcal{N}^*$.

Άσκηση 3.5.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό αλήθειας του Tarski (θυμήσου και τον Ορισμό 3.8), διαπιστώνουμε ότι η πρώτη και η δεύτερη πρόταση είναι αληθείς, ενώ η τρίτη είναι ψευδής στην $\mathcal{N}$.

Προσοχή, ο ποσοδείκτης $\forall x_1$ του δεύτερου τύπου έχει πεδίο εφαρμογής τον τύπο $x_1 \approx x_1$ και ο ποσοδείκτης $\forall x_1$ του τρίτου τύπου έχει πεδίο εφαρμογής τον τύπο $x_1 \not\approx x_1$.

Άσκηση 3.6.

Όχι, αυτό δεν ισχύει, υπάρχουν πολλά αντιπαραδείγματα. Παραδείγματος χάρη, θεωρούμε τη δομή $\mathcal{N}$ για τη $\Gamma_1^{\theta\alpha}$ (Παράδειγμα 3.4(iii)) και το σύνολο τύπων $\Sigma = \{x_1 \approx \mathbf{0}, x_1 \not\approx \mathbf{0}\}$. Προφανώς, κάθε στοιχείο του Σ ικανοποιείται στην $\mathcal{N}$, αλλά δεν είναι δυνατό να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα και τα δυο στοιχεία του Σ.

Άσκηση 3.7.

Η πρόταση φ εκφράζει «Δεν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο», ενώ η ψ εκφράζει «Η διάταξη είναι πυκνή», δηλαδή ως φ μπορούμε να πάρουμε την πρόταση $\neg\exists x_0 \forall x_1 (x_0 \prec x_1 \vee x_0 \approx x_1)$ και ως ψ την πρόταση $\forall x_0 \forall x_1 [x_0 \prec x_1 \rightarrow \exists x_2 (x_0 \prec x_2 \wedge x_2 \prec x_1)]$.

Άσκηση 3.8.

α) Έστω $\mathcal{A}$ δομή τέτοια ώστε $\mathcal{A} \models \exists x \forall y P(x,y)$. Τότε υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε για κάθε $b \in |\mathcal{A}|$ να ισχύει $< a, b > \in P^{\mathcal{A}}$. Συνεπώς, ισχύει ότι για κάθε $b \in |\mathcal{A}|$ υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ τέτοιο ώστε $< a, b > \in P^{\mathcal{A}}$, από το οποίο έπεται ότι $\mathcal{A} \models \forall y \exists x P(x,y)$.

β) Ορίζουμε δομή $\mathcal{A}$ τέτοια που $|\mathcal{A}| = \{a_0, a_1\}$ και $P^{\mathcal{A}} = \{< a_0, a_1 >, < a_1, a_0 >\}$. Με βάση τον ορισμό αλήθειας του Tarski, έχουμε ότι $\mathcal{A} \models \forall y \exists x P(x,y)$, ενώ $\mathcal{A} \not\models \exists x \forall y P(x,y)$.

Άσκηση 3.9.

α) Έστω $\mathcal{A}$ τυχούσα δομή και v τυχούσα αποτίμηση στην $\mathcal{A}$ για τις οποίες $\mathcal{A} \models \exists x(\varphi \wedge \psi)[v]$. Τότε υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ με $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi[v(x|a)]$, άρα υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ με $\mathcal{A} \models \varphi[v(x|a)]$ και υπάρχει $a \in |\mathcal{A}|$ με $\mathcal{A} \models \psi[v(x|a)]$. Συνεπώς $\mathcal{A} \models \exists x \varphi \wedge \exists x \psi[v]$.

β) Το αντιπαράδειγμα που δώσαμε για το δεύτερο μέρος της Δραστηριότητας 3.2 παρέχει δομή $\mathcal{A}$ και τύπους φ, ψ τέτοιους που για τυχούσα μεταβλητή x, η πρόταση $\exists x\varphi \wedge \exists x\psi$ αληθεύει στην $\mathcal{A}$, ενώ η $\exists x(\varphi \wedge \psi)$ είναι ψευδής στην $\mathcal{A}$.

Άσκηση 3.10.

Εργαζόμαστε όπως στο δεύτερο από τα Παραδείγματα 3.11.

Άσκηση 3.11.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ. Η περίπτωση για ατομικούς τύπους και οι περιπτώσεις για τύπους των μορφών $\neg\psi$, $\psi \to \chi$ έχουν ουσιαστικά καλυφθεί στη λύση της Άσκησης 2.6, απομένει μόνο η περίπτωση τύπου μορφής $\forall x\psi$.

Άσκηση 3.12.

Έστω ότι το Π έχει την ιδιότητα. Θεωρούμε $\mathcal{A} \models \Pi$ και τυχούσα πρόταση φ. Αν $\Pi \models \varphi$, τότε $\mathcal{A} \models \varphi$, με βάση τον ορισμό της λογικής συνεπαγωγής. Για το αντίστροφο, έστω ότι $\mathcal{A} \models \varphi$. Από την υπόθεση για το Π, έπεται ότι $\Pi \models \varphi$ ή $\Pi \models \neg\varphi$. Αν όμως ίσχυε ότι $\Pi \models \neg\varphi$, τότε θα ίσχυε $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, πράγμα αδύνατο. Άρα $\Pi \models \varphi$, δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Άσκηση 3.13.

Εφαρμόζοντας νόμους μετακίνησης ποσοδεικτών, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\forall x(P(x) \to x \approx y) \to (\exists z P(z) \to \exists u z \approx u) && \equiv\\
&\exists x[(P(x) \to x \approx y) \to (\exists z P(z) \to \exists u z \approx u)] && \equiv\\
&\exists x[(P(x) \to x \approx y) \to \forall z \exists u(P(z) \to z \approx u)] && \equiv\\
&\exists x \forall z \exists u[(P(x) \to x \approx y) \to (P(z) \to z \approx u)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\exists x x \approx y \to (P(x) \to \neg\exists z x \approx z) && \equiv\\
&\exists x x \approx y \to (P(x) \to \forall z x \not\approx z) && \equiv\\
&\exists u u \approx y \to (P(x) \to \forall z x \not\approx z) && \equiv\\
&\forall u(u \approx y \to (P(x) \to \forall z x \not\approx z)) && \equiv\\
&\forall u(u \approx y \to \forall z(P(x) \to x \not\approx z)) && \equiv\\
&\forall u \forall z(u \approx y \to (P(x) \to x \not\approx z))
\end{aligned}$$

Άσκηση 3.14.

Έστω ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη σε κάποιο στοιχείο του και $T \vdash_{K\Lambda} \varphi \to \psi$. Με βάση το Θεώρημα Γενίκευσης (Θεώρημα 3.6), έπεται ότι $T \vdash_{K\Lambda} \forall x(\varphi \to$

ψ). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το ΑΣ5, έχουμε ότι $T \vdash_{K\Lambda} \forall x\varphi \to \forall x\psi$.

Άσκηση 3.15.

Από τον τύπο $\forall y(Q(y) \to \forall zP(z))$ αποδεικνύεται τυπικά ο $Q(x) \to \forall zP(z)$ (με χρήση του ΑΣ4). Άρα $\{Q(x), \forall y(Q(y) \to \forall zP(z))\} \vdash_{K\Lambda} \forall zP(z)$, από όπου έπεται το ζητούμενο.

Άσκηση 3.16.

Χρησιμοποιούμε κατ' αρχήν τα Θεωρήματα Γενίκευσης και Απαγωγής και μετά το ΑΣ8, όπως στο Παράδειγμα 3.23 και στο Παράδειγμα 3.24.

Άσκηση 3.17.

Αρκεί να δείξουμε ότι, αν $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ είναι τυπική απόδειξη του φ από το T και y μεταβλητή που δεν εμφανίζεται σε κάποιον από τους $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, τότε η ακολουθία $(\varphi_1)^c_y, \ldots, (\varphi_n)^c_y$ αποτελεί τυπική απόδειξη του φ^c_y από το T. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $1 \leq i \leq n$, ο $(\varphi_i)^c_y$ είναι αξίωμα ή στοιχείο του T ή προκύπτει από δύο προηγούμενους τύπους με βάση τον κανόνα MP.

Αν ο φ_i είναι αξίωμα, τότε και ο $(\varphi_i)^c_y$ είναι αξίωμα, αφού, εξετάζοντας ένα προς ένα τα αξιωματικά σχήματα, διαπιστώνουμε ότι η αντικατάσταση ενός συμβόλου σταθερής από μια μεταβλητή, που δεν εμφανίζεται ήδη στον τύπο, οδηγεί από αξίωμα σε αξίωμα.

Αν ο φ_i ανήκει στο T, τότε και ο $(\varphi_i)^c_y$ ανήκει στο T, αφού ο $(\varphi_i)^c_y$ ταυτίζεται με το φ_i (η c δεν εμφανίζεται στο φ_i).

Τέλος, αν ο φ_i είναι συνέπεια με βάση το MP δύο τύπων φ_j, φ_k, όπου $j, k < i$, τότε ο $(\varphi_i)^c_y$ είναι επίσης συνέπεια των $(\varphi_j)^c_y, (\varphi_k)^c_y$ με βάση το MP.

Άσκηση 3.18.

Θεωρώντας ως το σύνολο $\{P(c)\}$ και ως φ τον τύπο $P(c)$, βλέπουμε ότι ισχύει $T \vdash_{K\Lambda} \varphi$, αλλά δεν ισχύει ότι $T \vdash_{K\Lambda} \forall y\varphi^c_y$, όποια κι αν είναι η μεταβλητή y. Πράγματι, με βάση ουσιαστικά το Παράδειγμα 3.9, έχουμε ότι $P(c) \not\models \forall yP(y)$, οπότε, με βάση το Θεώρημα 3.9, $P(c) \nvdash_{K\Lambda} \forall yP(y)$.

Άσκηση 3.19.

α) Θεωρούμε τον τύπο $y \approx x$ ως φ, οπότε $(\varphi^x_y)^y_x$ είναι ο τύπος $x \approx x$, που δεν ταυτίζεται με τον αρχικό τύπο.

β) Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ. Η ιδέα είναι ότι, όταν η y δεν εμφανίζεται καθόλου στον τύπο φ, η αντικατάσταση $y \rightsquigarrow x$ θα γίνει ακριβώς στα σημεία όπου η y εμφανίστηκε μετά την αντικατάσταση $x \rightsquigarrow y$.

Άσκηση 3.20.

Έστω ότι $T \cup \{\varphi^y_c\} \vdash_{K\Lambda} \psi$, όπου το c δεν εμφανίζεται σε κάποιο στοιχείο του $T \cup \{\varphi, \psi\}$. Τότε, με βάση το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής, ισχύει ότι $T \cup \{\neg\psi\} \vdash_{K\Lambda} \neg\varphi^y_c$. Συνεπώς, λόγω της Πρότασης 3.3, έχουμε ότι $T \cup \{\neg\psi\} \vdash_{K\Lambda} \forall y \neg\varphi$. Πάλι με βάση το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής, έπεται ότι $T \cup \{\neg\forall y \neg\varphi\} \vdash_{K\Lambda} \psi$, δηλαδή το ζητούμενο.

Άσκηση 3.21.

Όπως αναφέρεται και στο Παράδειγμα 3.26, αρκεί να δείξουμε ότι $\exists x \forall y \varphi \vdash_{K\Lambda} \forall y \exists x \varphi$.

Λόγω του Θεωρήματος Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι $\exists x \forall y \varphi \vdash_{K\Lambda} \exists x \varphi$.

Λόγω όμως του Θεωρήματος Αντιθετοαναστροφής, αυτό ισοδυναμεί με $\forall x \neg\varphi \vdash_{K\Lambda} \forall x \neg\forall y \varphi$.

Εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Γενίκευσης, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x \neg\varphi \vdash_{K\Lambda} \neg\forall y \varphi$ ή, λόγω του Θεωρήματος σε άτοπο απαγωγής, ότι το $\{\forall x \neg\varphi, \forall y \varphi\}$ είναι αντιφατικό. Αυτό όμως ισχύει, όπως δείχνουν οι τυπικές αποδείξεις:

1.	$\forall x \neg\varphi$	υπόθεση	1.	$\forall y \varphi$	υπόθεση
2.	$\forall x \neg\varphi \to \neg\varphi$	ΑΣ4	2.	$\forall y \varphi \to \neg\varphi$	ΑΣ4
3.	$\neg\varphi$	1, 2, MP	3.	φ	1, 2, MP

Άσκηση 3.22.

Αρκεί, με βάση το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής, να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} &\neg\forall y \forall x P(y,x) \vdash_{K\Lambda} \neg\forall x \forall y P(x,y), \\ \text{δηλαδή ότι} \quad &\exists y \exists x \neg P(y,x) \vdash_{K\Lambda} \neg\forall x \forall y P(x,y). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Πόρισμα 3.1, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg P(d,c) \vdash_{K\Lambda} \neg\forall x \forall y P(x,y),$$

όπου c, d είναι (διαφορετικά) σύμβολα σταθερών. Εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x \forall y P(x,y) \vdash_{K\Lambda} P(d,c),$$

που αποδεικνύεται εύκολα, χρησιμοποιώντας το ΑΣ4.

Σημείωση. Αν ξεκινήσετε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Γενίκευσης, ώστε μετά να χρησιμοποιήσετε το ΑΣ4, θα έχετε πρόβλημα, επειδή δεν θα ισχύει η αντικαταστασιμότητα της μεταβλητής x από την y.

Άσκηση 3.23.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ.

Αν ο φ είναι ατομικός τύπος, τότε παίρνουμε ως $\hat{\varphi}$ τον ίδιο το φ. Αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$, τότε παίρνουμε ως $\hat{\varphi}$ τον τύπο $\neg\hat{\psi}$. Αν ο φ είναι της μορφής $\psi \to \chi$, τότε παίρνουμε ως $\hat{\varphi}$ τον τύπο $\hat{\psi} \to \hat{\chi}$.
Έστω τέλος ότι ο φ είναι της μορφής $\forall y\psi$. Αν η μεταβλητή y δεν εμφανίζεται στον όρο t ή αν η y ταυτίζεται με τη x, τότε παίρνουμε ως $\hat{\varphi}$ τον τύπο $\forall y\hat{\psi}$. Αλλιώς, επιλέγουμε μεταβλητή z που είναι διαφορετική από τη x και δεν εμφανίζεται ούτε στον όρο t ούτε στον τύπο $\hat{\psi}$. Έστω $\hat{\varphi}$ ο τύπος $\forall z(\hat{\psi})^y_z$. Τότε η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον τύπο $\hat{\varphi}$, δηλαδή ισχύει το β) του Θεωρήματος 3.8. Για το α), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall y\psi \vdash_{K\Lambda} \forall z(\hat{\psi})^y_z \ \text{ και } \ \forall z(\hat{\psi})^y_z \vdash_{K\Lambda} \forall y\psi.$$

Για το πρώτο μέρος, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Γενίκευσης και το ΑΣ4 (η y είναι αντικαταστάσιμη από τη z στον τύπο $\hat{\psi}$). Για το δεύτερο μέρος, χρησιμοποιούμε το ΑΣ4 (η z είναι αντικαταστάσιμη από την y στον τύπο $(\hat{\psi})^y_z$), την Άσκηση 3.19 και το Θεώρημα Γενίκευσης.

Άσκηση 3.24.

α) Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του t – θυμήσου τις αποδείξεις των Λημμάτων 3.1 και 3.2.

β) Χρησιμοποιούμε το μέρος α) και τον ορισμό αλήθειας του Tarski.

Άσκηση 3.25.

Ουσιαστικά επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.6 - δες τέλος της ενότητας 2.5.

Άσκηση 3.26.

Έστω ότι το σύνολο Σ_{Γ_1} των συμβόλων της γλώσσας Γ_1 είναι αριθμήσιμο. Κάθε τύπος της Γ_1 μπορεί να ταυτιστεί με μια μοναδική πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της Γ_1. Έτσι, ορίζεται με φυσιολογικό τρόπο μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $F : T(\Gamma_1) \to (\Sigma_{\Gamma_1})^*$, όπου με $(\Sigma_{\Gamma_1})^*$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών στοιχείων του Σ_{Γ_1}. Όμως, το $(\Sigma_{\Gamma_1})^*$ αποτελεί την ένωση της αριθμήσιμης ακολουθίας συνόλων $(S_n)_{n \in \mathbf{N}-\{0\}}$, όπου S_n είναι το καρτεσιανό γινόμενο n αντιγράφων του Σ_{Γ_1}. Από τη Θεωρία Συνόλων, γνωρίζουμε ότι

α) το καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο και

β) η ένωση αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Συνεπώς, το σύνολο $(\Sigma_{\Gamma_1})^*$ είναι αριθμήσιμο, άρα το $T(\Gamma_1)$ είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 3.27.

Με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του t, δείχνουμε κατ' αρχήν ότι για κάθε όρο t ισχύει $\overline{v}^{\mathcal{A}}(t) = \overline{v}^{\mathcal{A}'}(t)$ (*), δηλαδή ότι η τιμή που δίνει στον όρο t η αποτίμηση v στα πλαίσια της δομής $\mathcal{A}$ είναι η ίδια με αυτή που του δίνει στα πλαίσια της $\mathcal{A}'$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του φ για να δείξουμε ότι για κάθε τύπο φ της Γ_1 ισχύει

$$\mathcal{A}' \models \varphi[v], \text{ ανν } \mathcal{A} \models \varphi[v].$$

Η περίπτωση ατομικού τύπου στηρίζεται στη σχέση (*) παραπάνω και στο γεγονός ότι κάθε κατηγορηματικό σύμβολο της Γ_1 έχει την ίδια ερμηνεία στις δομές $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$. Στις άλλες περιπτώσεις, το ζητούμενο έπεται άμεσα από την επαγωγική υπόθεση.

Γλωσσάρι

αλγεβρική σχολή λογικής: Σχολή που μελέτησε τη λογική από αλγεβρική σκοπιά, δηλαδή δίνοντας έμφαση στην αναλογία που υπάρχει μεταξύ αλγεβρικών και λογικών πράξεων.

αλφαβητική παραλλαγή τύπου: Τύπος που προκύπτει από κάποιον άλλο με αντικατάσταση κάποιας δεσμευμένης μεταβλητής από άλλη μεταβλητή.

αντικαταστάσιμη μεταβλητή: Μεταβλητή που μπορεί να αντικατασταθεί από όρο έτσι, ώστε να μη δεσμευθεί κάποια μεταβλητή που εφανίζεται στον όρο.

αντίφαση: Προτασιακός τύπος που έχει πάντα τιμή αλήθειας «ψευδής».

αντιφατικό σύνολο (προτασιακών) τύπων: Σύνολο από το οποίο μπορεί να αποδειχθεί ένας τύπος και η άρνησή του.

αξίωμα: Πρόταση που λαμβάνεται ως αρχική, στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος.

αξιωματικό σύστημα: Σύστημα που αποτελείται από αρχικές προτάσεις-αξιώματα και αποδεικτικούς κανόνες και χρησιμοποιείται για την κατασκευή αποδείξεων.

αξιωματικό σχήμα: Σύνολο αξιωμάτων με κοινή μορφή.

αποδεικτικός κανόνας: Κανόνας που επιτρέπει την εξαγωγή κάποιου συμπεράσματος από κάποιες υποθέσεις, με βάση μόνο τη μορφή των εκφράσεων.

αποτίμηση: Συνάρτηση που αντιστοιχεί τιμές σε μεταβλητές τυπικής γλώσσας.

γενίκευση: Η εξαγωγή συμπεράσματος που αφορά όλες τις τιμές μιας μεταβλητής πρωτοβάθμιας γλώσσας.

γλώσσα-αντικείμενο: Τυπική γλώσσα, εκφράσεις της οποίας αντιπροσωπεύουν εκφράσεις της καθημερινής γλώσσας και αποτελούν το αντικείμενο μελέτης.

δενδροδιάγραμμα: Διάγραμμα που δείχνει πώς κατασκευάζεται μια σύνθετη έκφραση από απλούστερες, με βάση συνδετικές εκφράσεις και εκφράσεις ποσότητας.

δεσμευμένη μεταβλητή: Μεταβλητή που εμπίπτει στο πεδίο εφαρμογής ενός ποσοδείκτη.

δομή: Μη κενό σύνολο, μαζί με κατάλληλες ερμηνείες των μη λογικών συμβόλων πρωτοβάθμιας γλώσσας.

έγκυρο αξιωματικό σύστημα: Αξιωματικό σύστημα στο οποίο αποδεικνύονται μόνο λογικές αλήθειες.

έγκυρος τύπος: Τύπος που παίρνει πάντοτε τιμή αλήθειας «αληθής».

έκφραση: Πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων.

ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής: Εμφάνιση μεταβλητής, που δεν εμπίπτει στο πεδίο ποσοδείκτη.

επαρκές σύνολο συνδέσμων: Δες **πλήρες σύνολο συνδέσμων**.

ερμηνεία: Δες **δομή**.

ικανοποιήσιμο σύνολο (προτασιακών) τύπων: Σύνολο (προτασιακών) τύπων, τα στοιχεία του οποίου μπορούν να πάρουν ταυτόχρονα τιμή αλήθειας «αληθής».

κανόνας απόσπασης: Δες **modus ponens**.

κανόνας γενίκευσης: Αποδεικτικός κανόνας που επιτρέπει από τυχόντα τύπο να συμπεράνουμε τη γενίκευσή του.

κανονική διαζευκτική μορφή: Πεπερασμένη διάζευξη προτασιακών τύπων, καθένας από τους οποίους είναι πεπερασμένη σύζευξη προτασιακών μεταβλητών ή αρνήσεων προτασιακών μεταβλητών.

κανονική ποσοδεικτική μορφή: Τύπος που αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο ποσοδεικτών και ένα μέρος χωρίς ποσοδείκτες.

κατηγορηματική λογική: Μελέτη επιχειρηματικών μεθόδων, όταν η ανάλυση προτάσεων γίνεται παίρνοντας υπόψη τις ιδιότητες που αυτές αφορούν.

κατηγορηματικό σύμβολο: Σύμβολο που αντιπροσωπεύει ιδιότητα στοιχείων συνόλου.

κατηγορηματικός λογισμός: Τυπικό σύστημα για την κατηγορηματική λογική.

λογικά αληθής τύπος: Δες **έγκυρος τύπος**.

λογικά αξιώματα: Αξιώματα που αφορούν στα λογικά σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας.

λογικά ισοδύναμοι τύποι: Τύποι που παίρνουν πάντα τις ίδιες τιμές αλήθειας.

λογική συνεπαγωγή: Σχέση που, στα πλαίσια της κατηγορηματικής λογικής, οδηγεί κατ' ανάγκην από την αλήθεια των υποθέσεων στην αλήθεια του συμπεράσματος.

λογικιστική σχολή λογικής: Σχολή που είχε ως κύριο δόγμα ότι η Λογική αποτελεί τη βάση κάθε ακριβούς επιχειρηματολογίας, ειδικότερα των Μαθηματικών.

μεταβλητή: Σύμβολο που αντιπροσωπεύει τυχόν στοιχείο συνόλου.

μετα-γλώσσα: Η γλώσσα που χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε εκφράσεις της τυπικής γλώσσας - στην περίπτωσή μας, η ελληνική.

μη λογικά αξιώματα: Αξιώματα που αφορούν τα κατηγορηματικά και τα συναρτησιακά σύμβολα, καθώς και τα σύμβολα σταθερών μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας.

μοντέλο: Δομή στην οποία αληθεύει(ουν) κάποια(ες) πρόταση(προτάσεις).

modus ponens: Αποδεικτικός κανόνας, με βάση τον οποίο είναι δυνατόν από μια συνεπαγωγή και την ηγουμένη της να εξαχθεί η επομένη της συνεπαγωγής.

νόμοι προτασιακής λογικής: Ταυτολογίες βασικής σημασίας.

νόμοι κατηγορηματικής λογικής: Λογικά αληθείς τύποι βασικής σημασίας.

νόμοι ποσοδεικτών: Λογικά αληθείς τύποι που αφορούν βασικές ιδιότητες των ποσοδεικτών.

ορισμός αλήθειας του Tarski: Αναδρομική περιγραφή των συνθηκών, κάτω από τις οποίες αποδίδεται τιμή αλήθειας «αληθής» σε τυχόντα τύπο.

όρος: Έκφραση που κατασκευάζεται με χρήση μεταβλητών, συμβόλων σταθερών και συναρτησιακών συμβόλων.

πίνακας αλήθειας: Πίνακας που περιγράφει το ρόλο ενός συνδέσμου στον υπολογισμό της τιμής αλήθειας προτασιακού τύπου.

πλήρες αξιωματικό σύστημα: Αξιωματικό σύστημα που αποδεικνύει όλες τις λογικά αληθείς προτάσεις.

πλήρες σύνολο συνδέσμων: Σύνολο συνδέσμων που επαρκεί για να εκφραστούν όλοι οι υπόλοιποι σύνδεσμοι.

πλήρες σύνολο συνδέσμων και ποσοδείκτη: Σύνολο συνδέσμων και ποσοδείκτη που επαρκεί για να εκφραστούν όλοι οι σύνδεσμοι και ποσοδείκτες.

ποσοδείκτης: Σύμβολο που αντιπροσωπεύει έκφραση που δείχνει ποσότητα.

πρόταση: Τύπος στον οποίο δεν υπάρχουν ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών.

προτασιακή λογική: Μελέτη επιχειρηματικών μεθόδων, όπου η ανάλυση προτάσεων γίνεται μόνο με βάση τις συνδετικές εκφράσεις που εμπλέκονται.

προτασιακή μεταβλητή: Σύμβολο που αντιπροσωπεύει πρόταση της ελληνικής γλώσσας, που μπορεί να πάρει τιμή αλήθειας.

προτασιακός λογισμός: Τυπικό σύστημα για την προτασιακή λογική.

προτασιακός τύπος: Πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων στην τυπική προτασιακή γλώσσα, που αντιπροσωπεύει πρόταση της ελληνικής γλώσσας.

πρωτοβάθμια γλώσσα: Τυπική γλώσσα που έχει μεταβλητές με τιμές στοιχεία ενός σύμπαντος.

σημασιολογία: Η μελέτη επιχειρημάτων μέσω της απόδοσης νοήματος και τιμών αλήθειας.

σταθερές Henkin: Σύμβολα σταθερών που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του Henkin για το θεώρημα πληρότητας κατηγορηματικού λογισμού.

σύμβολο σταθερής: Σύμβολο που αντιπροσωπεύει διακεκριμένο στοιχείο συνόλου.

συμπάγεια: Η δυνατότητα να συμπεραίνουμε ότι όλα τα στοιχεία ενός άπειρου συνόλου (προτασιακών) τύπων ικανοποιούνται, αν οποιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολό του ικανοποιείται.

συνάρτηση Boole: Συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε k-άδα τιμών αλήθειας κάποια από τις δυο τιμές αλήθειας.

συναρτησιακό σύμβολο: Σύμβολο που αντιπροσωπεύει πράξη σε σύνολο.

σύνδεσμος: Σύμβολο που αντιπροσωπεύει συνδετική λέξη της ελληνικής γλώσσας.

συνεπές σύνολο (προτασιακών) τύπων: Σύνολο (προτασιακών) τύπων από το οποίο δεν είναι δυνατό να αποδειχθεί μια αντίφαση.

συντακτικό: Η μελέτη επιχειρημάτων μόνο με βάση τη μορφή των εκφράσεων που εμπλέκονται σ' αυτά.

ταυτολογία: Προτασιακός τύπος που έχει πάντα τιμή αλήθειας «αληθής».

ταυτολογικά ισοδύναμοι προτασιακοί τύποι: Προτασιακοί τύποι που έχουν πάντα την ίδια τιμή αλήθειας.

ταυτολογική συνεπαγωγή: Σχέση που, στα πλαίσια της προτασιακής λογικής, οδηγεί κατ' ανάγκην από την αλήθεια των υποθέσεων στην αλήθεια του συμπεράσματος.

τυπική απόδειξη: Απόδειξη στα πλαίσια αξιωματικού συστήματος, δηλαδή με χρήση αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων.

τυπική γλώσσα: Συμβολική γλώσσα που χρησιμοποιείται (εδώ) για τη μελέτη επιχειρηματικών μεθόδων.

τυπικό θεώρημα: Τύπος που προκύπτει στο τέλος μιας τυπικής απόδειξης.

τυπικό σύστημα: Δες **αξιωματικό σύστημα**.

φορμαλιστική σχολή λογικής: Σχολή που στηρίχθηκε στην άποψη ότι αυτό που έχει σημασία είναι τα αξιωματικά συστήματα και οι λογικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται, όχι το νόημα και οι τιμές αλήθειας των εκφράσεων.

Ευρετήριο