Αλγεβρικη Γεωμετρια 13 Απριλίου 2021

M τοπολ. χωρος $M = U_1 \cup U_2$ U_1, U_2 ανοιχτα

$U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Αν για καθε τέτοια γραφη ισχυει ότι $U_1 = \emptyset$ ή $U_2 = \emptyset$ τοτε ο χωρος λεγεται συνεκτικος.

$M = F_1 \cup F_2$ $F_1, F_2 \neq \emptyset$ κλειστα τοτε λεγεται μη αναγωγος

Αν ο δακτυλιος $A \cong A_1 \times A_2$ A_1, A_2 μη μηδενικοι δακτυλιοι

τοτε το Spec A δεν είναι συνεκτικο.

1_{A_1} 1_{A_2} οι μοναδες των δακτυλιων A_1, A_2

$e_1 = (1_{A_1}, 0)$, $e_2 = (0, 1_{A_2})$

$1_A = e_1 + e_2$, $e_1^2 = e_1$ $e_2^2 = e_2$ $e_1 e_2 = 0$

$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ $\mathfrak{p}$ πρωτο

$e_1 \cdot e_2 = 0 \in \mathfrak{p} \Rightarrow e_1 \in \mathfrak{p}$ ή $e_2 \in \mathfrak{p}$

Δεν μπορουν να ανηκουν και τα δυο ταυτοχρονα γιατι τοτε $\mathfrak{p} \ni 1_A = e_1 + e_2 \Rightarrow \mathfrak{p} = A$

Αν $e_2 \in \mathfrak{p}$ τοτε $p_1 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_1$

$p_2 : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_2$

τοτε δειξαμε ότι $p_2(\mathfrak{p})$ ειναι πρωτο ιδεωδες του A_2 και $\mathfrak{p} = p_2^{-1}(\mathfrak{p}_2)$

Αν $e_1 \in \mathfrak{p}$ $p_2(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_1$ και $\mathfrak{p} = p_2^{-1}(\mathfrak{p}_1)$

Αρα $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Spec} A_1 \times \operatorname{Spec} A_2$.

$D(e_2) \times D(e_1)$

$D(e_1)\cap D(e_2)=\emptyset$ αφου τα e_1, e_2 δεν ανηκουν στο ιδιο ιδεωδες

$X = \operatorname{Spec} A$.

1. Το X δεν είναι συνεκτικο αν και μονο αν A είναι ισόμορφο με γινομενο μη μηδενικων δακτυλιων A_1, A_2

$$A \cong A_1 \times A_2.$$

<u>Αποδ</u> Αν $A \cong A_1 \times A_2 \Rightarrow$ Spec A δεν είναι συνεκτικο.

Αντιστροφως

$\boxed{\operatorname{Spec} A = U_1 \cup U_2}$ $\quad$ $\boxed{U_1 \cap U_2 = \emptyset.}$

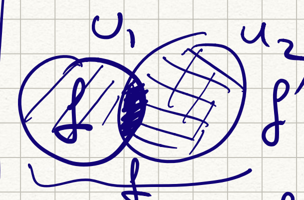
$$A = \Gamma(\underset{\operatorname{Spec} A.}{\underset{\parallel}{X}}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(\operatorname{Spec} A)$$

$\mathcal{O}_X$ είναι το sheaf δομης

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{O}_X(X_f) &= A_f\\ \mathcal{O}_X(U) &= \sim\end{aligned}}$$

$$\boxed{A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1 \cup U_2)} \cong \underbrace{\Gamma(U_1, \mathcal{O}_X)}_{\text{δακτυλιος } A_1} \times \underbrace{\Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)}_{\text{δακτυλιος } A_2}$$

f



$\Gamma(\mathcal{O}_X, U_1)$ f

$\Gamma(\mathcal{O}_X, U_2)$ f'

$f|_{U_1\cap U_2} = f'|_{U_1\cap U_2}$

Ταυτιση στο overlap.

$\Rightarrow \exists! f$ στο $U_1 \cup U_2$

2. X είναι αναγωγο αν και μονο αν

$$\mathfrak{N}(A) = \sqrt{0_A} = \{ f \in A : f^m = 0 \}$$

... ιδεωδες του A.

είναι πρώτο ιδεώδες του A.

$\sqrt{0_A} \in \underline{P}$ για κάθε P πρώτο ιδεώδες του A.

$f^m = 0 \subset \underline{P} \Rightarrow f^m \in \underline{P} \Rightarrow f \in \underline{P}$

$$V(\sqrt{0_A}) = V(\underline{P} \in \operatorname{Spec} A : \sqrt{0_A} \subset P) = \operatorname{Spec} A = X$$

$X = V(\alpha) \cup V(b)$ $\alpha, b \triangleleft A$ τότε

$\operatorname{Spec} A = X = V(\alpha \cap b)$

$$\sqrt{\alpha} \cap \sqrt{b} = \left(\bigcap_{\underline{P} \supset \alpha} \underline{P}\right) \cap \left(\bigcap_{P \supset b} \underline{P}\right) = \bigcap_{\substack{\underline{P} \in \operatorname{Spec} A \\ 0 \subset \underline{P}}} = N(A) = \sqrt{0_A})$$

$$\boxed{\sqrt{a} = \bigcap_{\underline{P} \supset a} \underline{P}}$$

Αν $\sqrt{0_A}$ είναι πρώτο τότε

$\sqrt{\alpha} = N(A)$ ή $\sqrt{b} = N(A)$

Ιδιότητα. $\underline{P}$ πρώτο ιδεώδες και

$A \cap B \subseteq \underline{P}$ τότε $A = \underline{P}$ ή $B = \underline{P}$

$f \in \underline{P}$ τότε $f \in A$ και στο B

Έστω ότι υπάρχει $\underline{b \in B \text{ και } b \notin \underline{P}}$

Αν $P \neq B$

κάθε $f \in \underline{P}$ ανήκει στο $A \cap B$

$a \cdot \underline{b} \in A \cap B \quad \forall\, \underline{a \in A}$

$\subset \underline{P}$ συνεπώς $b \notin \underline{P}$

$a \in \underline{P}$

$A \subseteq P$ ... $A \subseteq P$

$A \subset \mathfrak{p}$ αν $A \not\subseteq \mathfrak{p}$

$A \cap B \not\subseteq \mathfrak{p}$ ατοπο

$A = \mathfrak{p}.$

ή $\sqrt{\alpha} = N(A)$ ή $\sqrt{b} = N(A)$

$X = V(\alpha)$ $\quad$ $X = V(b)$

Αν $\sqrt{0} = N(A)$ είναι πρωτο τοτε X είναι αναγωγο.

Αν το $N(A)$ δεν είναι πρωτο ιδεωδες τοτε υπαρχουν $\alpha, b \in A$ με $a \notin N(A)$, $b \notin N(A)$ και $ab \in N(A)$

$a = \langle \alpha, N(A) \rangle$ $\quad$ $b = \langle b, N(A) \rangle$

$N(A) \not\subseteq$

$V(\alpha) \neq X$ $\quad$ $V(b) \neq X$

$N(\alpha) \not\subseteq a$ υπαρχει $\mathfrak{p}$ με $a \not\subseteq \mathfrak{p}$

γιατι αν ολα τα $\mathfrak{p}$ περιειχαν το a τοτε το

$V(\alpha) = \{\mathfrak{p} : \alpha \subseteq \mathfrak{p}\}$

$a \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p} = N(A).$

$\alpha \cap b = N(A) \Rightarrow X = V(\alpha) \cup V(b) = V(\alpha \cap b)$

---

③ X είναι reduced $\Leftrightarrow$ $N(A) = 0_A.$

Reduced : $\forall$ U ανοιχτο του X $\underbrace{\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(U)}_{\text{Δεν έχει μηδενοδυναμα}}$

$\mathcal{O} = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ στοιχεια

Reduced $\Rightarrow$ $\forall\, U$ ανοιχτο $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ reduced.

αρα και για $U = X$.

$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ reduced

Αντιστροφως εστω A reduced δακτυλιος, δηλαδη δεν εχει μηδενοδυναμα. Θα δειξουμε οτι $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ειναι reduced για καθε U ανοιχτο.

$$\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = A_f := \left\{ \frac{a}{f^m} : a \in A,\ f^m \text{ κατάλ. δυναμη.} \right\}$$

Εστω $\frac{\alpha}{f^s}$ ηταν μηδενοδυναμο.

$$\frac{\alpha^m}{(f^s)^m} = \frac{0}{1} \Rightarrow f^e(a^m - 0 \cdot f^{sm}) = \underline{f^e a^m} = 0$$

μηδενοδυναμο.

$$e < m \qquad f^e \alpha^m \xrightarrow{\times f^{m-e}} (f\alpha)^m = 0$$

$$e > m \qquad f^e \alpha^m \xrightarrow{\times \alpha^{e-m}} (f\alpha)^e = 0$$

$\frac{\alpha}{f^s}$ ειναι μηδενοδυναμο τότε $(f\alpha)^m = 0_A$ για κατάλ. δυναμη φυσικου.

$\Rightarrow f\alpha = 0$

Γιατι ο A δεν εχει μηδενοδυναμα στοιχεια.

$$\frac{a}{f^s} = \frac{\alpha f}{f^{s+1}} = 0$$

Τα Οι δακτύλιοι A_f δεν εχουν μηδενοδυναμα. $\rightsquigarrow$ $A_{\mathfrak{p}}$ εχουν μηδενοδυναμα

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \text{κατάλληλο υποσυνολο} \prod A_{\mathfrak{p}}$$

κλασεις

$\mathfrak{p}$ δεν έχουν μηδενοδύναμα

ισοδύναμα $(X_f, \frac{a}{f^s})$

4. Το X είναι ακέραιο αν και μόνο αν A είναι
είναι ακ. περιοχή.

$(X, \mathcal{O}_X)$ λέγεται ακέραιο αν για κάθε $U \subset X$
ο $\Gamma(\underline{U}, \mathcal{O}_X)$ είναι ακ περιοχή.

Αν το X είναι ακ. $\forall\, U$ ανοιχτό $\underset{\text{ακ. περιοχή}}{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)}$

πολύ περισσότερο για το ανοιχτό $U = X$.

Αν το X είναι ακ. περιοχή τότε
όλοι οι εντοπισμοί. $A_f = \left\{ \frac{a}{f^m},\ a \in A\ m \in \mathbb{N} \right\}$

$$A_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in A,\ b \notin \mathfrak{p} \right\}$$

$$\cap$$

$\mathrm{Quot}(A)$ το σώμα πηλίκο.

$\frac{a}{b}$

$$\frac{a_1}{b_1} \sim \frac{a_2}{b_2} \iff \exists\, s \in S^{\neq 0}$$

$$0 = \underbrace{s(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{A} \quad s \neq 0$$

είναι
ακ περιοχή $\quad \bigcirc = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$

Λήμμα X αναγωγο τοτε καθε μη κενο ανοιχτο υποσυνολο του X ειναι πυκνο και αναγωγο.

V ανοιχτο μη κενο υποσυνολο του. X

$\overline{V}$ κλειστοτητα του V

$$X = \underbrace{(X \setminus V)}_{\text{κλειστο (ως συμπληρωμα) ανοιχτου}} \cup \overline{V}$$

κλειστό ως κλειστοτητα.

$$X = F_1 \cup F_2 \Rightarrow \begin{array}{l} F_1 = X \\ F_2 = X \end{array}$$

όχι

$X \setminus V = X$
$\Rightarrow V = \emptyset$

$$\overline{V} = X$$

$$\underbrace{X = F_1 \cup F_2}_{\text{Το } X \text{ δεν γραφεται ως μη τετριμμενη ενωση κλειστων}} \Leftrightarrow \emptyset = F_1^c \cap F_2^c$$

Το $\emptyset$ δεν γραφεται ως μη τετριμμενη τομη ανοιχτων.

το X ειναι αναγωγο αν καθε ανοιχτο ειναι πυκνο αφου σε αυτη την περιπτωση δυο οποιαδηποτε μη κενα ανοιχτα εχουν ως πυκνα μη κενη τομή.

Ενα σχημα X ειναι ακέραιο. (Το X δεν είναι κατανανκη affine

αν και μονο αν το X ειναι **reduced.** και ανάγωγο

Αποδ. Ένα αλ. σχημα ειναι reduced (προφανες) στις αλ. περιοχες δεν έχω μηδενοδυναμα $f^n = 0 \Rightarrow f = 0$

Θα δειξουμε οτι καθε αλ. σχημα ειναι ανάγωγο.

Εστω πως όχι τοτε υπάρχαν κλειστα σύνολα F_1, F_2

$$X = F_1 \cup F_2, \quad F_1 \neq X, \quad F_2 \neq X.$$

$$U_1 = X \setminus F_2 = F_1 \setminus F_1 \cap F_2, \qquad U_2 = X - F_1 = F_2 \setminus F_1 \cap F_2$$

ανοιχτο   ανοιχτο

$F_1 \cup F_2$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

$$U = U_1 \cup U_2$$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \underbrace{\Gamma(U_1, \mathcal{O}_X)}_{\neq 0} \times \underbrace{\Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ δεν ειναι αλ περιοχη, άτοπο.

Κανεις δακτυλιος γινομενο $A_1 \times A_2$ δεν αλ. περιοχη

$(a,0)\cdot(0,b)=(0,0)$.

Ακ. σχήμα ⇒ ανηγμένο και ανάγωγο.

Αντιστρόφως έστω X ανηγμένο και ανάγωγο.

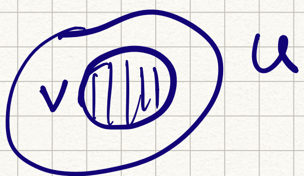
U ανοιχτό και υποθέτουμε ότι $f\cdot g=0$

Για κάποια $f,g\in\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ — στόχος είναι να δείξουμε ότι το $\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ είναι ακ. περιοχή.

$$F_1=\{x\in U: f(x)=0\}$$
$$F_2=\{x\in U: g(x)=0\}$$

X είναι ιδεώδες σε κάποιο αφινικό ανοιχτό

$f(x)=f\equiv 0 \bmod x$



$V=\operatorname{Spec}R$ αφινικό ανοιχτό που περιέχεται στο V.

Θέλουμε να δείξουμε ότι τα F_1,F_2 είναι κλειστά σύνολα.

$$\hat f = Res_{V,U}\, f$$
$$\hat g = Res_{V,U}\, g$$

$F_1\cap V = V(\hat f)$ ορισμός.

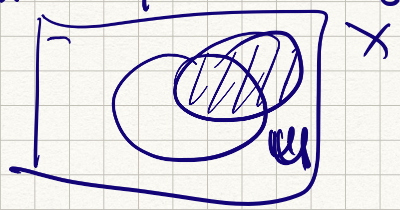
$F_2\cap V = V(\hat g)$ — κλειστά υποσύνολα του V

U_1 είναι ανάγωγο ~~...~~ U

δύο ανοιχτά U_1,U_2 μη κενά του U. Αυτά προέρχονται από ανοιχτά U_1',U_2' του X

Ποια είναι τα ανοιχτά ενός

ανοιχτου με την επαγομενη τοπολογία?



Τα ανοιχτα υποσυνολου είναι της μορφης

Σ του X ανοιχτο

$\Sigma \cap U \leftarrow$ ανοιχτο του X

αναγωγο

$\overline{\Sigma \cap U} = X$

ανοιχτο του X

ανοιχτο του U

$U \cap X = U$.

$U = F_1 \cup F_2$ ενωση κλειστων, U αναγωγο

$U = F_1$ ή $U = F_2$.

Εστω $U = F_1$ και το ανοιχτο αφινικο $V \subset U$

$V = V(\hat{f})$ $\qquad U = F_1$ οποτε μηδενισματα του $\hat{f}$.

εδω έχει νοημα το $V(\hat{f})$

$$X_f \supset X_g \Rightarrow g \in \sqrt{f}$$

$X_f = D(f)$, $X_g = D(g)$

$\emptyset = X_0 \supset X_f$ $\qquad \hat{f} \neq 0$ εχουμε οτι

το $\hat{f}$ είναι μηδενδυναμο. $\underset{X \text{ reduced}}{\Rightarrow}$ $\hat{f} = 0$

Δηλαδή το f είναι 0 αν περιορισμεί σε οποιοδήποτε ανοιχτό της κάλυψης του X συνεπώς το $\underline{f=0}$ στο U.

<u>Μορφισμοί</u>

$f: X \to Y$ μορφισμός σχημάτων

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$

$f_1 : X \to Y$
συνεχής

$f_* \mathcal{O}_X$ sheaf στο Y

$f_* \mathcal{O}_X (U) = \mathcal{O}_X (f^{-1}(U))$
ανοιχτό του Y

ανοιχτό του X $f^{-1}(U) \to U$

$\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$

$\mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ sheaf του Y

$\partial : \underline{\underline{\mathcal{O}_Y}} \to f_* \mathcal{O}_X.$

μορφισμός από sheaves

Έστω $U_i = \operatorname{Spec} A_i \quad i \in I$ αφινικό κάλυμμα του Y

αν κάθε $\underline{f^{-1}(U_i)}$ ανοιχτό του X

έχει αφινικό κάλυμμα $\underline{V_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}}$

A_{ij} να είναι <u>πεπ. παραγόμενες A_i</u> άλγεβρες

$\mathcal{O}_Y(U_i) = A_i \longrightarrow A_{ij}$ πε A_i-αλγεβρες

ο f θα λεγεται τοπικα πεπερασμενου τυπου

πεπερασμενου τυπου

Αν για καθε i τα A_{ij} ειναι πεπ. το πληθ

$f: X \longrightarrow Y$ θα λεγεται πεπερασμενος

υπαρχει ανοικτο καλυμμα του X ωστε.

καθε $f^{-1}(U_i)$ να ειναι αφινικο.

$= \operatorname{Spec} B_i$ και το B_i

να ειναι πεπερασμενα παραγωμενο A_i module.

k σώμα

$k[x]$ ειναι πεπ. παραγωμενη k-αλγεβρα.

Αλλα όχι πεπεπ. παραγώμενο k-module.

$x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ $k[x]$

με πράξεις του δακτυλιου

$k[x]$ έχει απειρη διασταση. $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$

απειρη βαση