Αλγεβρική Γεωμετρία Εξετάσεις 22 Ιουνίου 2016

Θεμα 1.

(1) Να αποδειχτεί ότι τα μέγιστα ιδεώδη του δακτυλίου $k[x_1, \ldots, x_n]$, όπου k είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα είναι της μορφής $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$, όπου $a_1, \ldots, a_n \in k$.
(2) Τι συμβαίνει αν το k δεν είναι αλγεβρικά κλειστό;
(3) Ισχύει ότι κάθε πρώτο ιδεώδες είναι μέγιστο;
(4) Να αποδειχθεί ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του $k[x]$ είναι μέγιστο.

Θέμα 2

(1) Να οριστεί η τοπολογία Zariski στο $\mathrm{Spec}(R)$, όπου το R είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.
(2) Να αποδειχθεί ότι η τοπολογία Zariski αποτελεί πράγματι μία τοπολογία.
(3) Είναι η τοπολογία Zariski, Hausdorf;
(4) Να αποδειχθεί ότι το $\mathrm{Spec}(R)$ είναι quasicompact.

Θέμα 3.

(1) Δίνεται $f \in R$. Να αποδειχθεί ότι $\sqrt{\langle f \rangle} = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R): f \in P} P$.
(2) Να δοθεί ένας λόγος που χρειαζόμαστε το $\mathrm{Spec}(R)$ και δεν ήταν αρκετό το σύνολο των μεγίστων ιδεωδών.
(3) Να περιγραφεί πως το σύνολο $\mathbb{Z}$, μπορεί να θεωρηθεί ως σύνολο φυσιολογικών συναρτήσεων επί το $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.
(4) Να αποδειχθεί ότι αν f είναι nilpotent τότε $\mathrm{Spec}(R_f) = \emptyset$.

Θέμα 4.

(1) Πότε ένα σχήμα λέγεται συνεκτικό; Να αποδειχθεί ότι αν A αντιμεταθετικός δακτύλιος το $\mathrm{Spec}(A \times A)$ δεν είναι συνεκτικό.
(2) Τι είναι ένας συναρτητής; Πότε ένας συναρτητής λέγεται αναπαραστίσιμος;
(3) Να περιγραφεί το σύνολο $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$.
(4) Δίνεται ένα πολ/κό σύνολο S. Να οριστεί το RS^{-1} και να συγκριθούν τα $\mathrm{Spec}(R)$ και $\mathrm{Spec} RS^{-1}$.

Όλοι οι δακτύλιοι είναι Noether, αντιμεταθετικοί με μονάδα.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες 45 λεπτά