Ύλη μαθήματος και πιθανά θέματα

Αλγεβρική Γεωμετρία 2016

1. Να αποδειχθεί ότι

(i) $V(\mathcal{I}) \cup V(\mathcal{J}) = V(\mathcal{I} \cap \mathcal{J})$

(ii) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$

(iii) $V(I) \supset V(\mathcal{J})$ για $\sqrt{I} \subset \sqrt{\mathcal{J}}$

2. Να αποδειχθεί ότι το ριζικό ιδεώδους είναι ιδεώδες

3. Να αποδειχθεί ότι τα μέγιστα ιδεώδη του $k[x_1,\dots,x_n]$ όπου k αλγεβρικά κλειστό σώμα είναι της μορφής

$(x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n)$

4. Αν $\mathcal{J} \triangleleft k[x_1,\dots,x_n]$ να δειχτεί ότι $I(V(\mathcal{J})) = \sqrt{\mathcal{J}}$

5. Να οριστεί η τοπολογία Zariski στο $\mathbb{Q}[x]$ και να μελετηθούν τα κλειστά σύνολα.

6. Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Z}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία Zariski.

7. Να ορισθεί η έννοια του ανάγωγου αλγεβρικού συνόλου και να αποδειχθεί ένα αλγεβρικό σύνολο είναι ανάγωγο αν και μόνο αν το $I(V)$ είναι πρώτο ιδεώδες

8. Να δοθεί η έννοια του μορφισμού μεταξύ αφινικών αλγεβρικών συνόλων.

9. Να δειχθεί ότι κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι πρώτο. Ισχύει το αντίστροφο; Να δειχθεί ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του $k[x]$, όπου k σώμα είναι μέγιστο.

10. Να περιγραφεί η αντιστοιχία ανάμεσα σε σημεία αλγεβρικού συνόλου V και το σύνολο των μεγίστων ιδεωδών.

11. Να δειχθεί ότι τα σύνολα $D(f)=\{ m \in \mathrm{Spm}\, R, f \notin m \}$ αποτελούν βάση ανοιχτών της τοπολογίας Zariski.

12. Να ορισθεί ο προβολικός χώρος και να αιτιολογηθεί γιατί τα προβολικά αλγεβρικά σύνολα απαιτούν ομογενή πολυώνυμα για να ορισθούν.

13. Να ορισθούν τα ομογενή ιδεώδη με δύο διαφορετικούς τρόπους και να αποδειχθεί ότι οι δυο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

14. Να ορισθεί η τοπολογία Zariski στο $\mathrm{Spec}\, R$ και να αποδειχθεί ότι είναι πράγματι τοπολογία.

15. Να βρεθεί μια βάση ανοιχτών για το $\mathrm{Spec}\, R$.

16. Να περιγραφούν τα $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$ και $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[x]$.

17. Να ορισθεί το generic point.

18. Να περιγραφεί πως ένας ομομορφισμός μεταθετικών δακτυλίων $\varphi: R \to S$ επάγει $\varphi^*: \mathrm{Spec}\, S \to \mathrm{Spec}\, R$.

19. Να αποδειχτεί ότι το $\mathrm{Spec}\, R$ είναι quasicompact.

20. Είναι Hausdorff η τοπολογία Zariski;

21. Να αποδειχθεί ότι

$$X_f \cap X_g = X_{f\cdot g} \quad , \quad X_f \supset X_g \iff g \in \sqrt{(f)}$$

22. Να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{f} = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}\, R \,:\, f \in P} P.$$

23. Δίνεται S πολ/κο σύνολο. Να οριστεί το RS^{-1} και να συγκριθούν τα $\mathrm{Spec}\, R$ και $\mathrm{Spec}\, RS^{-1}$

24. Να αποδειχθεί ότι αν f nilpotent $\operatorname{Spec} R_f = \emptyset$.

25. Να δοθεί ο ορισμός του sheaf επί τοπολογικού χώρου και να δοθεί ο ορισμός της κοτσάνας (stalk!) ενός σημείου σε ένα sheaf

26. Να δωθεί ο ορισμός ένος affine scheme.

27. Να εξηγηθεί πως τα στοιχεία $n \in \mathbb{Z}$ μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις στο $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

28. Να δειχθεί ότι

$$\varinjlim_{X_f \in U_p} R_f \cong R_p, \quad \text{για } p \in \operatorname{Spec} R.$$

29. Να δοθεί ο κατηγορικός ορισμός γινομένου αντικειμένων σε μια κατηγορία και να δειχθεί ότι υπάρχουν γινόμενα στην κατηγορία των affine schemes.

30. Να περιγραφεί το φυσιολογικό sheaf συναρτήσεων στο $\operatorname{Spec} R$. Ποια είναι η συνάρτηση περιορισμού;

31. Να δωθεί ο ορισμός του Ringed space, καθώς και του local ringed space. Πως ορίζεται ένας μορφισμός ανάμεσα σε localy ringed spaces

32. Να δοθεί ο ορισμός ενος graded ring S και του $\operatorname{Proj}(S)$.

33. Ποτε ένα σχήμα λέγεται συνεκτικό; Να αποδειχθεί αν A αντιμεταθετικός δακτύλιος το $\operatorname{Spec}(A \times A)$ δεν είναι συνεκτικό

34. Πότε ένα σχήμα λέγεται reduced; Να δειχθεί ότι $X = \operatorname{Spec} A$ είναι reduced αν και μόνο αν $N(A) = \sqrt{0}$ είναι $= 0$.

35. Ποτε ένα affine scheme είναι irreducible; Να διατυπωθεί και να αποδειχτεί ένα κριτήριο σχετικό με το $\sqrt{0}$.

35. Πότε ένα σχήμα λέγεται integral?
Να δειχθεί ότι X integral $\Longleftrightarrow$ X reduced και irreducible

36. Να οριστεί το σχήμα, όπως και το ανοικτό και κλειστό subscheme.

37. Τι είναι ένας συναρτητής; Πότε ένας συναρτητής λέγεται representable;

38. Πως ορίζεται ένας μορφισμός μεταξύ σχημάτων;

39. Πότε ένας μορφισμός λέγεται:

- locally of finite type
- finite

Να δοθούν παραδείγματα μορφισμών που να έχουν τις παραπάνω 2 ιδιότητες αλλά και μορφισμών που να μην τις έχουν