

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

Μεταπτυχιακή Ανάλυση II

Σημειώσεις παραδόσεων

Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης

Αθήνα 2012

Οι σημειώσεις αυτές έχουν ως στόχο την διευκόλυνση των φοιτητών οι οποίοι παρακολουθούν το μάθημα της Μεταπτυχιακής Ανάλυσης II.

Ελπίζω ότι σε κάποιο βαθμό εξυπηρετούν αυτό το στόχο. Ακόμα ελπίζω ότι με την βοήθεια των φοιτητών και με την πάροδο του χρόνου θα είμαι σε θέση να τις βελτιώνω.

Καθόσον αφορά τον συμβολισμό με  $K$  συμβολίζουμε είτε το σώμα των πραγματικών  $R$  ή το σώμα των μιγαδικών  $C$ .

Αν  $(X, \|\cdot\|)$  είναι χώρος με νόρμα τότε  $B(x, \varepsilon), \hat{B}(x, \varepsilon)$  συμβολίζουμε την ανοικτή αντίστοιχα κλειστή σφαίρα κέντρου  $x \in X$  και ακτίνας  $\varepsilon > 0$ . Ιδιαίτερα με  $B_x, \hat{B}_x$  συμβολίζουμε την ανοικτή αντίστοιχα κλειστή μοναδιαία σφαίρα του  $X$ .

Οφείλω πολλές ευχαριστίες στον φίλο μου, καθηγητή Μαθηματικών της μέσης Εκπαίδευσης, Κώστα Θανόπουλο ο οποίος αφιέρωσε σημαντικό μέρος του χρόνου του για να γράψει ( και αυτές ) τις χειρόγραφες σημειώσεις του μαθήματος στο Word.

Αθήνα Σεπτέμβριος 2012

Σ.Κ. Μερκουράκης

## Περιεχόμενα

<b>1 Χώροι πηλίκα</b>	<b>1</b>
2 Πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα και προβολές σε χώρους με νόρμα.	11
Ασκήσεις	16
<b>3 Τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι</b>	
3.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί	20
Ασκήσεις	28
3.2 Τοπικά κυρτοί χώροι- βασικές ιδιότητες	32
3.3 Το συναρτησοειδές του Minkowski και μετρικοποιησιμότητα σε τοπικά κυρτούς χώρους	40
Ασκήσεις	55
3.4 Παραδείγματα – Οι χώροι $C(\Omega)$ , $H(\Omega)$ , $C^\infty(I)$ και $L_p = L_p[0,1]$ , $0 < p < 1$	61
3.5 Το θεώρημα Hahn- Banach σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους – Διαχωριστικό θεώρημα Hahn- Banach.	71
Ασκήσεις	76
<b>4 Ασθενείς τοπολογίες σε χώρους με νόρμα</b>	
4.1 Βασικά θεωρήματα: Mazur, Alaoglu, Goldstine ...	81
4.2 Αυτοπάθεια και ασθενής συμπάγεια	94
Ασκήσεις	100
<b>5 Το θεώρημα Krein-Milman – Βασικές ιδιότητες συμπαγών και κυρτών συνόλων</b>	<b>108</b>
Ασκήσεις	123
Παράρτημα 1	128

## Βιβλιογραφία

- 1 [A] Σ. Αργυρός, Σημειώσεις παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης, ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ, Αθήνα 2004
- [B] W.G. Bade, The Banach Space  $C(S)$ , Aarhus Universitet Matematisk Institut, 1971
- [Γ] Α. Γιαννόπουλος, Μεταπτυχιακή Ανάλυση II, Πρόχειρες Σημειώσεις, Αθήνα, 2007
- [D] J. Diestel, Sequences and Series in Banach spaces, GTM,92, Springer, 1984
- [F-H-H-M-P-Z] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, J. Pelant, V. Montesinos and V. Zizler, Functional Analysis and Infinite Dimensional Geometry, CMSB in Mathematics, Springer, 2001
- [F-H-H-M-Z] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos and V. Zizler Banach Space Theory. The basis for Linear and Nonlinear Analysis, CMSB in Mathematics, Springer, 2011
- [L – T] J. Lindenstrauss and L. Tzatriri, Classical Banach Spaces I, Sequence Spaces, Springer, 1977
- [M] R. E. Megginson, An introduction to Banach Space Theory GTM 183, Springer, 1998
- [Με] Σ. Μερκουράκης, Μεταπτυχιακή Συναρτησιακή Ανάλυση, Χειρόγραφες Σημειώσεις Παραδόσεων, Αθήνα, 1997
- [Μη] Θ. Μήτσης. Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης.
- [N – Z – K – Φ ] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας και Β. Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1988
- [R] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill, 1973
- [T] Λ. Τσίτσας, Μαθήματα Συναρτησιακής Ανάλυσης, Αθήνα, 1984.