

3 Τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι

3.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί. Έστω E διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος K

$$(K = \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}) \text{ και } A \subseteq E.$$

(α) Το A λέγεται κυρτό αν, για κάθε $x, y \in A$, για κάθε $\lambda \in [0, 1]$

$$\text{ισχύει ότι } \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

(β) Το A λέγεται ισορροπημένο αν, για κάθε $x \in A$ για κάθε $\lambda \in K$ με $|\lambda| \leq 1$ ισχύει ότι

$$\lambda x \in A, \text{ δηλαδή } A = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A.$$

Η κυρτή θήκη $co(A)$ ενός συνόλου ορίζεται ως η τομή όλων των κυρτών υποσυνόλων του E που περιέχουν το A .

Ανάλογα ορίζεται και η ισορροπημένη θήκη $b(A)$ του A . Οι ορισμοί αυτοί δικαιολογούνται από την παρατήρηση 3.1.1 (2) πιο κάτω.

(γ) Το A λέγεται απορροφούν αν για κάθε $x \in E$ υπάρχει $\lambda_x > 0$ ώστε, $t \in \mathbb{R}$ και $0 \leq t \leq \lambda_x \Rightarrow tx \in A$

Παρατηρήσεις 3.1.1 Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες για τις έννοιες που ορίσαμε παραπάνω.

1) Αν A, B είναι κυρτά (αντιστοίχως ισορροπημένα) υποσύνολα του E και $\kappa, \lambda \in K$ τότε και το $\kappa A + \lambda B \subseteq E$ είναι κυρτό (αντιστοίχως ισορροπημένο).

2) Η τομή μιας οικογένειας κυρτών (αντιστοίχως ισορροπημένων) συνόλων είναι κυρτό (αντιστοίχως ισορροπημένο) σύνολο. Εξάλλου η ένωση μιας οικογένειας ισορροπημένων συνόλων είναι ισορροπημένο σύνολο.

3) Αν $A \subseteq E$ είναι απορροφούν σύνολο τότε $0 \in A$ και $\langle A \rangle = E$, θα διαπιστώσουμε σύντομα ότι οι περιοχές του $0 \in E$ σε ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο είναι απορροφούσες. Από την άλλη μεριά ένα απορροφούν υποσύνολο $A \subseteq E$ περιέχει σε κάθε διεύθυνση $x \neq 0$ ένα διάστημα $[-\lambda_x x, \lambda_x x]$, ($\lambda_x > 0$). Παρατηρούμε ακόμη ότι η τομή πεπερασμένου πλήθους απορροφούντων συνόλων είναι απορροφούν σύνολο.

4) Αν $A \neq \emptyset$, ισορροπημένο τότε $0 \in A$ και $A = -A$.

Επίσης ισχύουν τα ακόλουθα: (α) Αν $\lambda, \mu \in K$ ώστε $|\lambda| \leq |\mu|$ τότε $\lambda A \subseteq \mu A$ και άρα $\lambda A = |\lambda| A, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Η κυρτή θήκη $co(A)$ είναι ισορροπημένο σύνολο.

Παράδειγμα. 1) Αν $E = C$ (ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος διάστασης ίσης με 1) τότε τα ισορροπημένα υποσύνολα του E είναι το \emptyset , το C και κάθε δίσκος (ανοικτός ή κλειστός) με κέντρο το 0. Αν $E = R^2$ (ένας διανυσματικός χώρος διάστασης ίσης με 2 επί του R) τότε υπάρχουν πολύ περισσότερα ισορροπημένα σύνολα. Για παράδειγμα, κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει μέσο το $(0,0)$ ή κάθε ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$, ή ακόμη κάθε κυρτή γωνία μαζί με την κατακορυφήν γωνία της (με κορυφή στο $(0,0)$) είναι ισορροπημένα σύνολα.

2) Αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ η ανοικτή (αντιστοίχως κλειστή) σφαίρα $B(x, \varepsilon)$ (αντιστοίχως $\hat{B}(x, \varepsilon)$) είναι κυρτό υποσύνολο του X . Οι σφαίρες $B(0, \varepsilon)$ και $\hat{B}(0, \varepsilon)$ είναι επιπλέον ισορροπημένα και απορροφούνται υποσύνολα του X .

Ορισμός 3.1.2 Έστω E διανυσματικός χώρος επί του σώματος K .

Υποθέτουμε ότι T είναι μια τοπολογία επί του E ώστε:

(ι) Η πράξη της πρόσθεσης $+: E \times E \ni (x, y) \rightarrow x + y \in E$ είναι συνεχής και

(ii) Η πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$K \times E \ni (\lambda, x) \rightarrow \lambda x \in E$$

είναι συνεχής.

(Ο $E \times E$ και ο $K \times E$, θεωρούνται βέβαια με τις αντίστοιχες τοπολογίες γινόμενο).

Κάτω από αυτές τις συνθήκες λέμε ότι η τοπολογία T είναι συμβατή με τη δομή του διανυσματικού χώρου και ο (E, T) (ή για απλότητα ο E) είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος (τ.δ.χ.) ή ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος (τ.γ.χ.).

Παρατηρήσεις 3.1.3 1) Για κάθε $a \in E$ και κάθε $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$, οι απεικονίσεις

$$\tau_a : E \rightarrow E : \tau_a(x) = a + x \quad \text{ο τελεστής της μεταφοράς,}$$

$$\sigma_\lambda : E \rightarrow E : \sigma_\lambda(x) = \lambda x$$

είναι ομοιομορφισμοί του E επί του E . Ακόμη σημειώνουμε ότι, $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$ και $\sigma_\lambda^{-1} = \sigma_{\frac{1}{\lambda}}$

(Άσκηση)

2) Από την προηγούμενη παρατήρηση έπεται αμέσως ότι τοπολογία ενός τ.δ.χ. E είναι πλήρως ορισμένη, αν γνωρίζουμε μια βάση περιοχών B του $0 \in E$, διότι τότε η $x + B = \{x + V : V \in B\}$ είναι βάση περιοχών του $x \in E$.

Πρόταση 3.1.4 Έστω E τ.δ.χ. τότε ισχύουν:

$$(i) \overline{x + A} = x + \overline{A}, x \in E, A \subseteq E.$$

$$(ii) \overline{(\lambda A)} = \lambda \cdot \overline{A}, \lambda \in K, \lambda \neq 0, A \subseteq E.$$

$$(iii) \overline{A + B} \subseteq \overline{A + B}, A, B \subseteq E.$$

(iv) Αν $A, G \subseteq E$ με G ανοικτό τότε $A + G$ ανοικτό στον E .

$$(v) A + B^o \subseteq (A + B)^o.$$

$$(vi) \text{ Αν } A \subseteq E \text{ τότε } \overline{A} = \bigcap \{A + G : G \text{ ανοικτό και } 0 \in G\}.$$

(vii) Αν Y διανυσματικός υπόχωρος του E τότε και ο \overline{Y} είναι διανυσματικός υπόχωρος του E .

(viii) Αν το $A \subseteq E$ είναι ισορροπημένο τότε και το \overline{A} είναι ισορροπημένο.

(ix) Αν το $A \subseteq E$ είναι ισορροπημένο και $0 \in A^o$ τότε και το A^o είναι ισορροπημένο.

(x) Αν το A είναι κυρτό τότε και τα A^o και \overline{A} είναι κυρτά. Αν το A είναι ανοικτό τότε η $co(A)$ είναι ανοικτό σύνολο

(xi) Αν το A είναι ανοικτό (και κυρτό) και $0 \in A$, τότε υπάρχει ανοικτό ισορροπημένο

(και κυρτό) C ώστε $0 \in C \subseteq A$.

Απόδειξη Αποδεικνύουμε ενδεικτικά κάποιους από τους ισχυρισμούς της πρότασης και τους υπόλοιπους τους αφήνουμε ως άσκηση.

(iii) Επειδή η πρόσθεση $f : E \times E \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) = x + y \in E$ είναι συνεχής θα έχουμε.

$$\overline{A + B} = f(\overline{A \times B}) = f(\overline{A \times B}) \subseteq \overline{f(A \times B)} = \overline{A + B}$$

(iv) $A + G = \bigcup \{x + G : x \in A\}$. Επειδή κάθε $x + G$ είναι ανοικτό (ο τελεστής της μεταφοράς τ_x είναι ομοιομορφισμός) έπεται το συμπέρασμα.

(νιι) Έστω $|\lambda| \leq 1$, τότε από την (ι) έχουμε $\overline{\lambda A} = \overline{\lambda A}$. Εφόσον το A είναι ισορροπημένο έπεται ότι $\overline{\lambda A} = \overline{\lambda A} \subseteq \overline{A}$.

(ιx) Έστω $|\lambda| \leq 1$ με $\lambda \neq 0$. Επειδή η απεικόνιση $\sigma_\lambda : E \rightarrow E : \sigma_\lambda(x) = \lambda x$ είναι ομοιομορφισμός και το A° είναι μη κενό αφού $0 \in A^\circ$, έπεται ότι

$$\lambda A^\circ = (\lambda A)^\circ \subseteq A^\circ$$

Επειδή το $0 \in A^\circ$ έπεται ότι $\lambda A^\circ \subseteq A^\circ$ ακόμη και αν $\lambda=0$.

(x) Αποδεικνύουμε το δεύτερο μέρος του ισχυρισμού. Υποθέτουμε ότι το A είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in \text{co}(A)$, όπου $x_1, \dots, x_n \in A$ και $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Υποθέτουμε ότι $\lambda_1 > 0$. Αν V είναι ανοικτή περιοχή του x_1 ώστε $V \subseteq A$ τότε το ανοικτό σύνολο $U = \lambda_1 V + (\lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)$ περιέχεται προφανώς στην $\text{co}(A)$ και $x \in U$. Επομένως ή $\text{co}(A)$ είναι ανοικτό σύνολο.

(xi) Από την συνέχεια του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο $(0,0)$ υπάρχουν $G \subseteq E$ ανοικτό με $0 \in G$ και $\delta > 0$, ώστε $\lambda G \subseteq A$ για κάθε $\lambda \in K$ με $|\lambda| \leq \delta$ θέτουμε $H = \delta G$ (προφανώς H ανοικτό και $0 \in H$) και $C = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda H$. Πρέπει να είναι σαφές ότι το C είναι ανοικτό και ισορροπημένο σύνολο και άρα $0 \in C \subseteq A$. (Το C είναι η ισορροπημένη θήκη του H) Ας υποθέσουμε τώρα ότι το A είναι επί πλέον και κυρτό.

Θέτουμε $L = \text{co}(C)$, επειδή το A κυρτό το $L \subseteq A$. Από την Παρατήρηση 3.1.1(4) το L είναι ισορροπημένο και από τον ισχυρισμό (x) είναι ανοικτό (και κυρτό) σύνολο.

Θεώρημα 3.1.5 Έστω E τ.δ.χ. Τότε υπάρχει μια βάση περιοχών B του $0 \in E$ τέτοια ώστε:

(i) Κάθε $U \in B$ είναι (κλειστό) ισορροπημένο και απορροφούν.

(ii) Για κάθε $U \in B$ υπάρχει $W \in B$: $W + W \subseteq U$.

(iii) Αν $U \in B$ και $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, τότε $\lambda U \in B$.

Απόδειξη Παρατηρούμε καταρχήν ότι κάθε περιοχή V του $0 \in E$ είναι απορροφούν σύνολο. Έστω $x_0 \in E$, επειδή η απεικόνιση $\varphi : \lambda \in K \rightarrow \varphi(x) = \lambda x_0 \in E$ είναι συνεχής

(στο K και άρα) στο $0 \in K$ και $\varphi(0) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\lambda \in K$ και

$$|\lambda| \leq \delta \Rightarrow \varphi(\lambda) = \lambda x_0 \in V$$

(Ουσιαστικά εδώ ταυτίζουμε τον χώρο K με τον χώρο $K \times \{x_0\}$.)

Από τον ισχυρισμό (x ι) της πρότασης 3.1.4 συμπεραίνουμε αμέσως ότι οι ισορροπημένες και απορροφούσες περιοχές του $0 \in E$ συνιστούν μια βάση περιοχών έστω B του $0 \in E$. Είναι τώρα σαφές ότι από την συνέχεια της πρόσθεσης στο $(0, 0)$ ισχύει η (ιι) και από το γεγονός ότι ο τελεστής $\sigma_\lambda : E \rightarrow E$ είναι ομοιομορφισμός έπεται η (ιι).

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε μέλος της B είναι κλειστό σύνολο. Πράγματι, έστω $U \in B$, θα δείξουμε ότι υπάρχει μια κλειστή και ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ που περιέχεται στην U . Έστω $W \in B$ ώστε $W + W \subseteq U$, τότε ισχύει ότι $\overline{W} \subseteq U$. Για να το αποδείξουμε θεωρούμε $x \in \overline{W}$, τότε $(x + W) \cap W \neq \emptyset$.

Έστω $y \in E$, ώστε $y \in x + W$ και $y \in W$, τότε έχουμε ότι, $x + y \in x + W$ και άρα, $x \in x + W - y \subseteq (x + W) - (x + W) = W - W = W + W \subseteq U$.

($W = -W$, αφού το W είναι ισορροπημένο σύνολο).

Έπεται προφανώς ότι η $B' = \{\overline{W} : W \in B\}$ είναι μια βάση κλειστών ισορροπημένων περιοχών του $0 \in E$ που ικανοποιεί τους ισχυρισμούς (ι) και (ιι).

Πρόταση 3.1.6 Έστω E τ.δ.χ.. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο E είναι Hausdorff.

(ιι) Το $\{0\}$ είναι κλειστό (άρα τα μονοσύνολα του E είναι κλειστά).

(ιιι) Ισχύει ότι, $\{0\} = \bigcap \{U : U \text{ περιοχή του } 0 \in E\}$

Απόδειξη (ι) \Rightarrow (ιι). Σε κάθε χώρο Hausdorff τα μονοσύνολα είναι κλειστά.

(ιι) \Rightarrow (ιιι) Το σύνολο $E \setminus \{0\}$ είναι ανοικτό, άρα αν $x \neq 0$ τότε υπάρχει V περιοχή του x της μορφής $V = x + W$, για κάποια ισορροπημένη περιοχή W του $0 \in E$, ώστε $V \subseteq E \setminus \{0\}$ και άρα $0 \notin V = x + W$. Έπεται ότι $-x \notin -x + x + W = -W$ το οποίο σημαίνει ότι $x \notin W$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το x δεν μπορεί να ανήκει στην τομή όλων των περιοχών του $0 \in E$, συνεπώς η τομή αυτή ισούται αναγκαία με το $\{0\}$.

(ιιι) \Rightarrow (ι). Έστω $x, y \in E$ με $x \neq y$. Τότε υπάρχει περιοχή U του $0 \in E$ ώστε $x - y \notin U$. Έστω W ισορροπημένη περιοχή του $0 \in E$ ώστε $W + W \subseteq U$. Τότε ισχύει ότι $(x + W) \cap (y + W) = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχε $z \in E$ ώστε $z \in x + W$ και $z \in y + W$, τότε $x - y = (z - y) - (z - x) \in W - W = W + W \subseteq U$, άτοπο.

Παρατηρήσεις 3.1.7. 1) Έστω E Hausdorff τ.δ.χ. Έπεται τότε από το θεώρημα 3.1.5 ότι ο E είναι κανονικός (δηλαδή T_3) τοπολογικός χώρος, αφού σε κάθε σημείο $x \in E$ έχει μια βάση περιοχών που αποτελείται από κλειστά σύνολα. Επιπροσθέτως μπορεί να αποδειχθεί

ότι κάθε Hausdorff τ.δ.χ. είναι τελείως κανονικός ($T_{\frac{3}{2}}$). (Πρβλ. το βιβλίο [M], Θεώρημα 2.2.14, σελίδα 174)

2) Έστω E (Hausdorff) τ.δ.χ., $(x_a) \subseteq E$ ένα δίκτυο στον E και $x \in E$. Τότε αποδεικνύεται, εύκολα ότι,

$$x_a \rightarrow x \Leftrightarrow x_a - x \rightarrow 0.$$

Παραδείγματα 3.1.8. 1) Έστω $(E, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε ο E με την τοπολογία που ορίζει η νόρμα (μετρικοποιήσιμη τοπολογία) είναι ένας Hausdorff τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Πράγματι, έστω $(x_n, y_n), n \geq 1$, ακολουθία στον $E \times E$ και $(x, y) \in E \times E$ ώστε $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow x + y$. Άρα η πρόσθεση του χώρου E είναι συνεχής.

Έστω $(\lambda_n, x_n), n \geq 1$, ακολουθία στον $K \times E$ και $(\lambda, x) \in K \times E$ ώστε $(\lambda_n, x_n) \rightarrow (\lambda, x) \Leftrightarrow \lambda_n \rightarrow \lambda$ και $x_n \rightarrow x \Rightarrow \lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$.

Έτσι και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι συνεχής και ο $(E, \|\cdot\|)$ είναι τ.δ.χ.

2) Έστω $E = R^N =$ ο χώρος των ακολουθιών πραγματικών αριθμών με την τοπολογία γινόμενο (τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο) T . Τότε ο (E, T) είναι τ.δ.χ. Hausdorff.

Πράγματι, καταρχήν η τοπολογία γινόμενο T στον E είναι μετρικοποιήσιμη και μια ακολουθία $(f_n) \subseteq E$ συγκλίνει στην $f \in E$ ως προς T αν και μόνο αν η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο (επί του N) δηλαδή $f_n(k) \rightarrow f(k), \forall k \in N$. Έστω $(f_n, g_n), n \geq 1$ ακολουθία στον $E \times E$ και $(f, g) \in E \times E$ ώστε $(f_n, g_n) \rightarrow (f, g)$ στον τοπολογικό χώρο $E \times E$, τότε $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ κατά σημείο και επομένως $f_n + g_n \rightarrow f + g$ κατά σημείο. Έπεται ότι η πρόσθεση στον χώρο E είναι συνεχής συνάρτηση. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στον χώρο E είναι συνεχής συνάρτηση και ο χώρος (E, T) είναι τ.δ.χ.

Σημειώνουμε ότι όπως θα αποδείξουμε αργότερα η τοπολογία T του χώρου E δεν επάγεται από μια νόρμα.

3) Έστω E ένας (μη τετριμμένος) διανυσματικός χώρος επί του σώματος K . Τότε η τοπολογία $T = \{\emptyset, E\}$ είναι συμβατή με τη διανυσματική δομή του E και επομένως κάνει τον E έναν τ.δ.χ., αλλά βέβαια δεν είναι Hausdorff.

Από την άλλη μεριά η διακριτή τοπολογία $T = P(E)$ (κάθε υποσύνολο του E θεωρείται ως ανοικτό) δεν είναι συμβατή με τη διανυσματική δομή του E . Πράγματι, ας υποθέσουμε

ότι ο (E, T) είναι ένας τ.δ.χ., θεωρούμε ένα $x \in E$ με $x \neq 0$, τότε από το πόρισμα 3.1.12 παρακάτω η απεικόνιση $\lambda \in K \rightarrow \lambda x \in E$ είναι ένας ομοιομορφισμός (η διακριτή τοπολογία είναι Hausdorff), επομένως το σώμα $K (= R \text{ ή } C)$ θα ήταν ομοιομορφικό με έναν υπόχωρο του E και η τοπολογία του K θα ήταν διακριτή, άτοπο.

4) Έστω (E, T) τ.δ.χ.. Τότε κάθε διανυσματικός υπόχωρος F του E είναι με την σχετική τοπολογία που επάγεται από τον (E, T) είναι τ.δ.χ..

5) Έστω $(E_i)_{i \in I}$ οικογένεια τ.δ.χ. επί του ίδιου σώματος K . Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $E = \prod_{i \in I} E_i$ είναι (όπως εύκολα αποδεικνύεται) με την τοπολογία γινόμενο και τις συνήθεις κατά συντεταγμένες πράξεις ένας τ.δ.χ. επί του K . Ιδιαίτερα ο $K^n, n \geq 1$ είναι με την τοπολογία γινόμενο ένας τ.δ.χ.. Η τοπολογία γινόμενο βέβαια συμπίπτει με την τοπολογία της (οποιαδήποτε) νόρμας επί του K^n (γιατί ;).

Στο εξής θα υποθέτουμε ότι όλοι οι τοπολογικοί γραμμικοί χώροι που θεωρούμε είναι Hausdorff.

Πρόταση 3.1.9 Έστω E, F τ.δ.χ. και $T : E \rightarrow F$ γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η T είναι συνεχής.
- (ii) Η T είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in E$
- (iii) Η T είναι συνεχής στο $0 \in E$.

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii) Προφανές.

(ii) \Rightarrow (iii) Έστω V περιοχή του $0 \in F$. Τότε το $T(x_0) + V$ είναι περιοχή του $T(x_0)$ και συνεπώς υπάρχει U περιοχή του $0 \in E$ ώστε $T(x_0 + U) = T(x_0) + T(U) \subseteq T(x_0) + V$, συνεπώς, $T(U) \subseteq V$ και άρα η T είναι συνεχής στο $0 \in E$.

(iii) \Rightarrow (i) Έστω $x_0 \in E$ και V περιοχή του $0 \in F$. Τότε υπάρχει περιοχή του U του $0 \in E$ τέτοια ώστε $T(U) \subseteq V$, οπότε $T(x_0) + T(U) \subseteq T(x_0) + V$ ή $T(x_0 + U) \subseteq T(x_0) + V$. Άρα η T είναι συνεχής στο τυχόν $x_0 \in E$, και έτσι είναι συνεχής επί του χώρου E .

Πρόταση 3.1.10 Έστω E τ.δ.χ. και $f : E \rightarrow K$ γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- (i) Το f είναι συνεχής συνάρτηση.
- (ii) Το f είναι συνεχής συνάρτηση στο $0 \in E$.

(iii) Το f είναι φραγμένο σε μια περιοχή του $0 \in E$ (δηλαδή υπάρχει U περιοχή του $0 \in E$: $f(U)$ φραγμένο υποσύνολο του K).

(iv) Ο $\text{Ker}f$ είναι κλειστός υπόχωρος του E .

(v) Ο $\text{Ker}f$ δεν είναι γνήσιος πυκνός υπόχωρος του E .

Απόδειξη Η πρόταση ισχύει κατά τρόπο τετριμμένο αν το f είναι η σταθερά συνάρτηση μηδέν. Έτσι υποθέτουμε ότι $f \neq 0$. Η ισοδυναμία των (i) και (ii) έπεται από την πρόταση 3.1.9. (ii) \Rightarrow (iii) Εφόσον το f είναι συνεχής συνάρτηση στο $0 \in E$ υπάρχει περιοχή U του $0 \in E$ ώστε $f(U) \subseteq B(0,1) = \{z \in K : |z| < 1\}$, δηλαδή, $|f(x)| < 1, \forall x \in U$.

(iii) \Rightarrow (ii) Έστω ότι υπάρχουν $M > 0$ και μια περιοχή U του $0 \in E$ ώστε $|f(x)| < M, \forall x \in U$. Αν $\varepsilon > 0$, τότε $\left|f\left(\frac{\varepsilon}{M}x\right)\right| < \varepsilon, \forall x \in U$ ή $f\left(\frac{\varepsilon}{M}U\right) \subseteq B(0,\varepsilon)$, και άρα το f είναι συνεχής συνάρτηση στο $0 \in E$.

Έτσι οι ισχυρισμοί (i)-(iii) είναι ισοδύναμοι. Επίσης είναι σαφές ότι (i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι, (v) \Rightarrow (iii)

Θέτουμε $H = \text{Ker}f$, τότε $H \neq E$. Επειδή το υπερεπίπεδο H δεν είναι πυκνό υποσύνολο του E , υπάρχουν $x_0 \in E$ και μια ανοικτή ισορροπημένη περιοχή U του $0 \in E$ ώστε $(x_0 + U) \cap H = \emptyset$. Τότε $f(x_0) \neq 0$ και χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x_0) = 1$. Επειδή το U είναι ισορροπημένο προκύπτει εύκολα ότι $|f(x)| < 1, \forall x \in U$.

(Πράγματι, έστω $x_1 \in U$ τέτοιο ώστε $|f(x_1)| \geq 1$. Θέτουμε $y = -\frac{x_1}{f(x_1)}$. Τότε $f(y) = -1$

και $y \in U$, διότι το U είναι ισορροπημένο. Επομένως, $f(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) = 0$, οπότε $x_0 + y \in H$, άτοπο, εφόσον $x_0 + y \in x_0 + U$). Συνεπώς το f είναι φραγμένο στην περιοχή U του $0 \in E$.

Πόρισμα 3.1.11. Έστω E τ.δ.χ.. Τότε κάθε υπερεπίπεδο H του E είναι είτε κλειστό στον E ή πυκνό στον E .

Απόδειξη Έστω $f : E \rightarrow K$ γραμμικό συναρτησοειδές με $\text{Ker}f = H$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε αμέσως το συμπέρασμα. (Υπενθυμίζουμε ότι ένα γραμμικό συναρτησοειδές με $\text{Ker}f = H$ ορίζεται ως εξής: Αν $a \in E \setminus H$ τότε $E = H \oplus \langle a \rangle$ και έτσι θέτουμε $f(x) = f(y + \lambda a) = \lambda$, όπου $x = y + \lambda a$ με $y \in H$ και $\lambda \in K$).

Πόρισμα 3.1.12. Έστω E τ.δ.χ. και $x_0 \in E$ με $x_0 \neq 0$. Θέτουμε $F = \langle x_0 \rangle$ και

$\varphi: \lambda \in K \rightarrow F \subseteq E: \varphi(\lambda) = \lambda x_0$. Τότε η φ είναι τοπολογικός ισομορφισμός του K επί του μονοδιάστατου υποχώρου F του E . (Επι πλέον ο F είναι κλειστός υπόχωρος του E . Πρβλ. την άσκηση 7.)

Απόδειξη. Η φ είναι προφανώς αλγεβρικός ισομορφισμός και συνεχής. Για την αντίστροφή της ισχύει ότι $\text{Ker}\varphi^{-1} = \{0\}$ και άρα κλειστό υποσύνολο του F . (E είναι Hausdorff). Από την πρόταση 3.1.10 έπεται το συμπέρασμα.

Ασκήσεις

1) Ένα υποσύνολο A ενός διανυσματικού χώρου E λέγεται απόλυτα κυρτό αν

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda, \mu \in K \text{ με } |\mu| + |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in A.$$

(i) Δείξτε ότι η τομή μιας οικογένειας απόλυτα κυρτών συνόλων είναι απόλυτα κυρτό σύνολο.

(ii) Δείξτε ότι ένα σύνολο $A \subseteq E$ είναι απόλυτα κυρτό αν και μόνο αν είναι κυρτό και ισορροπημένο.

(iii) Αν $A \subseteq E$ απόλυτα κυρτό, τότε A απορροφούν αν και μόνο αν $\langle A \rangle = E$.

2) Έστω E διανυσματικός χώρος και $A \subseteq E$. Η τομή των ισορροπημένων (αντιστοίχως των κυρτών ή των απόλυτα κυρτών) υποσυνόλων του E που περιέχουν το A ονομάζεται η ισορροπημένη (αντιστοίχως κυρτή ή απόλυτα κυρτή) θήκη του A και συμβολίζεται με $b(A)$ (αντιστοίχως $co(A)$ ή $aco(A)$). Αποδείξτε ότι:

$$(i) b(A) = \{ \lambda A : \lambda \in K, |\lambda| \leq 1 \} \left(= \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A \right).$$

$$(ii) co(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$(iii) aco(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \in K, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(iv) Αν A ισορροπημένο, τότε $co(A)$ ισορροπημένο.

(v) Ισχύει ότι $aco(A) = co(b(A))$.

3) Έστω E, F διανυσματικοί χώροι, $T: E \rightarrow F$ γραμμική απεικόνιση, $A \subseteq E$ και $B \subseteq F$. Αποδείξτε ότι:

- (ι) Αν A και B απορροφούνται τότε τα $T(A)$ και $T^{-1}(B)$ είναι απορροφούνται υποσύνολα των $T(E)$ και E αντίστοιχα
- (ιι) Αν τα A και B ισορροπημένα, τότε τα $T(A)$ και $T^{-1}(B)$ ισορροπημένα.
- (ιιι) Αν τα A και B κυρτά (αντιστοίχως απόλυτα κυρτά), τότε τα $T(A)$ και $T^{-1}(B)$ κυρτά (αντιστοίχως απόλυτα κυρτά).

4) Αποδείξτε ότι ένα απορροφούν υποσύνολο του χώρου R^2 δεν είναι κατ' ανάγκη περιοχή του $(0,0) \in R^2$.

[Υπόδειξη. Θεωρούμε την απλή καμπύλη $\gamma(t) = \frac{t}{2\pi} e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ του R^2 και θέτομε

$D = \{ \lambda \gamma(t) : \lambda \in [0,1], t \in [0, 2\pi] \}$. Τότε, το $(0,0)$ ανήκει στο σύνορο ∂D του D (άρα) δεν ανήκει στο εσωτερικό D° του D και το D είναι απορροφούν υποσύνολο του R^2].

5) Έστω $B = \{ (z, w) \in C^2 : |z| \leq |w| \}$. Αποδείξτε ότι το B είναι ισορροπημένο υποσύνολο του C^2 αλλά το εσωτερικό του δεν είναι. (Πρβλ. την Πρόταση 3.14 (ix) .)

6) Έστω E, F τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι και $T : E \rightarrow F$ γραμμική και συνεχής απεικόνιση.

(ι) Αποδείξτε ότι η T είναι ομοιόμορφα συνεχής υπό την ακόλουθη έννοια: Για κάθε περιοχή V του $0 \in F$ υπάρχει περιοχή U του $0 \in E$ ώστε, $T(y) - T(x) \in V, \forall x, y \in E$ με $y - x \in U$.

(ιι) Ένα δίκτυο $(x_i)_{i \in I}$ στον τ.δ.χ. E λέγεται δίκτυο Cauchy, αν για κάθε περιοχή U του $0 \in E$ υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $x_i - x_j \in U$ για κάθε $i, j \geq i_0$. Αποδείξτε ότι η εικόνα $(T(x_i))_{i \in I}$ ενός δικτύου Cauchy $(x_i)_{i \in I}$ στον τ.δ.χ. E μέσω μιας συνεχούς και γραμμικής απεικόνισης $T : E \rightarrow F$ είναι δίκτυο Cauchy στον F . Επίσης αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνον δίκτυο στον E είναι δίκτυο Cauchy.

7) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff). Αποδείξτε τα ακόλουθα.

(ι) Κάθε μονοδιάστατος υπόχωρος του E είναι κλειστός στον E .

(ιι) Αν F είναι διανυσματικός υπόχωρος του E με $\dim F = n \in N$, τότε κάθε αλγεβρικός ισομορφισμός Λ του K^n επί του F (ο K^n με την τοπολογία της νόρμας) είναι και ομοιομορφισμός. Περαιτέρω αποδείξτε ότι ο F είναι κλειστός στον E .

(ιιι) Αν E είναι διανυσματικός χώρος με $\dim E < \infty$, τότε υπάρχει μοναδική Hausdorff τοπολογία επί του E συμβατή με την διανυσματική δομή του.

[Υπόδειξη. (ι) Έστω F διανυσματικός υπόχωρος του E με $\dim F = 1$. Τότε

$F = \langle a \rangle = \{ \lambda a : \lambda \in K \}$ για κάποιο $a \in E$ με $a \neq 0$. Η απεικόνιση

$\varphi : K \rightarrow F : \varphi(\lambda) = \lambda a$ είναι αλγεβρικός ισομορφισμός ο οποίος είναι και

ομοιομορφισμός σύμφωνα με το πόρισμα 3.1.12.

Δείξτε ότι ο F είναι κλειστός χρησιμοποιώντας την έννοια του δικτύου Cauchy της άσκησης

6. Για το (ιι) προχωρήστε με επαγωγή στο $n = \dim F$.]

8) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff) F διανυσματικός υπόχωρος του E και $\pi: E \rightarrow E/F$ η κανονική απεικόνιση. Θεωρούμε στον χώρο πηλίκο E/F την τοπολογία πηλίκο T (αν $U \subseteq E/F$ τότε $U \in T \Leftrightarrow$ το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στον E). Αποδείξτε ότι:

- (i) Η π είναι συνεχής και ανοικτή.
- (ii) Ο χώρος πηλίκο E/F είναι με την τοπολογία T τ.δ.χ.
- (iii) Ο χώρος πηλίκο είναι Hausdorff αν και μόνο αν ο F είναι κλειστός στον E .
- (iv) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα τότε η T ταυτίζεται με την τοπολογία της νόρμας πηλίκο του χώρου E/F .

9) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff), M κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του E και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E . Αποδείξτε ότι:

- (α) Ο υπόχωρος $F + M$ είναι κλειστός στον E .
- (β) Το άθροισμα $K + F$ ενός συμπαγούς K και ενός κλειστού F υποσυνόλου του E είναι κλειστό υποσύνολο του E .

10) Έστω E τ.δ.χ. (Hausdorff) και F διανυσματικός υπόχωρος του E . Λέμε ότι ο F είναι (τοπολογικά) συμπληρωματικός στον E αν υπάρχει συνεχής προβολή $P: E \rightarrow E$ ώστε $P(E) = F$.

(i) Αποδείξτε ότι αν ο F είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του E τότε ο F είναι κλειστός στον E .

(ii) Έστω $P: E \rightarrow E$ προβολή με $P(E) = F$ και $G = \text{Ker}P$, άρα $E = F \oplus G$. Αποδείξτε

ότι η P είναι συνεχής αν και μόνο αν η φυσιολογική απεικόνιση

$F \times G \ni (x, y) \rightarrow x + y \in E$ είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν η απεικόνιση

$j: E/G \rightarrow F: j(x+G) = P(x)$ είναι συνεχής (παρατηρούμε ότι $P = j \circ \pi$, όπου

$\pi: E \rightarrow E/G$ η κανονική απεικόνιση).

(iii) Υποθέτουμε ότι ο F είναι κλειστός υπόχωρος του E πεπερασμένης συνδιάστασης.

Αποδείξτε ότι ο F είναι (τοπολογικά) συμπληρωματικός στον E .

(iv) Αν ο E είναι επί πλέον τοπικά κυρτός τ.δ.χ., τότε κάθε διανυσματικός υπόχωρος του E πεπερασμένης διάστασης είναι συμπληρωματικός στον E . (Η έννοια της τοπικής κυρτότητας για ένα τ.δ.χ. θα ορισθεί στην επόμενη παράγραφο).

11) Έστω E τ.δ.χ. και $A \subseteq E$ κυρτό. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $x \in A^\circ$ και $y \in \bar{A}$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y] \subseteq A^\circ$ (όπου

$$[x, y] = \{ \lambda x + (1 - \lambda) y : 0 < \lambda \leq 1 \})$$

(β) Αν $A^\circ \neq \emptyset$, τότε $\bar{A} = \overline{A^\circ}$ και $A^\circ = (\bar{A})^\circ$.

[Υπόδειξη για το (α): Έστω $z = (1 - \lambda) y + \lambda x$ με $0 < \lambda < 1$. Υπάρχει τότε U ισορροπημένη

περιοχή του $0 \in E$ ώστε $x + U \subseteq A$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $y \in A$. Έστω $w \in \lambda U + z$,

επομένως $w = \lambda u + z$ με $u \in U$. Τότε $x + u \in A$, επομένως $w = (1 - \lambda) y + \lambda(x + u) \in A$.

Έτσι έχουμε $\lambda U + z \subseteq A$ και άρα $z \in A^\circ$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $y \in \bar{A}$. Θέτουμε

$V = \mu U + y$, όπου $\mu = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$. Έστω $a \in A \cap V$. Έχομε τότε $a = \mu u + y$ με $u \in U$ και

επομένως $z = (1 - \lambda)a + \lambda(x - u) \in A$. Έτσι έχουμε ότι $[x, y) \subseteq A$, το οποίο μαζί με το πρώτο μέρος συμπεραίνει ότι $[x, y) \subseteq A^\circ$.

Σημείωση. Το δεύτερο μέρος της άσκησης 11 δεν ισχύει αν το κυρτό σύνολο A έχει κενό εσωτερικό. Για παράδειγμα έστω E χώρος Banach και A γνήσιος πυκνός διανυσματικός υποχώρος του E , είναι τότε σαφές ότι το A δεν ικανοποιεί το συμπέρασμα της 11) (β).