3.2 Τοπικά κυρτοί χώροι-Βασικές ιδιότητες.

Στην παράγραφο αυτή πρόκειται να εισαγάγουμε μια σημαντική, ίσως την σημαντικότερη, κλάση τοπολογικών γραμμικών χώρων. Αυτή είναι η κλάση των τοπικά κυρτών χώρων

Ορισμός 3.2.1 Έστω E διανυσματικός χώρος. Μια ημινόρμα στον E είναι μια απεικόνιση $p: E \to R$ ώστε:

(ι) $p(x) \geq 0, \forall x \in E$

(ιι) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \lambda \in K, x \in E$.

(ιιι) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E$.

Η ιδιότητα (ιιι) ονομάζεται υποπροσθετικότητα .

Παρατηρήσεις 3.2.2 (1) Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (ιι) και (ιιι) έχουν σαν συνέπεια την (ι). (Πράγματι, $p(0) = p(2 \cdot 0) = 2p(0)$, άρα $p(0) = 0$. Επίσης $0 = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) \Rightarrow -p(-x) \leq p(x)$. Επειδή $p(-x) = p(x)$, έπεται ότι $p(x) \geq 0, \forall x \in E$.)

(2) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y), \forall x, y \in E$, (Αν $x, y \in E$ τότε $p(x) = p((x-y)+y) \leq p(x-y) + p(y) \Rightarrow p(x) - p(y) \leq p(x-y)$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των x και y έχομε ότι $p(y) - p(x) \leq p(x-y)$. Έτσι έχουμε το συμπέρασμα.)

(3) Αν $\{p_i : i \in I\}$ οικογένεια ημινορμών επί του διανυσματικού χώρου E και $\sup\{p_i(x) : i \in I\} < +\infty, \forall x \in E$ τότε η απεικόνιση $p: E \to R: p(x) = \sup\{p_i(x) : i \in I\}, x \in E$ είναι μια ημινόρμα επί του E. Ιδιαίτερα αν η οικογένεια είναι πεπερασμένη, έστω $\{p_1, ..., p_n\}$, τότε η $p(x) = \max\{p_1(x), ..., p_n(x)\}$ είναι πάντοτε ημινόρμα. (Άσκηση).

(4) Είναι προφανές ότι μια ημινόρμα είναι νόρμα αν και μόνο αν $p(x) > 0, \forall x \in E$ με $x \neq 0$.

Παραδείγματα 3.2.3 (1) Έστω E διανυσματικός χώρος και $\Lambda : E \to K$ γραμμικό συναρτησοειδές, τότε η απεικόνιση $p(x) = |\Lambda(x)|, x \in E$, είναι μια ημινόρμα επί του E.

(Πότε η $p(x) = |\Lambda(x)|$ γίνεται νόρμα;)

(2) Έστω $p:\ell^{\infty}\to R: p(x)=\lim_{n\to\infty}\sup|x_n|$, όπου $x=(x_n)\in\ell^{\infty}$. Τότε η p είναι μια ημινόρμα επί του χώρου Banach ℓ^{∞}. (Πρβλ. το παράδειγμα 1.11).

<u>Πρόταση</u> 3.2.4 Έστω E διανυσματικός χώρος και $p:E\to R$ ημινόρμα επί του E. Τότε ισχύουν:

(ι) Το σύνολο $F=p^{-1}(\{0\})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του E.

(ιι) Για κάθε $\varepsilon>0$, τα σύνολα $\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)=\{x\in E: p(x)<\varepsilon\}$ και

$\hat{\mathrm{B}}_p(0,\varepsilon)=\{x\in E: p(x)\le\varepsilon\}$ είναι κυρτά ισορροπημένα και απορροφούντα υποσύνολα του E.

<u>Απόδειξη</u>: Αποδεικνύουμε μόνο ότι το $\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$ είναι απορροφούν και αφήνουμε τους υπόλοιπους ισχυρισμούς ως άσκηση. Έστω $x\in E$. Αν $0\le t\le\dfrac{\varepsilon}{p(x)+2}$,

τότε $p(tx)=tp(x)\le\dfrac{\varepsilon}{p(x)+2}\cdot p(x)<\varepsilon$ και άρα $tx\in\mathrm{B}_p(0,\varepsilon)$.

Αν $p:E\to R$ είναι μια ημινόρμα επί του διανυσματικού χώρου E τότε είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η οικογένεια των συνόλων της μορφής $\mathrm{B}_p(x,\varepsilon)=\{y\in E: p(x-y)<\varepsilon\}=x+\mathrm{B}_p(0,\varepsilon), x\in E, \varepsilon>0$ συνιστούν μια βάση για μια τοπολογία T επί του E η οποία είναι συμβατή με την αλγεβρική δομή του E και έτσι ο (E,T) γίνεται τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Εντούτοις οι τοπικά κυρτές τοπολογίες ορίζονται από μια ολόκληρη οικογένεια ημινορμών επί του E με τον ακόλουθο τρόπο.

Έστω E διανυσματικός χώρος και $\mathcal{P}$ μια οικογένεια ημινορμών επί του E. Αν $\Delta=\{p_1,\dots,p_n\}\subseteq\mathcal{P}$, $x\in E$ και $\varepsilon>0$ θέτομε

$$\mathrm{B}_{\Delta}(x,\varepsilon)=\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{B}_{p_k}(x,\varepsilon)=\{y\in E: p_k(y-x)<\varepsilon, k=1,2,\dots,n\}.$$

Κατόπιν θεωρούμε εκείνη την τοπολογία $T=T(\mathcal{P})$ η οποία έχει ως <u>υποβάση</u> τα σύνολα της μορφής $\mathrm{B}_p(x,\varepsilon), p\in\mathcal{P}$, $x\in E, \varepsilon>0$

Ένα τυπικό μέλος της βάσης που παράγει η παραπάνω υποβάση είναι επομένως της μορφής

Έστω $\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{B}_{p_k}(x_k,\varepsilon_k)$ όπου $x_1,\dots,x_n\in E, p_1,\dots,p_n\in\mathcal{P}$ και $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n>0$

Έστω $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x_k, \varepsilon_k\right)$, θέτομε $\varepsilon = \min\left\{\varepsilon_k - p_k\left(x - x_k\right) : 1 \le k \le n\right\}$ συνεπώς $\varepsilon > 0$.

Παρατηρούμε ότι $\bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x, \varepsilon\right) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x_k, \varepsilon_k\right)$.

Πράγματι, αν $y \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x, \varepsilon\right)$, τότε $p_k\left(y - x\right) \le \varepsilon \le \varepsilon_k - p_k\left(x - x_k\right), k = 1, 2, ..., n$. Έτσι έχομε, $p_k\left(y - x_k\right) \le p_k\left(y - x\right) + p_k\left(x_k - x\right) < \varepsilon_k, \forall k = 1, 2, ...n$ από όπου έπεται ότι $y \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{p_k}\left(x_k, \varepsilon_k\right)$. Από την παρατήρηση αυτή συμπεραίνουμε ότι η κλάση των συνόλων της μορφής $\{\mathrm{B}_{\Delta}\left(x, \varepsilon\right) : x \in E, \varepsilon > 0$ και $\Delta \subseteq \mathcal{P}$ πεπερασμένο $\}$ είναι και αυτή μια βάση για την τοπολογία $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{p})$ που ορίσθηκε παραπάνω.

Ειδικότερα τα σύνολα της μορφής $\mathrm{B}_{\Delta}\left(0, \varepsilon\right) = \left\{x \in E : p\left(x\right) < \varepsilon, p \in \Delta\right\}$, όπου $\Delta \subseteq \mathcal{P}$ πεπερασμένο είναι μια <u>βάση περιοχών</u> του $0 \in E$ η οποία αποτελείται από <u>κυρτά</u> και <u>ισορροπημένα</u> (και απορροφούντα) σύνολα. (Πρβλ την πρόταση 3.2.4).

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

1) Έστω $\left(z_a\right)_{a \in A}$ δίκτυο στον E και $z \in E$. Τότε

(α) $z_a \xrightarrow{\mathcal{T}} z \Leftrightarrow p\left(z_a - z\right) \to 0$ για κάθε $p \in \mathcal{P}$

Πράγματι, $z_a \xrightarrow{\mathcal{T}} z \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \forall \Delta \subseteq \mathcal{P}$ πεπερασμένο υπάρχει
$a_0 \in \mathrm{A} : a \ge a_0 \Rightarrow z_a \in \mathrm{B}_{\Delta}\left(z, \varepsilon\right)] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall \Delta \subseteq \mathcal{P}$ πεπερασμένο υπάρχει
$a_0 \in \mathrm{A} : a \ge a_0 \Rightarrow p\left(z_a - z\right) < \varepsilon, \forall p \in \Delta \Leftrightarrow p\left(z_a - z\right) \to 0$ για κάθε $p \in \mathcal{P}$.

(β) Αν $z_a \xrightarrow{\mathcal{T}} z$ τότε $p\left(z_a\right) \to p\left(z\right)$ για κάθε $p \in \mathcal{P}$.

Το συμπέρασμα προκύπτει αμέσως από την ανισότητα

$$\left|p\left(z_a\right) - p\left(z\right)\right| \le p\left(z_a - z\right), a \in \mathrm{A}.$$

Έπεται ιδιαίτερα κάθε ημινόρμα $p \in \mathcal{P}$ είναι συνεχής συνάρτηση επί του χώρου $\left(E, \mathcal{T}\left(\mathcal{p}\right)\right)$

2) Η τοπολογία $\mathcal{T} = \mathcal{T}\left(\mathcal{p}\right)$ είναι <u>συμβατή</u> με την αλγεβρική δομή του E και έτσι ο $\left(E, \mathcal{T}\right)$ είναι ένας <u>τοπολογικός γραμμικός</u> χώρος.

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού θεωρούμε ένα δίκτυο $(x_a, y_a)_{a\in \mathrm{A}}$ στον $E\times E$ (με την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$) και $(x,y)\in E\times E$ ώστε $(x_a,y_a)\to(x,y)$ και ακόμη ένα δίκτυο $(\lambda_a, x_a)_{a\in \mathrm{A}}$ στον χώρο $K\times E$ (με την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}_{|\cdot|}\times\mathcal{T}$) και $(\lambda,x)\in K\times E$ ώστε $(\lambda_a,x_a)\to(\lambda,x)$.

Έπεται τότε από τις ανισότητες ότι $x_a+y_a \xrightarrow{\mathcal{T}} x+y$ και $\lambda_a x_a \xrightarrow{\mathcal{T}} \lambda x$ $p\big((x_a+y_a)-(x+y)\big)\le p(x_a-x)+p(y_a-y)$ και $p(\lambda_a x_a-\lambda x)\le|\lambda_a-\lambda|\,p(x_a)+|\lambda|\,p(x_a-x),\ p\in \mathcal{P}$

ότι $x_a+y_a \xrightarrow{\mathcal{T}} x+y$ και $\lambda_a x_a \xrightarrow{\mathcal{T}} \lambda x$.

Έτσι οι πράξεις του E είναι συνεχείς και ο $(E,\mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

3) Ο τ.δ.χ. $(E,\mathcal{T}(\mathcal{P}))$ είναι Hausdorff αν και μόνο αν η οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$ <u>διαχωρίζει τα σημεία</u> του E, δηλαδή αν, για κάθε $x,y\in E$ με $x\neq y$ υπάρχει $p\in\mathcal{P}$ ώστε $p(x-y)>0$. (Ισοδύναμα, για κάθε $x\in E$ με $x\neq 0$ υπάρχει $p\in\mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $p(x)>0$). Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού προκύπτει εύκολα από την πρόταση 3.1.6.

<u>Ορισμός</u> 3.2.5 Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος λέγεται ότι είναι <u>τοπικά κυρτός</u> (τ.κ.), αν η τοπολογία του $\mathcal{T}$ ορίζεται από μια οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P}$ δηλαδή $\mathcal{T}=\mathcal{T}(\mathcal{P})$, όπως παραπάνω.

Παρατηρούμε ότι αν $(E,\mathcal{T})$ είναι ένας τοπικά κυρτός τ.δ.χ., τότε: 1) Ο E έχει μια βάση περιοχών του $0\in E$ που αποτελείται από (κλειστά) κυρτά και ισορροπημένα σύνολα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος 3.1.5.

2) Κάθε διανυσματικός υπόχωρος F του E είναι με τη σχετική τοπολογία ένας τοπικά κυρτός τ.δ.χ. (η σχετική τοπολογία επί του F συμπίπτει με την τοπικά κυρτή τοπολογία που ορίζουν οι ημινόρμες της οικογένειας $\mathcal{P}$ αν περιορισθούν στον F .)

<u>Παραδείγματα</u> 3.2.6. 1) Έστω $(X,\|\cdot\|)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα. Τότε ο X είναι ένας Hausdorff τοπικά κυρτός χώρος με την τοπολογία $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ που ορίζει η νόρμα. Πράγματι η οικογένεια των ανοικτών σφαιρών $\{\mathrm{B}(x,\varepsilon): x\in X, \varepsilon>0\}$ αποτελεί μια βάση της $\mathcal{T}$ έτσι σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.5, ο $(X,\mathcal{T})$ είναι τοπικά κυρτός

(μετρικοποιήσιμος) χώρος .

2) Έστω $\Gamma \neq \varnothing$ σύνολο. Θέτομε $E = K^{\Gamma}\left(K = R \text{ ή } C\right)$. Δηλαδή ο E είναι ο διανυσματικός χώρος (με τις συνήθεις κατά σημείο πράξεις) όλων των συναρτήσεων $f : \Gamma \to K$. Για κάθε $\gamma \in \Gamma$ ορίζουμε την ημινόρμα $p_\gamma : E \to R : p_\gamma\left(f\right) = \left|f\left(\gamma\right)\right|$. Έστω $\mathcal{P} = \left\{p_\gamma : \gamma \in \Gamma\right\}$

Η τοπικά κυρτή τοπολογία $T_p = T$ ($\mathcal{P}$) που ορίζει η $\mathcal{P}$ επί του E σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.5 έχει ως βάση περιοχών του $0 \in E$ (της σταθεράς συνάρτησης ίσης με μηδέν) τα σύνολα της μορφής $V_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon} = \left\{ f \in E : \left|f\left(\gamma_k\right)\right| < \varepsilon, \forall k = 1,2,\ldots,n\right\}$, όπου $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in \Gamma, n \in N$ και $\varepsilon > 0$.

Αν $f \in E$, τότε μια βάση περιοχών του f αποτελείται από τα σύνολα της μορφής $V_{f,\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\varepsilon} = \left\{g \in E : \left|g\left(\gamma_k\right) - f\left(\gamma_k\right)\right|, \forall k = 1,2,\ldots,n\right\}$

Έστω $\left(f_a\right)_{a \in A}$ δίκτυο στον E και $f \in E$ τότε είναι προφανές ότι

$$f_a \xrightarrow{T_p} f \Leftrightarrow f_a\left(\gamma\right) \to f\left(\gamma\right), \forall \gamma \in \Gamma .$$

Η τοπολογία $T_p = T\left(\mathcal{P}\right)$ ονομάζεται η <u>τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο</u> επί του E και βέβαια <u>συμπίπτει</u> με τη γνωστή μας <u>τοπολογία γινόμενο</u> επί του E . Ακόμη σημειώνουμε ότι ο $\left(E, T_p\right)$ είναι χώρος Hausdorff αφού αν $f, g \in E$ με $f \neq g$ τότε υπάρχει $\gamma_0 \in \Gamma : f\left(\gamma_0\right) \neq g\left(\gamma_0\right)$, δηλαδή $p_{\gamma_0}\left(f - g\right) > 0$.

3)Έστω $\left(X, \|\cdot\|\right)$ χώρος με νόρμα, και X^* ο συζυγής του. Θα ορίσουμε τώρα δύο ενδιαφέρουσες τοπικά κυρτές τοπολογίες, την <u>ασθενή τοπολογία</u> επί του X και την <u>ασθενή * τοπολογία</u> του X^* .

(α) <u>Η ασθενής τοπολογία του X</u> . Για κάθε $x^* \in X^*$ θέτομε $p_{x^*} : X \to R : p_{x^*}\left(x\right) = \left|x^*\left(x\right)\right|, x \in X$. Η τοπικά κυρτή τοπολογία που ορίζει η οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P} = \left\{p_{x^*} : x^* \in X^*\right\}$ επί του X ονομάζεται η ασθενής (weak) τοπολογία του X και συμβολίζεται με T_w .

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(ι) Η οικογένεια $\mathcal{P}$ <u>διαχωρίζει</u> τα σημεία του X και έτσι ο X με την ασθενή τοπολογία είναι χώρος Hausdorff .

Ο ισχυρισμός αυτός είναι συνέπεια του θεωρήματος Hahn- Banach, αφού αν $x, y \in X$ με $x \neq y$, τότε το $z = x - y \neq 0$ και συνεπώς υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\left\|x^*\right\| = 1$ ώστε $x^*\left(z\right) = \left\|z\right\| > 0$.

(ιι) Ένα δίκτυο $\left(x_a\right)_{a\in A} \subseteq X$ συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$, δηλαδή, $x_a \xrightarrow{T_w} x$ αν και μόνο αν $x^*\left(x_a\right) \to x^*\left(x\right), \forall x^* \in X^*$.

(ιιι) Μια βάση (ανοικτών) περιοχών του $0 \in X$ αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $$V_{x_1^*,\dots,x_n^*,\varepsilon} = \left\{x \in X : \left|x_k^*\left(x\right)\right| < \varepsilon,\ \forall k = 1,2,\dots,n\right\}$$
όπου $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in X^*, n \in N$ και $\varepsilon > 0$.

Επειδή κάθε ένα από τα σύνολα $V_{x_1^*,\dots,x_n^*,\varepsilon}$ είναι και ανοικτό στην τοπολογία της νόρμας στον X (γιατί;), έπεται ότι η ασθενής τοπολογία T_w του X είναι <u>ασθενέστερη</u> (μικρότερη) της τοπολογίας της νόρμας $T_{\|\cdot\|}$ του X , δηλαδή $T_w \subseteq T_{\|\cdot\|}$.

Σημειώνουμε ότι, ένας ισοδύναμος τρόπος να ορίσουμε την ασθενή τοπολογία του X προκύπτει από την παρατήρηση ότι ο X μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικός υπόχωρος του χώρου K^{X^*} , ο οποίος σύμφωνα με το παράδειγμα (2) είναι τοπικά κυρτός με την τοπολογία T_p σύγκλισης κατά σημείο. Έτσι η ασθενής τοπολογία του X μπορεί να ορισθεί ως η σχετική τοπολογία που επάγεται από τον $\left(K^{X^*}, T_p\right)$ στον X . Πράγματι, από το θεώρημα Hahn-Banach (αν $X \neq \{0\}$ τότε) $X^* \neq \{0\}$ και η εμφύτευση του X στον K^{X^*} ορίζεται από την απεικόνιση $\varphi : X \to X^{**} \subseteq K^{X^*} : \varphi\left(x\right)\left(x^*\right) = x^*\left(x\right), x \in X, x^* \in X^*$
(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

(β) Η <u>ασθενής * τοπολογία του X^*</u>. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε μια ημινόρμα
$p_x : X^* \to R : p_x\left(x^*\right) = \left|x^*\left(x\right)\right|, x^* \in X^*$.

Η οικογένεια ημινορμών $\mathcal{P} = \left\{p_x : x \in X\right\}$ ορίζει τότε μια τοπικά κυρτή τοπολογία στον X^*, η οποία ονομάζεται η ασθενής* (weak *) τοπολογία του X^* και συμβολίζεται με T_{w^*}

Παρατηρούμε ότι:

(ι) Ο $\left(X^*, T_{w^*}\right)$ είναι χώρος Hausdorff, αφού αν $x^*, y^* \in X^*$ με $x^* \neq y^*$ τότε βέβαια υπάρχει $x \in X$ με $x^*\left(x\right) \neq x^*\left(y\right) \Leftrightarrow p_x\left(x^* - y^*\right) > 0$.

(ιι) Ένα δίκτυο $\left(x_a^*\right)_{a\in A} \subseteq X^*$ συγκλίνει ασθενώς * στο $x^* \in X^*$, δηλαδή, $x_a^* \xrightarrow{T_{w^*}} x^*$ αν και μόνο αν $x_a^*\left(x\right) \to x^*\left(x\right), \forall x \in X$.

(ιιι) Μια βάση ανοικτών περιοχών του $0 \in X^*$ αποτελείται από τα σύνολα της μορφής $V_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} = \left\{x^* \in X^* : \left|x^*\left(x_k\right)\right| < \varepsilon, \forall k = 1,2,\dots,n\right\}$, όπου $x_1,\dots,x_n \in X, n \in N, \varepsilon > 0$.

Έπεται ιδιαίτερα ότι, $T_{w^*} \subseteq T_{\|\cdot\|}$, δηλαδή, η ασθενής * τοπολογία είναι <u>ασθενέστερη</u> της τοπολογίας της νόρμας του χώρου X^*.

Σημειώνουμε ότι (όπως και η ασθενής τοπολογία) η ασθενής * τοπολογία μπορεί να ορισθεί και με τη βοήθεια του παραδείγματος (2). Πράγματι η απεικόνιση $\tau : X^* \to K^X : \tau\left(x^*\right)\left(x\right) = x^*\left(x\right), x \in X, x^* \in X^*$ είναι μια (αλγεβρική) εμφύτευση του X^* στον διανυσματικό χώρο K^X. Έτσι η T_{w^*} τοπολογία μπορεί να ορισθεί ως η σχετική τοπολογία που επάγεται από τον τοπικά κυρτό χώρο $\left(K^X, T_p\right)$ στον διανυσματικό υπόχωρο του X^* (ακριβέστερα στον $\tau\left(X^*\right)$).

4) Έστω M μετρικός χώρος ή γενικότερα ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff, ας συμβολίσουμε με $C\left(M\right) \equiv C_K\left(M\right)$ τον χώρο των <u>συνεχών</u> συναρτήσεων $f : M \to K$ ο οποίος είναι βέβαια με τις συνήθεις πράξεις (της πρόσθεσης βαθμωτών συναρτήσεων και του πολλαπλασιασμού συνάρτησης με βαθμωτό) ένας διανυσματικός χώρος επί του K. Για κάθε $\mathrm{K} \subseteq M$ συμπαγές μη κενό σύνολο θέτομε,

$$p_{\mathrm{K}}\left(f\right) = \sup\left\{\left|f\left(x\right)\right| : x \in \mathrm{K}\right\}.$$

Η τοπικά κυρτή τοπολογία τ_C που καθορίζει η οικογένεια ημινορμών

$\mathcal{P} = \left\{p_{\mathrm{K}} : \mathrm{K} \subseteq M \text{ συμπαγές}\right\}$ ονομάζεται τοπολογία της <u>ομοιόμορφης σύγκλισης</u> στα <u>συμπαγή</u> υποσύνολα του M.

Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(ι) Η τοπολογία τ_C είναι Hausdorff, αφού αν $f, g \in C\left(M\right)$ με $f \neq g$ τότε υπάρχει $x \in M : f\left(x\right) \neq g\left(x\right)$ και συνεπώς $p_{\mathrm{K}}\left(f - g\right) > 0$, όπου $\mathrm{K} = \left\{x\right\}$. (Ουσιαστικά η τ_C είναι Hausdorff αφού είναι λεπτότερη της τοπολογίας T_p της κατά σημείο σύγκλισης επί του $C\left(M\right)$.).

(II) Ένα δίκτυο $\left(f_a\right)_{a \in A} \subseteq C\left(M\right)$ συγκλίνει ως προς την τ_C στην συνάρτηση $f \in C\left(M\right)$ (γράφουμε τότε $f_a \xrightarrow{\tau_C} f$) αν και μόνο αν $f_a\big|_{\mathrm{K}} \to f\big|_{\mathrm{K}}$ ομοιόμορφα επί του K, για κάθε συμπαγές $\mathrm{K} \subseteq M$.

(ιιι) Οι βασικές περιοχές του $0 \in C(M)$ στην τοπολογία τ_C είναι της μορφής,

$V_{\mathrm{K},\varepsilon} = \left\{ f \in C(M) : \sup\left\{ \left| f(x) \right| : x \in \mathrm{K} \right\} < \varepsilon \right\}$, $\mathrm{K} \subseteq M$ συμπαγές και $\varepsilon > 0$.

5) Έστω $\Omega \subseteq C$ ανοικτό μη κενό σύνολο. Ας συμβολίσουμε με $\mathrm{H}(\Omega)$ τον χώρο των <u>ολομόρφων</u> συναρτήσεων $f : \Omega \to C$, ο οποίος είναι βέβαια ένας διανυσματικός υπόχωρος του χώρου $C_C(\Omega)$. Έτσι η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή (η οποία ορίσθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα) καθιστά τον $\mathrm{H}(\Omega)$ ένα Hausdorff τοπικά κυρτό υπόχωρο του $C_C(\Omega)$.