4.2 Αυτοπάθεια και ασθενής συμπάγεια

Ένας χώρος με νόρμα $(X,\|\cdot\|)$ λέγεται αυτοπαθής (reflexive), αν η κανονική εμφύτευση $\varphi : X \to X^{**} : \varphi(x)(x^*) = x^*(x)$, $x^* \in X^*$, $x \in X$, είναι επί του X^{**}, δηλαδή $\varphi(X) = X^{**}$. Παρατηρούμε ότι ένας αυτοπαθής χώρος X είναι αναγκαία χώρος Banach εφόσον ταυτίζεται ισομετρικά με τον X^{**}. Σημειώνουμε ότι υπάρχουν παραδείγματα μη αυτοπαθών χώρων X έτσι ώστε ο X να είναι γραμμικά ισομετρικός με τον X^{**} (όχι φυσικά μέσω της κανονικής απεικόνισης φ).

Ένα τέτοιο παράδειγμα (ο χώρος του James J) μπορεί να βρεθεί στα βιβλία [F-H-H-M-P-Z] και [M].

Θεώρημα 4.2.1 Έστω X χώρος Banach. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

1) Ο X είναι αυτοπαθής

2) Η $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι συμπαγής χώρος.

3) Ο X^* είναι αυτοπαθής

4) $(X^*, w) = (X^*, w^*)$.

Απόδειξη (1) $\Rightarrow$ (2). Εφόσον ο X είναι αυτοπαθής έχουμε ότι $(X, w) = (X^{**}, w^*)$ και άρα $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right) = \left(\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}, w^*\right)$. Από το θεώρημα Alaoglou έχομε το συμπέρασμα.

(2) $\Rightarrow$ (1) Εφόσον η $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι συμπαγής χώρος είναι και ασθενώς* συμπαγές υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$.

Από το θεώρημα Goldstine η $\hat{\mathrm{B}}_X$ είναι και ασθενώς* πυκνό υποσύνολο του $\hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$, συνεπώς $\hat{\mathrm{B}}_X = \hat{\mathrm{B}}_{X^{**}}$. Άρα $X = X^{**}$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Η ασθενής τοπολογία επί του X^* επάγεται από τον συζυγή του που είναι ο $X^{**} = X$. Επίσης η ασθενής* τοπολογία επί του X^* επάγεται από τον προσυζυγή του που είναι πάλι ο X , έτσι οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται.

(4) $\Rightarrow$ (3). Από την υπόθεσή μας, έπεται αμέσως ότι $\left(\hat{B}_{X^*}, w\right) = \left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$. Από το θεώρημα Alaoglou η $\left(\hat{B}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής χώρος. Άρα η $\left(\hat{B}_{X^*}, w\right)$ είναι συμπαγής χώρος και από την (2) $\Rightarrow$ (1) έπεται το συμπέρασμα.

(3) $\Rightarrow$ (1). Εφόσον ο X^* είναι αυτοπαθής από την (1) $\Rightarrow$ (4) θα έχουμε ότι $\left(X^{**}, w\right) = \left(X^{**}, w^*\right)$. Η $\left(\hat{B}_X \ , w\right)$ είναι norm κλειστό και κυρτό υποσύνολο του (X και άρα και του) X^{**}, έπεται από το θεώρημα του Mazur ότι είναι ασθενώς κλειστό υποσύνολο του X^{**}. Αλλά τότε από την υπόθεσή μας είναι ασθενώς* κλειστό υποσύνολο του X^{**}. Από το θεώρημα Goldstine έπεται ότι $\hat{B}_X = \hat{B}_{X^{**}}$. Κατά συνέπεια $X = X^{**}$.

<u>Πόρισμα</u> 4.2.2 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και Y κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του X. Τότε ο Y είναι επίσης αυτοπαθής.

<u>Απόδειξη</u>: Παρατηρούμε ότι $\hat{B}_Y = Y \bigcap \hat{B}_X$. Επειδή από το θεώρημα του Mazur ο Y είναι ασθενώς κλειστό υποσύνολο του X και από το θεώρημα 4.2.1 η $\hat{B}_X$ είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X, έπεται ότι η $\hat{B}_Y$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο. Έτσι πάλι από το θεώρημα 4.2.1 ο Y είναι αυτοπαθής χώρος.

<u>Πόρισμα</u> 4.2.3 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach. Αν $x^* \in X^*$, τότε υπάρχει $x_0 \in X$ με $\|x_0\| = 1$ ώστε $\|x^*\| = x^*\left(x_0\right)$.

<u>Απόδειξη</u> Υποθέτομε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x^* \neq 0$. Το x^* είναι συνεχής συνάρτηση ως προς την ασθενή τοπολογία του X και η $\hat{B}_X$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο, αφού ο X είναι αυτοπαθής. Έπεται ότι υπάρχει $y_0 \in \hat{B}_X$ ώστε

$$\left|x^*\left(y_0\right)\right| = \sup\left\{\left|x^*\left(x\right)\right| : \|x\| \leq 1\right\} = \left\|x^*\right\|$$

Παρατηρούμε ότι, $\left\|x^*\right\| = \left\|x^*\left(y_0\right)\right\| \leq \left\|x^*\right\| \cdot \left\|y_0\right\| \Rightarrow \left\|y_0\right\| = 1$ Επίσης έχομε ότι υπάρχει $a \in K$ με $|a| = 1$ ώστε $\left|x^*\left(y_0\right)\right| = ax^*\left(y_0\right) = x^*\left(ay_0\right)$. Έτσι θέτομε $x = ay_0$ και έχομε $\left\|x_0\right\| = \left\|y_0\right\| = 1$.

<u>Παρατηρήσεις</u> 1) Το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν ισχύει πάντοτε χωρίς την υπόθεση της αυτοπάθειας. Για παράδειγμα αν $\Lambda : c_0 \to R : \Lambda\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\left(n\right)}{2^n}, x = \left(x\left(n\right)\right) \in c_0$ (=ο χώρος των μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών) τότε ισχύουν:

(α) Το Λ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με $\|\Lambda\| = 1$

(β) Για κάθε $x \in c_0$ με $\|x\|_\infty \le 1 \Rightarrow |\Lambda(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{2^n} < 1$

(Πρβλ. την άσκηση (2) της παραγράφου 2).

2) Αν X είναι χώρος με νόρμα τότε από το θεώρημα Hahn-Banach (αλλά και από το θεώρημα Alaoglou) έχομε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε $x^*(x) = \|x\|$. Έτσι το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει θεωρώντας τον X ως συζυγή του X^* ($X^{**} = X$)

<u>Θεώρημα</u> 4.2.4 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και $\mathrm{K} \subseteq X$. Τότε το K είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνο αν το K είναι ασθενώς κλειστό και norm φραγμένο.

<u>Απόδειξη</u> « $\Rightarrow$ » Έστω ότι το K είναι ασθενώς συμπαγές. Τότε βέβαια το K είναι ασθενώς κλειστό. Αν $x^* \in X^*$ τότε επειδή το x^* είναι ασθενώς συνεχές και το K ασθενώς συμπαγές, έχομε ότι $\sup\left\{|x^*(x)| : x \in \mathrm{K}\right\} < +\infty$. Από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος έπεται ότι το K είναι norm φραγμένο.

« $\Leftarrow$ » Έστω $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathrm{K} \subseteq \hat{\mathrm{B}}(0,\varepsilon)$. Από την αυτοπάθεια του X η $\hat{\mathrm{B}}_X(0,\varepsilon)$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο. Επειδή το K είναι ασθενώς κλειστό συμπεραίνουμε ότι είναι ασθενώς συμπαγές.

……………………………………………

<u>Παρατηρήσεις</u> 4.2.5 1) Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται ακολουθιακά συμπαγής, αν κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ έχει κάποια υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in X$.

Ένα ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές υποσύνολο K ενός χώρου Banach είναι αναγκαία <u>norm φραγμένο</u>. Πράγματι, αν το K δεν ήταν φραγμένο τότε θα υπήρχε μια ακολουθία $(x_n) \subseteq \mathrm{K}$ ώστε $\|x_n\| \ge n$ για κάθε $n \ge 1$. Έστω (x_{k_n}) μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n), τότε βέβαια η (x_{k_n}) θα ήταν φραγμένη άτοπο.

2) Το θεώρημα 4.2.4 είναι συνέπεια ενός γενικότερου αποτελέσματος: Αν X χώρος Banach και $\mathrm{K} \subseteq X^*$ τότε το K είναι ασθενώς* συμπαγές αν και μόνο αν είναι ασθενώς* κλειστό και norm φραγμένο (πρβλ. τις ασκήσεις). Έπεται ιδιαίτερα από το αποτέλεσμα αυτό ότι κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι norm φραγμένο (γιατί;).

<u>Λήμμα</u> 4.2.6 Κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K ενός διαχωρίσιμου χώρου Banach X είναι μετρικοποιήσιμο.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω K ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X . Από το θεώρημα 4.1.8 η $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}, w^*\right)$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος χώρος επομένως διαχωρίσιμος. Έστω

$D=\left\{x_n^*: n\geq 1\right\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο της $\left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}, w^*\right)$. Παρατηρούμε ότι

το D διαχωρίζει τα σημεία του X . Πράγματι, έστω $x\in X$ ώστε $x_n^*(x)=0$ για κάθε $n\geq 1$. Επειδή το $x=\varphi(x)$ είναι ένα ασθενώς* συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές επί του X^* ($\left(X^*, w^*\right)^* = X^*$), είναι και συνεχής συνάρτηση αν περιορισθεί στην $\left(\mathrm{B}_{X^*}, w^*\right)$

έπεται ότι $x^*(x)=0$ για κάθε $x^*\in \mathrm{B}_{X^*}$ και άρα $x^*(x)=0$ για κάθε $x\in X$.Έτσι έχομε ότι $x=0$.

Ορίζουμε τον τελεστή $T: X\to c_0$ ώστε $T(x)=\left(\dfrac{x_n^*(x)}{n}\right)_{n\geq 1}$ Εύκολα ελέγχεται ότι ο T είναι καλά ορισμένος, γραμμικός $1-1$ (το D διαχωρίζει τα σημεία του X) και φραγμένος με $\|T\|\leq 1$. [Επειδή από το θεώρημα 4.1.13 ο T είναι ασθενώς συνεχής, έπεται ότι το ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K του X είναι ομοιομορφικό με το ασθενώς συμπαγές υποσύνολο $T(\mathrm{K})$ του c_0 . Όμως το $T(\mathrm{K})$ είναι norm φραγμένο από την παρατήρηση 4.2.5 (2) και όπως γνωρίζουμε από το πόρισμα 4.1.9 η ασθενής τοπολογία στα φραγμένα υποσύνολα ενός χώρου με διαχωρίσιμο συζυγή ($c_0^* = \ell_1$) είναι μετρικοποιήσιμη. Έτσι το $\left(T(\mathrm{K}), w\right)$ είναι μετρικοποιήσιμο και συνεπώς και το (K, w) είναι μετρικοποιήσιμο.

Από το προηγούμενο Λήμμα έπεται εύκολα το ακόλουθο.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.7 Κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο K ενός χώρου Banach X είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές.

<u>Απόδειξη</u> Έστω (x_n) τυχούσα ακολουθία σημείων του K . Θέτομε $\Omega = cl_w\left\{x_n, n\geq 1\right\}\subseteq \mathrm{K}$ και $Y = cl_{\|\cdot\|}\left\langle x_n, n\geq 1\right\rangle$ (=η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\left\{x_n, n\geq 1\right\}$). Προφανώς ο Y είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach και το Ω είναι ένα ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του Y . Από το Λήμμα 4.2.6 ο χώρος (Ω, w) είναι μετρικοποιήσιμος και συνεπώς η (x_n) έχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο $\Omega\subseteq \mathrm{K}$.

....

Το αντίστροφο του προηγουμένου αποτελέσματος ισχύει και είναι ένα βαθύ αποτέλεσμα που ανήκει στον Eberlein . Διατυπώνουμε το θεώρημα του Eberlein και για την απόδειξή του παραπέμπουμε στα βιβλία [F-H-H-M-P-Z] , [M] και [D].

Θεώρημα 4.2.8 (Eberlein) Ένα υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι ασθενώς συμπαγές (αν και μόνο) αν είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγές.

Η ακόλουθη εφαρμογή του θεωρήματος 4.2.7 μας λέει ότι, λόγω της ιδιότητας Schur, ο χώρος ℓ_1 βρίσκεται στον αντίποδα των αυτοπαθών χώρων.

Πρόταση 4.2.9 Ένα υποσύνολο K του χώρου ℓ_1 είναι ασθενώς συμπαγές αν και μόνο αν είναι norm συμπαγές.

Απόδειξη Αν το K είναι norm συμπαγές τότε το K προφανώς είναι ασθενώς συμπαγές. Έστω ότι το K είναι ασθενώς συμπαγές. Από το θεώρημα 4.2.7 κάθε ακολουθία $(x_n)\subseteq \mathrm{K}$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα και συνεπώς - από την ιδιότητα Schur του ℓ_1- norm συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο K. Έτσι το K είναι norm συμπαγές υποσύνολο του ℓ_1.

Από το θεώρημα του Eberlein έπεται και ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των αυτοπαθών χώρων.

Θεώρημα 4.2.10 Έστω X χώρος Banach. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(α) Ο X είναι αυτοπαθής

(β) Κάθε φραγμένη ακολουθία στον X έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη (α) $\Rightarrow$(β) Η $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι ασθενώς συμπαγές σύνολο, έτσι από το θεώρημα 4.2.7 έπεται το συμπέρασμα.

(β) $\Rightarrow$(α) Από το θεώρημα 4.2.8 (Eberlein) έπεται ότι η (B_X, w) είναι συμπαγές σύνολο και έτσι ο X είναι αυτοπαθής.

Παραδείγματα. (1) Οι χώροι ℓ_p και $L_p = L_p[0,1]$, για $1 < p < +\infty$ είναι αυτοπαθείς.

Πράγματι, αν $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε ισχύει $\ell_p^{**}=\ell_q^{*}=\ell_p$, υπό την έννοια ότι για κάθε $f\in\ell_q^{*}$ υπάρχει $g\in\ell_p$ ώστε $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k g(k)$ για κάθε $x=(x_k)\in\ell_q$. Η δράση του f επί του x είναι ίδια με την δράση του g επί του x. Έπεται ότι η κανονική απεικόνιση $\varphi:\ell_p\to\ell_p^{**}$ είναι επί του ℓ_p^{**}. Για τον L_p ο έλεγχος ότι η φ είναι επί του L_p^{**} είναι ανάλογος.

(2) Ο χώρος c_0 δεν είναι αυτοπαθής επειδή $c_0^{**}=\ell_\infty$ και ο ℓ_∞ ως γνωστόν δεν είναι διαχωρίσιμος. Ο χώρος ℓ_1 επίσης δεν είναι αυτοπαθής. Αν ήταν, τότε ο ℓ_1^{**} θα ήταν διαχωρίσιμος και συνεπώς ο $\ell_1^{*}=\ell_\infty$ θα ήταν επίσης διαχωρίσιμος, άτοπο.

3) Αποδεικνύεται ότι κανένας χώρος από την οικογένεια c_0 και $\ell_p, 1 \le p < +\infty$, δεν είναι ισομορφικός με υπόχωρο κάποιου άλλου μέλους της οικογένειας. Έτσι για παράδειγμα αν $1 \le p \ne q < +\infty$ τότε ο ℓ_p δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον ℓ_q . (Πρβλ. [L-T] σελ. 53-4).

<u>Ορισμός</u> 4.2.11 Έστω (M,d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του M . Το A λέγεται <u>προσεγγίσιμο</u> (proximal)αν , για $x \in M$ υπάρχει $y \in A$ ώστε

$$d(x,y) = d(x,A) \ (= \inf\{d(x,z) : z \in A\}).$$

<u>Σχόλιο</u>. Όπως γνωρίζουμε αν H είναι χώρος Hilbert και $A \subseteq H$ κλειστό κυρτό τότε για κάθε $x \in H$ υπάρχει $y \in A$ έτσι ώστε $d(x,y) = d(x,A)$ (και το A είναι συνεπώς προσεγγίσιμο). Η ιδιότητα αυτή των χώρων Hilbert , όχι στην πλήρη της μορφή, κληροδοτείται στους αυτοπαθείς χώρους.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.12 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και $A \subseteq X$ κλειστό και κυρτό. Τότε το A είναι προσεγγίσιμο.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $x_0 \in X$ με $x_0 \notin A$. Θέτομε $d = d(x_0, A)$ και επιλέγομε μια ακολουθία $(x_n) \subseteq A$ ώστε $\|x_n - x_0\| \to d$. Η (x_n) είναι βέβαια φραγμένη ακολουθία και επειδή ο X είναι αυτοπαθής, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{w} x \in X$. Επειδή το A είναι κλειστό κυρτό από το θεώρημα Mazur to $x \in A$. Έστω $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ ώστε $\|x - x_0\| = |x^*(x - x_0)|$. Τότε έχομε $\|x - x_0\| = |x^*(x - x_0)| \le |x^*(x - x_{k_n})| + |x^*(x_{k_n} - x_0)|$
$\le |x^*(x - x_{k_n})| + \|x_{k_n} - x_0\|$

Παίρνοντας όρια, συμπεραίνουμε ότι $\|x - x_0\| \le d$ και έτσι έχομε $\|x - x_0\| = d = d(x_0, A)$.

<u>Θεώρημα</u> 4.2.13 Έστω X χώρος με νόρμα και $x^* \in X^*$ με $x^* \ne 0$. Τότε ο πυρήνας $Kerx^*$ του x^* είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $|x^*(x)| = \|x^*\|$.

<u>Απόδειξη</u> « $\Rightarrow$ » Η απεικόνιση $\Lambda : X / Kerx^* \to K : \Lambda(x + Kerx^*) = x^*(x)$ είναι γραμμική φραγμένη $1-1$ και επί του K με $\|\Lambda\| = \|x^*\|$ (Πρβλ. την απόδειξη της πρότασης1.12). Επομένως είναι ένας ισομορφισμός μονοδιάστατων χώρων Banach, έτσι υπάρχει $x_0 \in X$ με $\|x_0 + Kerx^*\| = 1$ και $|\Lambda(x_0 + Kerx^*)| = \|\Lambda\|$. Εφόσον ο $Kerx^*$ είναι προσεγγίσιμος, υπάρχει $y \in Kerx^*$ ώστε $\|x_0 - y\| = d(x_0, Kerx^*) = \|x_0 + Kerx^*\| = 1$.

Έπεται ότι, $|x^*(x_0 - y)| = |x^*(x_0)| = |\Lambda(x_0 + Kerx^*)| = \|\Lambda\| = \|x^*\|$.

Το ζητούμενο x είναι το $x = x_0 - y$.

«$\Leftarrow$» Έστω $x_0 \in X$ με $x_0 \notin Kerx^*$. Από την υπόθεσή μας υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ ώστε $\left|x^*(x)\right| = \left\|x^*\right\|$. Επειδή $\dim\left(X / Kerx^*\right) = 1$, υπάρχουν $y \in Kerx^*$ και $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$ ώστε $x = y + \lambda x_0$. Αν z είναι τυχόν στοιχείο του $Kerx^*$ θα έχουμε

$$\left\|z - x_0\right\| \geq \frac{\left\|x^*\left(z - x_0\right)\right\|}{\left\|x^*\right\|} = \frac{\left|x^*\left(x_0\right)\right|}{\left\|x^*\right\|} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{\left|x^*\left(y + \lambda x_0\right)\right|}{\left\|x^*\right\|} = \frac{1}{|\lambda|} = \left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|.$$

Έπεται ότι, $d\left(x_0, Kerx^*\right) = \left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|$. Άρα ο $Kerx^*$ είναι προσεγγίσιμος.

<u>Παρατήρηση</u> 4.2.14 1) Ο πυρήνας του συναρτησοειδούς $\Lambda : c_0 \to R$, $\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$, $x = \left(x(n)\right) \in c_0$, δεν είναι προσεγγίσιμος εφόσον η νόρμα του Λ δεν επιτυγχάνεται σε κανένα σημείο της μοναδιαίας σφαίρας του c_0. (Πρβλ. την παρατήρηση (1) μετά το πόρισμα 4.2.3 .)

2) Αν ο χώρος X είναι αυτοπαθής τότε όπως έπεται από το θεώρημα 4.2.13 και το πόρισμα4.2.2- ο πυρήνας κάθε συναρτησοειδούς $x^* \in X^*$ με $x^* \neq 0$ είναι προσεγγίσιμος.

3) Αποδεικνύεται ότι και το αντίστροφο του θεωρήματος 4.2.12 ισχύει: Αν κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι προσεγγιστικό τότε ο χώρος είναι αυτοπαθής

(Πρβλ. το [M] σελ 435-6)

4) Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $\pi : X \to X / Y$ η κανονική απεικόνιση. Αποδεικνύεται τότε ότι ο Y είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν

$$\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right) = \hat{\mathrm{B}}_{X/Y}.$$

(Πρβλ. και τις παρατηρήσεις 1.4 και 1.6 της παραγράφου 1, την παρατήρηση (1) μετά το πόρισμα 4.2.3 καθώς και τις ασκήσεις που ακολουθούν.)

<u>Ασκήσεις</u>

1) Έστω X χώρος Banach. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν (x_n) είναι ακολουθία στον X και $x \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη και $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(β) Αν η (x_n^*) είναι ακολουθία στον X^* και $x^* \in X^*$ ώστε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε η (x_n^*) είναι φραγμένη και $\left\|x^*\right\| \leq \liminf \left\|x_n^*\right\|$.

[<u>Υπόδειξη.</u> Για το (α): Από την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος η (x_n) είναι φραγμένη. Έστω $c = \liminf \|x_n\|$. Αν $\|x^*\| \le 1$ τότε $|x^*(x)| = \lim |x^*(x_n)| \le \liminf (\|x^*\| \cdot \|x_n\|)$
$= \|x^*\| \cdot \liminf \|x_n\| \le \liminf \|x_n\| = c$. Η απόδειξη για το (β) είναι παρόμοια]

2)Έστω X χώρος με νόρμα. Αν η ακολουθία (x_n) είναι norm Cauchy και $x_n \xrightarrow{w} x$ τότε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

[<u>Υπόδειξη</u> $x_n \in x_m + \varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$ και το σύνολο $x_m + \varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$ είναι ασθενώς κλειστό.]

3) Έστω (x_n) ακολουθία στον χώρο Banach X , όπου $X = \ell_p$ ή c_0 ($1 \le p < +\infty$). Έστω $x_n = (x_{nk})_{k \ge 1}$, $n \in N$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $X = \ell_p$, $1 < p < +\infty$ ή c_0 τότε: $x_n \xrightarrow{w} 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ ώστε $\|x_n\| \le \mathrm{M}, n \ge 1$ και $x_{nk} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ για κάθε $k \in N$.

(β) Αν $X = \ell_1 = c_0^*$ τότε: $x_n \xrightarrow{w^*} 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ ώστε $\|x_n\|_1 \le \mathrm{M}$, $n \ge 1$ και $x_{nk} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ για κάθε $k \in N$.

[<u>Υπόδειξη</u> Η ακολουθία $e_n, n \ge 1$ είναι ολικό υποσύνολο του X].

4) Έστω $X = \ell_1 \cong c_0^*$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (e_n) ικανοποιεί την $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ αλλά όχι την $e_n \xrightarrow{w} 0$

[<u>Υπόδειξη</u> Για το δεύτερο ερώτημα αποδείξτε πρώτα ότι $0 \notin \overline{co}\{e_n, n \ge 1\}$]

5) Αποδείξτε ότι στον χώρο Banach ℓ_∞ το σύνολο $\mathrm{K} = \{e_n : n \ge 1\} \cup \{0\}$ είναι ασθενώς συμπαγές αλλά όχι norm συμπαγές.

[<u>Υπόδειξη</u> $\{e_n : n \ge 1\} \subseteq c_0 \subseteq \ell_\infty$].

6) Έστω $X = c_0$ ή ℓ_p ($1 < p < +\infty$). Αποδείξτε ότι η ασθενής τοπολογία στην $\hat{\mathrm{B}}_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ είναι μετρικοποιήσιμη και ότι συμπίπτει με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο επί του N . Επίσης αποδείξτε ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$.

7) Έστω $F : \ell_1 \to R$ ώστε $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x = (x_k) \in \ell_1$. Αποδείξτε ότι η F είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές επί του ℓ_1 και ακόμη ότι δεν είναι ασθενώς* συνεχές επί του $\ell_1 \cong c_0^*$ (δηλαδή ότι $F \in \ell_\infty \setminus c_0$).

[<u>Υπόδειξη</u> Από την άσκηση (4) έχουμε ότι $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ στον ℓ_1)]

8) Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η S_X είναι πυκνό υποσύνολο της $\left(\hat{B}_X, w\right)$ άρα και ασθενώς* πυκνό υποσύνολο της $\hat{B}_{X^{**}}$

(β) Η νόρμα του X δεν είναι ασθενώς συνεχής σε κανένα σημείο του X.

[<u>Υπόδειξη</u> Για το (α): Έστω $\|x_0\| < 1$ και έστω $B_F(x_0, \varepsilon)$ μια ασθενώς ανοικτή βασική περιοχή του x_0, όπου $F \subseteq X^*$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$. Τότε $x_0 + \bigcap_{x^* \in F} Kerx^* \subseteq B_F(x_0, \varepsilon)$.
Ο διανυσματικός υπόχωρος $M = \bigcap_{x^* \in F} Kerx^*$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση και συνεπώς $M \neq \{0\}$. Έστω $x_1, x_2 \in M$ ώστε $\|x_0 + x_1\| < 1$ και $\|x_0 + x_2\| > 1$. Παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[x_0 + x_1, x_0 + x_2] \subseteq x_0 + M \subseteq B_F(x_0, \varepsilon)$ και ότι τέμνει την S_X

Για το (β): Από το (α) υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ στην S_X ώστε $x_\delta \xrightarrow{w} 0$. Άρα η $\|\cdot\|$ δεν είναι ασθενώς συνεχής στο 0. Αν $x \neq 0$, τότε το $y = \dfrac{x}{1 + \|x\|}$ έχει $\|y\| < 1$. Αν $\lambda = 1 + \|x\|$ τότε από το (α) υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ στην S_X ώστε $x_\delta \to y = \dfrac{x}{\lambda} \Rightarrow \lambda x_\delta \xrightarrow{w} x$. Από όπου συμπεραίνουμε ότι η $\|\cdot\|$ δεν είναι ασθενώς συνεχής στο x.]

9) Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι: (α) Αν $K \subseteq X$, τότε το K είναι norm φραγμένο αν και μόνο αν το K είναι ασθενώς φραγμένο.

(β) Αν ο X είναι χώρος Banach και $K \subseteq X^*$, τότε το K είναι norm φραγμένο αν και μόνο αν είναι ασθενώς * φραγμένο.

[<u>Υπόδειξη</u>. Χρησιμοποιείστε την αρχή του ομοιομόρφου φράγματος].

10) Έστω X χώρος Banach και $K \subseteq X^*$, αποδείξτε ότι το K είναι ασθενώς συμπαγές* αν και μόνο αν είναι ασθενώς* κλειστό και norm φραγμένο.

11) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα . Αποδείξτε ότι ο X εμφυτεύεται ισομετρικά σ' ένα χώρο Banach της μορφής $C(\Omega)$ όπου Ω συμπαγής χώρος.

[<u>Υπόδειξη</u> Έστω $\Omega = \left(\hat{\mathrm{B}}_{X^*}, w^* \right)$. Ορίζουμε $T : X \to C(\Omega)$ ώστε $T(x)(x^*) = x^*(x), x \in X, x^* \in \Omega$. Αποδείξτε ότι η T είναι γραμμική ισομετρία.]

12) Έστω X χώρος με νόρμα και $\mathrm{K} \subseteq X$ φραγμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι το K είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν η ασθενής* κλειστότητα του στον X^{**} περιέχεται στον X (δηλαδή $c\ell_{w^*}\mathrm{K} \subseteq X$).

13) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος Banach και (x_n) πυκνή ακολουθία στην $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Ορίζουμε $T : X^* \to \ell_2 : T(x^*) = \left(\dfrac{x^*(x_n)}{2^n} \right)_{n \geq 1}$. Αποδείξτε ότι ο T είναι ένας γραμμικός φραγμένος και $1-1$ τελεστής ο οποίος είναι ασθενώς *-ασθενώς συνεχής όταν περιορισθεί στην $\hat{\mathrm{B}}_{X^*}$.

14) (α) Έστω X, Y χώροι Banach και $1 \leq p < +\infty$. Θέτομε $Z = (X \oplus Y)_p$ (= το ευθύ άθροισμα των X και Y στην $p-$νόρμα). Αποδείξτε ότι $Z^* \cong (X^* \oplus Y^*)_q$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.

(β) Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach ώστε ο X να είναι ισομορφικός με τον συζυγή του X^*. Είναι τότε ο X ισομορφικός με κάποιο χώρο Hilbert;

[<u>Υπόδειξη</u>. Η απόδειξη του (α) είναι παρόμοια με την απόδειξη του δυϊσμού των χώρων ℓ_p, δηλαδή $\ell_p^* = \ell_q$, $\ell_1^* = \ell_\infty$. Για το (β) παρατηρούμε ότι αν X είναι αυτοπαθής χώρος Banach (μη ισομορφικός με χώρο Hilbert) και $Y = (X \oplus X^*)_2$, τότε από το (α) έχουμε ότι $Y^* \cong (X^* \oplus X^{**})_2 = (X^* \oplus X)_2 \cong Y$.]

15) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Τότε $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w \right)$ είναι μετρικοποιήσιμος (διαχωρίσιμος) χώρος αν και μόνο αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

[<u>Υπόδειξη</u>. Έχουμε ήδη αποδείξει την κατεύθυνση, X^* διαχωρίσιμος τότε $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w \right)$ μετρικοποιήσιμος (και διαχωρίσιμος) χώρος. (πρβλ. Πόρισμα 4.1.9). Έστω ότι η $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w \right)$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος. Θεωρούμε μια ακολουθία $\mathrm{B}_{F_n}(0, \varepsilon_n), n \geq 1$ ασθενώς ανοικτών βασικών περιοχών του $0 \in X$ (F_n πεπερασμένο υποσύνολο του X^* και $\varepsilon_n > 0, n \in N$) ώστε η ακολουθία $U_n = \mathrm{B}_{F_n}(0, \varepsilon_n) \bigcap \hat{\mathrm{B}}_X, n \geq 1$, να είναι βάση περιοχών του 0 στον χώρο $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$. Χωρίς περιορισμό, της γενικότητας υποθέτομε ότι $\varepsilon_n = 1, n \geq 1$ και θέτομε $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, Y = c\ell_{\|\cdot\|}\langle F \rangle$ (= η κλειστή γραμμική θήκη του F στον X^*). Θα αποδείξουμε ότι $Y = X^*$. Έστω $x^{**} \in X^{**}$ με $\|x^{**}\| \leq 1$ ώστε το x^{**} να μηδενίζεται επί του F. Από το θεώρημα Goldstine υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta} \subseteq \hat{\mathrm{B}}_X$ ώστε $x_\delta \xrightarrow{w^*} x^{**}$. Έστω ότι δίδεται $n \in N$. Τότε υπάρχει $\delta_0 \in \Delta$ ώστε $|x^*(x_\delta)| = |x^*(x_\delta - x^{**})| < \varepsilon_n = 1$ για κάθε $\delta \geq \delta_0$ για κάθε $x^* \in F_n$. Έπεται ότι $x_\delta \in U_n$ για κάθε $\delta \geq \delta_0$. Επειδή αυτό γίνεται για κάθε $n \in N$, συμπεραίνουμε ότι $x_\delta \xrightarrow{w} 0$, επομένως $x^{**} = 0$.]

16) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach.

(α) Αποδείξτε ότι νόρμα $\|\cdot\|$ του X είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής συνάρτηση επί του X.

(β) Αποδείξτε ότι αν ο X είναι διαχωρίσιμος τότε κάθε υποσύνολο A του X είναι με την ασθενή (σχετική) τοπολογία διαχωρίσιμος χώρος.

(γ) Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για τον X : (ι) $\left(\hat{\mathrm{B}}_X, w\right)$ είναι διαχωρίσιμος, (ιι) (S_X, w) είναι διαχωρίσιμος και (ιιι) X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

[<u>Υπόδειξη</u>. Για το (α). Κάθε κλειστή σφαίρα του X είναι από το θεώρημα Mazur ασθενώς κλειστό σύνολο. Για το (β). Η ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, w)$ είναι συνεχής. Για το (γ). (ι) $\Rightarrow$ (ιι). Έστω D αριθμήσιμο ασθενώς πυκνό υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ και $x \in S_X$, τότε υπάρχει δίκτυο $(x_\delta)_{\delta \in \Delta} \subseteq D : x_\delta \xrightarrow{w} x$. Επειδή από το (α) η νόρμα είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής $1 = \|x\| \leq \liminf_{\delta \in \Delta} \|x_\delta\|$, άρα $\|x_\delta\| \to 1$ (πρβλ και την άσκηση 1 (α)).

Έπεται ότι, $\dfrac{x_\delta}{\|x_\delta\|} \xrightarrow{w} x$. Άρα το σύνολο $\left\{ \dfrac{x}{\|x\|} : x \in D, x \neq 0 \right\}$ είναι αριθμήσιμο και ασθενώς πυκνό στην S_X. Η κατεύθυνση (ιι) $\Rightarrow$ (ι) έπεται από το γεγονός ότι η S_X είναι ασθενώς πυκνό υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ (πρβλ. άσκηση (8)). Για το (ι) $\Rightarrow$ (ιιι) παρατηρούμε ότι αν D είναι αριθμήσιμο και ασθενώς πυκνό υποσύνολο της $\hat{\mathrm{B}}_X$ τότε το $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} nD$ είναι αριθμήσιμο και ασθενώς πυκνό υποσύνολο του X και έτσι ο X είναι ασθενώς διαχωρίσιμος. Έστω $D_1 = \langle L \rangle$ η γραμμική θήκη του L τότε το σύνολο S των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του L με ρητούς συντελεστές είναι norm πυκνό στο D_1, επομένως το D_1 είναι norm διαχωρίσιμο. Επειδή το D_1 είναι ασθενώς πυκνό κυρτό σύνολο (ως γραμμικός υπόχωρος) έπεται από τις συνέπειες του θεωρήματος Mazur ότι είναι και norm πυκνό στο X . Η κατεύθυνση (ιιι) $\Rightarrow$ (ι) είναι συνέπεια του (β).]

17) Στον χώρο Hilbert $L_2\left[0,2\pi\right]$, θεωρούμε την ακολουθία $f_N\left(t\right)=\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N^2}e^{\text{int}}, N\geq 1$.

Αποδείξτε ότι: (α) $f_N \xrightarrow{w} 0$ και (β) $\left\|g_N\right\|_2$ δεν τείνει στο 0, όπου $g_N=\dfrac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n, N\geq 1$.

Συγκρίνετε αυτά τα αποτελέσματα με το θεώρημα Mazur.

[Περιγραφή της απόδειξης: Έστω $u_k\left(t\right)=e^{ikt}, t\in\left[0,2\pi\right], k\in Z$. Τότε $\left\|u_k\right\|_2^2=2\pi, k\in Z$ και $\left\langle u_n,u_m\right\rangle=\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)t}dt=\begin{cases}2\pi, n=m\\ 0, \quad n\neq m\end{cases}$. Έτσι το σύνολο $\left\{\dfrac{u_k}{\sqrt{2\pi}}:k\in Z\right\}$ είναι ορθοκανονικό. Από το θεώρημα Weierstrass (ή Fejer) το σύνολο $\left\{u_k:k\in Z\right\}$ είναι ολικό υποσύνολο του χώρου Banach $C\left(T\right)$, όπου $\mathrm{T}=\left\{z\in C:\left|z\right|=1\right\}$. Επειδή ο χώρος $C\left(T\right)$ είναι πυκνός στον χώρο Hilbert $L_2\left[0,2\pi\right]$ έπεται ότι το $\left\{u_k:k\in Z\right\}$ είναι ολικό στον $L_2\left[0,2\pi\right]$. Επομένως μια φραγμένη ακολουθία $\left(f_N\right)\subseteq L_2\left[0,2\pi\right]$ είναι ασθενώς μηδενική ακριβώς όταν $\left\langle f_N,u_k\right\rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ για κάθε $k\in Z$. Η δοσμένη $\left(f_N\right)$ είναι βέβαια φραγμένη αφού, ($f_N\left(t\right)=\dfrac{1}{N}e^{it}\cdot\dfrac{e^{iN^2t}-1}{e^{it}-1}, t\in\left[0,2\pi\right)$, $f_N\left(0\right)=f_N\left(2\pi\right)=N$ και)

$$\| f_N\|_2^2=\int_0^{2\pi}| f_N|^2\,dt=\frac{1}{N^2}\int_0^{2\pi}\left|u_1+u_2+\ldots+u_{N^2}\right|^2 dt=\frac{1}{N^2}\int_0^{2\pi}\left(\left|u_1\right|^2+\ldots+\left|u_{N^2}\right|^2\right)dt=$$

$\dfrac{1}{N^2}\int_0^{2\pi}N^2dt=2\pi$, χρησιμοποιώντας ότι το $\left\{\dfrac{u_k}{\sqrt{2\pi}}:k\in Z\right\}$ είναι ορθοκανονικό.

Παρατηρούμε ότι αν $k\in Z$ τότε για κάθε $N\geq k$, $\left\langle f_N,u_k\right\rangle=\dfrac{1}{N}\left\langle u_k,u_N\right\rangle=\dfrac{2\pi}{N}\xrightarrow[N\to\infty]{}0$.

Άρα $f_N \xrightarrow[N\to\infty]{w} 0$.

Για το (β) παρατηρούμε τα ακόλουθα: $\left\|g_N\right\|_2^2=\dfrac{1}{N^2}\int_0^{2\pi}\left|f_1+\ldots+f_N\right|^2dt\Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi}\left|f_1+\ldots+f_N\right|^2dt=N^2.\left\|g_N\right\|_2^2 \qquad (1)$$

Επίσης έχουμε: $\left| f_1 + \ldots + f_N \right|^2 = \left(f_1 + \ldots + f_N \right) \cdot \overline{\left(f_1 + \ldots + f_N \right)} =$

$$\left(f_1 + \ldots + f_N \right) \cdot \left(\overline{f_1} + \ldots + \overline{f_N} \right) = \sum_{k=1}^{N} | f_k |^2 + \sum_{\substack{1 \le k, \lambda \le N \\ k \ne \lambda}} f_k \cdot \overline{f_\lambda}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} | f_k |^2 + \sum_{1 \le k < \lambda \le N} f_k \cdot \overline{f_\lambda} + \sum_{1 \le k < \lambda \le N} \overline{f_k} \cdot f_\lambda \qquad (2)$$

Αν $1 \le k \le \lambda \le N$, τότε $f_k \cdot \overline{f_\lambda} = \dfrac{\left(u_1 + \ldots + u_{k^2} \right)}{k} \cdot \dfrac{\overline{\left(u_1 + \ldots + u_{\lambda^2} \right)}}{\lambda}$

$= \dfrac{1}{k\lambda} \left(u_1 + \ldots + u_{k^2} \right) \cdot \left(\overline{u_1} + \ldots + \overline{u_{\lambda^2}} \right)$. Λαμβάνοντας υπόψη την καθετότητα των u_i, u_j με $1 \le i \ne j \le \lambda^2$ συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{1}{k\lambda} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(|u_1|^2 + \ldots + |u_{k^2}|^2 \right) dt = 2\pi \frac{k^2}{k\lambda} = 2\pi \frac{k}{\lambda}$

$$\left\langle f_k , f_\lambda \right\rangle = \int_0^{2\pi} f_k \cdot \overline{f_\lambda} dt = \text{, άρα και} \int_0^{2\pi} f_\lambda \overline{f_k} dt = \left\langle f_\lambda , f_k \right\rangle = \overline{\left\langle f_k , f_\lambda \right\rangle} = 2\pi \frac{k}{\lambda} \qquad (3)$$

Έπεται από τις (1), (2) και (3) ότι $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left| f_1 + \ldots + f_N \right|^2 dt =$

$$\sum_{k=1}^{N} \int_0^{2\pi} | f_k |^2 dt + 2 \sum \left\{ \int_0^{2\pi} f_k \overline{f_\lambda} : 1 \le k < \lambda \le n \right\} = 2\pi N + 4\pi \sum \left\{ \frac{k}{\lambda} : 1 \le k < \lambda \le N \right\} \quad (4).$$

Θέτομε $I_N = \sum \left\{ \dfrac{k}{\lambda} : 1 \le k < \lambda \le N \right\}, N \ge 2$ και παρατηρούμε ότι,

$$I_N = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{N} \right) + \ldots + \left(\frac{N-2}{N-1} + \frac{N-2}{N} \right) + \frac{N-1}{N}.$$

Επομένως $I_{2N} = A + B$, όπου $A = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2N} \right) + \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{4} + \ldots + \dfrac{2}{2N} \right) + \ldots +$

$\left(\dfrac{N}{N+1} + \dfrac{N}{N+2} + \ldots + \dfrac{N}{2N} \right)$ και $B = \left(\dfrac{N+1}{N+2} + \dfrac{N+1}{N+3} + \ldots + \dfrac{N+1}{2N} \right) + \ldots + \dfrac{2N-1}{2N}$.

Αν $k \le N$, τότε $\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k+2} + \ldots + \dfrac{1}{2N} \ge \dfrac{N}{2N} = \dfrac{1}{2}$.

Κατά συνέπεια , $I_{2N} > A \ge \dfrac{1+2+\ldots+N}{2} = \dfrac{N\left(N+1\right)}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{N\left(N+1\right)}{4}$ (5).

Έπεται από τις (4) και (5) ότι $\left\| g_{2N} \right\|_2^2 = \dfrac{1}{4N^2} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left| f_1 + \ldots + f_{2N} \right|^2 dt = \frac{1}{4N^2} \left(4\pi N + 4\pi I_{2N} \right)$

$$= \frac{\pi N + \pi I_{2N}}{N^2} > \frac{1}{N^2} \cdot I_{2N} > \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N\left(N+1\right)}{4} = \frac{1}{4} \frac{N\left(N+1\right)}{N^2} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{4}.$$

Έπεται ότι $\|g_{2N}\|_2$ δεν συγκλίνει στο 0 και συνεπώς $\|g_N\|_2$ δεν συγκλίνει στο 0.

Επειδή $f_N \xrightarrow{w} 0$, από το θεώρημα του Mazur υπάρχει ακολουθία κυρτών συνδυασμών μελών της (f_N) η οποία συγκλίνει norm στο 0. Από το (β) όμως συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία (g_N) των μέσων όρων της (f_N) δεν έχει αυτή την ιδιότητα.

18) Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι: (α) Ο συζυγής τελεστής $T^*: Y^* \to X^*$ του T είναι συνεχής και για τις ασθενείς* τοπολογίες των Y^* και X^*.

(β) Αν ο T είναι ισομορφισμός μεταξύ των X και Y τότε και ο T^* είναι ισομορφισμός μεταξύ των X^* και Y^*.

(γ) Η προβολή $P: X^{***} \to X^*: P(f) = f|_X$, είναι συζυγής τελεστής.

[<u>Υπόδειξη</u> Για το (γ). Η P είναι η προβολή Dixmier (πρβλ. την άσκηση (6) της παραγράφου (2)). Δείξτε ότι $P = \varphi^*$, όπου $\varphi: X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}].

19) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι η

(α) Η νόρμα $\|\cdot\|$ του X^* είναι ασθενώς* κάτω ημισυνεχής.

(β) Αν $(x_i^*)_{i\in I}$ είναι φραγμένο δίκτυο στον X^* και $x^* \in X^*$ ώστε $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε $\|x^*\| \le \liminf \|x_i^*\|$.

20) Έστω X χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε μη κενό ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X είναι προσεγγίσιμο. Ιδιαίτερα κάθε αυτοπαθής υπόχωρος του X είναι προσεγγίσιμος.

(β) Κάθε μη κενό ασθενώς* συμπαγές υποσύνολο του X^* είναι προσεγγίσιμο.

(γ) Αν Y είναι κλειστός υπόχωρος του X και $\pi: X \to X/Y$ η κανονική απεικόνιση τότε, ο Y είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν ισχύει ότι, $\pi\left(\hat{B}_X\right) = \hat{B}_{X/Y}$.