

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Ασκήσεις

Ακαδημαϊκό Έτος 2019-2020

Περιεχόμενα

1. **Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης**
 - 1.1 Βοηθητική θεωρία ως προς την επίλυση ασκήσεων ... 3
 - 1.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 1 ... 5
 - 1.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 1 ... 6
2. **Τα Βασικά Θεωρήματα**
 - 2.1 Βοηθητική θεωρία ως προς την επίλυση ασκήσεων ... 12
 - 2.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 2 ... 13
 - 2.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 2 ... 14
3. **Γραμμικές Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές**
 - 3.1 Βοηθητική θεωρία ως προς την επίλυση ασκήσεων ... 17
 - 3.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 3 ... 19
 - 3.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 3 ... 20
4. **Μέθοδος Δυναμοσειρών**
 - 4.1 Βοηθητική θεωρία ως προς την επίλυση ασκήσεων ... 30
 - 4.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 4 ... 31
 - 4.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 4 ... 32
5. **Γραμμικά Συστήματα**
 - 5.1 Βοηθητική θεωρία ως προς την επίλυση ασκήσεων ... 35
 - 5.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 5 ... 38
 - 5.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 5 ... 39
6. **Ποιοτική Θεωρία**
 - 6.1 Βοηθητική θεωρία ως προς την επίλυση ασκήσεων ... 45
 - 6.2 Ασκήσεις Κεφαλαίου 6 ... 47
 - 6.3 Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 6 ... 48 ¹

¹Επιμέλεια : Κώστας Μπιζάνος

Κεφάλαιο 1

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1. Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών:

Ορισμός: Μια διαφορική μορφή χωριζομένων μεταβλητών είναι της μορφής

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t)h(y)$$

με $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $h : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$.

Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης:

- (i) Αν $h(y) = 0$ για $y = y_k, k = 1, 2, \dots, n$ τότε, $y(t) = y_k, t \in (a, b)$.

- (ii) Αν $h(y) \neq 0$ τότε, $\frac{y'}{h(y)} = g(t)$ και ολοκληρώνοντας ως προς t προκύπτει $\int \frac{y'}{h(y)} dt = \int g(t) dt + c$.

- Για την επίλυση του Π.Α.Τ. $\left[y' = g(t)h(y), y(t_0) = y_0, t_0 \in (a, b) \right]$

- (i) Από την γενική λύση βρίσκουμε c με την βοήθεια της αρχικής συνθήκης.

- (ii) Με ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^t g(t) dt.$$

2. Για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$y' + p(t)y = q(t)$$

με $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, κάνουμε χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}.$$

3. Για την επίλυση διαφορικής εξίσωσης *Bernoulli* της μορφής

$$y' + p(t)y = q(t)y^r$$

όπου $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και $r \in \mathbb{R}$ γίνεται χρήση του μετασχηματισμού $u = y^{1-r}$.

4. Για την επίλυση διαφορικής εξίσωσης *Riccati* της μορφής

$$y' + p(t)y = q(t)y^2 + f(t)$$

με $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς γίνεται χρήση του μετασχηματισμού $y(t) = y_1(t) + \frac{1}{u(t)}$, όπου $y_1(t)$ μια γνωστή λύσης της δ.ε. .

5. Για την επίλυση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0$$

με $M, N : D \rightarrow \mathbb{R}$, ομογενείς του ίδιου βαθμού γίνεται χρήση του μετασχηματισμού $u = \frac{y}{t}, t \neq 0$.

6. Για την επίλυσης μιας ακριβούς διαφορικής εξίσωσης της μορφής

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

με

$$M, N \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^2$$

δείχνουμε ότι $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ και έπειτα θεωρούμε την $F \in C^1(D)$ με $F(t, y) = C$ ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial y} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = N$$

και λύνουμε το παραπάνω σύστημα για την εύρεση της $F(t, y) = C$. Σε περίπτωση που $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$ κάνουμε χρήση πολλαπλασιαστή Euler $\mu(t, y) = \mu \neq 0$ η εύρεση του οποίου προκύπτει από την σχέση

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial t}.$$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

1.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' - y = t^2, \quad t > 0.$$

1.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{3}{t}y = y^2t^2, \quad t > 0.$$

1.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{y}{t} = y^2 - \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$$

αν μια λύση της είναι της μορφής $y_1(t) = \frac{1}{t}$.

1.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^2 dt - t(t + y)dy = 0$$

1.5

(i) Ναδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$xf(tx) + tg(tx)x' = 0$$

όπου f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x - tx^2 - (t + t^2x)x' = 0.$$

1.6 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t-y} + 1.$$

1.7 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \int_0^2 y(t)dt, \quad y(0) = 1.$$

1.8 Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η διαφορική εξίσωση

$$ty^2 + \lambda t^2y + t^2(t + y)y' = 0$$

είναι ακριβής και να λυθεί η διαφορική εξίσωση για αυτή την τιμή του λ .

1.9 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$e^{at+y} + 3t^2y^2 + (2t^3y + e^{at+y})y' = 0 \quad (1)$$

Να βρεθεί το a ώστε η (1) να είναι ακριβής και να λυθεί η (1).

1.10 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t + 2y + y^2) + (t + 4yt + 5y^2) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1)$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t + y^2)$.

Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 1

1.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' - y = t^2, \quad t > 0.$$

Λύση.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$y' - \frac{y}{t} = t.$$

Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα, $\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{t} dt} = \frac{1}{t}$ και προκύπτει πως,

$$\frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{t}\right)' = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{t} = t + c \Leftrightarrow y = t^2 + ct, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

1.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{3}{t}y = y^2 t^2, \quad t > 0.$$

Λύση.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση αποτελεί δ.ε. μορφής *Bernoulli* άρα θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$u = \frac{1}{y}, \quad y \neq 0.$$

Άρα, προκύπτει πως,

$$u' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'.$$

Έχουμε πως,

$$-\frac{1}{y^2} \cdot y' - \frac{3}{ty} = -t^2 \Leftrightarrow u' - \frac{3}{t} \cdot u = -t^2$$

η οποία λύνεται με τη χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu(t) = e^{\int -\frac{3}{t} dt} = \frac{1}{t^3}$. Άρα, προκύπτει πως,

$$\frac{u'}{t^3} - 3\frac{u}{t^2} = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{t^3}\right)' = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{u}{t^3} = -\log t + c \Leftrightarrow u = t^3(c - \log t).$$

Άρα, τελικά έχουμε πως, $y = \frac{1}{t^3(c - \log t)}$, $c \neq \log t$.

Ακόμη παρατηρούμε, πως η $y = 0$ ικανοποιεί την δ.ε. άρα, $y = 0$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης. \blacksquare

1.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + \frac{y}{t} = y^2 - \frac{1}{t^2}, \quad t > 0$$

αν μια λύση της είναι της μορφής $y_1(t) = \frac{1}{t}$.

Λύση.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση αποτελεί δ.ε. μορφής *Riccati* άρα θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$y(t) = y_1(t) + \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{u(t)}.$$

Άρα, προκύπτει πως, $y'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{u^2(t)}u'(t)$ και $y^2(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{2}{tu(t)} + \frac{1}{u^2(t)}$

Άρα, έχουμε πως,

$$-\frac{1}{t^2} - \frac{u'}{u^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{tu} = \frac{1}{t^2} + \frac{2}{tu} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow -\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{tu} = \frac{1}{u^2} \Leftrightarrow u' + \frac{u}{t} = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{t}{2} + \frac{c}{t}$$

Άρα τελικά προκύπτει πως,

$$y(t) = \frac{2t}{2c - t^2} + \frac{1}{t}, \quad t^2 \neq 2c.$$

■

1.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^2 dt - t(t+y)dy = 0.$$

Λύση.

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $M(t, y) = y^2$ και $N(t, y) = t(t+y)$ είναι ομογενείς 2ου βαθμού στο \mathbb{R}^2 άρα, η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ομογενής. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό,

$$u = \frac{y}{t}, \quad t \neq 0$$

που προκύπτει πως, $u' = \frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2}$. Άρα, η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται σε

$$u^2 - (1+u)(u+u't) = 0 \Leftrightarrow u^2 - u - u't - u^2 - u'ut = 0 \Leftrightarrow -u = tu'(1+u) \Leftrightarrow -\frac{dt}{t} = \frac{1+u}{u} du$$

$$\int \frac{1+u}{u} du = \int -\frac{1}{t} dt + c \Leftrightarrow \log u + u = c - \log t \Leftrightarrow \log \frac{y}{t} + \frac{y}{t} = c - \log t \Leftrightarrow t \log y + y = ct$$

η οποία είναι λύση σε πεπλεγμένη μορφή.

■

1.5

(i) Ναδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$xf(tx) + tg(tx)x' = 0$$

όπου f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x - tx^2 - (t + t^2x)x' = 0.$$

Λύση.

(i) Θεωρούμε τον εξής μετασχηματισμό

$$y = tx$$

όπου προκύπτει πως, $x' = \frac{y't - y}{t^2}$ δηλαδή,

$$\frac{y}{t}f(y) + tg(y)\left(\frac{y't - y}{t^2}\right) = 0 \Leftrightarrow yf(y) + g(y)(y't - y) = 0 \Leftrightarrow yf(y) + tg(y)y' - yg(y) = 0$$

$$tg(y)y' = y[g(y) - f(y)] \Leftrightarrow y' = \frac{y[g(y) - f(y)]}{tg(y)} \quad (*)$$

η οποία έχει μετασχηματιστεί σε δ.ε. χωριζόμενων μεταβλητών.

(ii) **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό καθώς και την σχέση (*) του (i).

■

1.6 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t-y} + 1.$$

Λύση.

A' Τρόπος

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$u = t - y$$

όπου προκύπτει πως, $u' = 1 - y'$. Δηλαδή έχουμε πως,

$$y' = \frac{1}{t-y} + 1 \Leftrightarrow -y' = \frac{1}{t-y} - 1 \Leftrightarrow u' = -\frac{1}{u} \Leftrightarrow udu = -dt \Leftrightarrow \frac{u^2}{2} = -t + c_1 \Leftrightarrow u^2 = 2c_1 - 2t$$

Άρα, $y = t - \sqrt{2c_1 - 2t}$ ή $y = t + \sqrt{2c_1 - 2t}$ για $t < c_1$.

B' Τρόπος

Παρατηρήστε ότι η διαφορική εξίσωση $-t + y - 1 + (t - y)y' = 0$ είναι ακριβής και λύστε την με την γνωστή μέθοδο. ■

1.7 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \int_0^2 y(t)dt, \quad y(0) = 1.$$

Λύση.

Θέτουμε, $r = \int_0^2 y(t)dt$ και θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = e^{\int dt} = e^t$. Άρα, έχουμε,

$$e^t y' + e^t y = re^t = \left(e^t y \right)' = re^t \Leftrightarrow e^t y = re^t + c \Leftrightarrow y = r + ce^{-t}.$$

Για $t = 0$ έχουμε πως, $c = 1 - r$. Δηλαδή προκύπτει πως,

$$y = r + (1 - r)e^{-t}.$$

Για την λύση της διαφορικής εξίσωσης αρκεί να βρούμε το r .

$$r = \int_0^2 y(t)dt = \int_0^2 r + (1 - r)e^{-t} dt \Leftrightarrow r = 1 - e^2. \text{ Άρα, τελικά έχουμε πως,}$$

$$y(t) = 1 - e^2 + e^{2-t}$$

1.8 Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η διαφορική εξίσωση

$$ty^2 + \lambda t^2 y + t^2(t + y)y' = 0$$

είναι ακριβής και να λυθεί η διαφορική εξίσωση για αυτή την τιμή του λ .

Λύση.

Για να είναι ακριβής η παραπάνω διαφορική εξίσωση για $M(t, y) = ty^2 + \lambda t^2 y$ και $N(t, y) = t^2(t + y)$ αρκεί να ισχύει ότι,

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} \Leftrightarrow 2ty + \lambda t^2 = 3t^2 + 2ty$$

όπου από ισότητα πολυωνύμων ισχύει ότι $\lambda = 3$.

Άρα, η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής :

$$ty^2 + 3t^2y + t^2(t + y)y' = 0$$

η οποία είναι ακριβής.

Άρα, υπάρχει $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ με $F(t, y) = c_1$ ώστε,

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y)$$

- $\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \Leftrightarrow \frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = ty^2 + 3t^2y \Leftrightarrow F(t, y) = \frac{y^2 t^2}{2} + t^3 y + h(y)$
- $\frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y) \Leftrightarrow \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = t^3 + t^2 y \Leftrightarrow h'(y) = 0 \Leftrightarrow h(y) = c_2$

Αν θέσουμε $C = c_1 - c_2$ προκύπτει ότι

$$\frac{y^2 t^2}{2} + t^3 y = C$$

η οποία είναι λύση σε πεπλεγμένη μορφή. ■

1.9 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$e^{at+y} + 3t^2 y^2 + (2t^3 y + e^{at+y})y' = 0 \quad (1)$$

Να βρεθεί το a ώστε η (1) να είναι ακριβής και να λυθεί η (1).

Λύση.

Για να είναι ακριβής η παραπάνω διαφορική εξίσωση για $M(t, y) = e^{at+y} + 3t^2 y^2$ και $N(t, y) = 2t^3 y + e^{at+y}$ αρκεί να ισχύει ότι,

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} \Leftrightarrow e^{at+y} + 6t^2 y = a e^{at+y} + 6t^2 y$$

όπου προκύπτει πως, $a = 1$.

Άρα, η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής :

$$e^{t+y} + 3t^2 y^2 + (e^{t+y} + 2t^3 y)y' = 0$$

η οποία είναι ακριβής.

Άρα, υπάρχει $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ με $F(t, y) = c_1$ ώστε,

$$\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \quad \text{και} \quad \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y)$$

- $\frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = M(t, y) \Leftrightarrow \frac{\partial F(t, y)}{\partial t} = e^{t+y} + 3t^2 y^2 \Leftrightarrow F(t, y) = e^{t+y} + t^3 y^2 + h(y)$
- $\frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = N(t, y) \Leftrightarrow \frac{\partial F(t, y)}{\partial y} = e^{t+y} + 2t^3 y \Leftrightarrow h'(y) = 0 \Leftrightarrow h(y) = c_2$

Αν θέσουμε $C = c_1 - c_2$ προκύπτει ότι

$$e^{t+y} + t^3 y^2 = C$$

η οποία είναι λύση σε πεπλεγμένη μορφή. ■

1.10 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t + 2y + y^2) + (t + 4yt + 5y^2) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1)$$

αν δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t + y^2)$.

Λύση.

Η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

όπου, $M(t, y) = 3t + 2y + y^2$ και $N(t, y) = t + 4yt + 5y^2$.

Παρατηρούμε ότι,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(t, y) = 2y + 2 \neq 1 + 4y = \frac{\partial N}{\partial t}(t, y)$$

άρα η (1) δεν είναι ακριβής.

Γνωρίζουμε ότι η (1) δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t + y^2)$.

Έστω $u(t, y) = t + y^2$. Τότε από τον **Κανόνα της Αλυσίδας** έχουμε,

- $\frac{\partial \mu}{\partial y}(t, y) = \frac{d\mu}{du}(t, y) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = 2y \frac{d\mu}{du}(t, y)$
- $\frac{\partial \mu}{\partial t}(t, y) = \frac{d\mu}{du}(t, y) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) = \frac{d\mu}{du}(t, y)$

Αφού η (1) δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα τότε,

$$\frac{\partial(M\mu)}{\partial y} = \frac{\partial(N\mu)}{\partial t}$$

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial t} = \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mu$$

$$\frac{d\mu}{du}(2yM - N) = \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mu \Leftrightarrow \frac{d\mu}{du}(2yt - t + 2y^3 - y^2) = (2y - 1)\mu$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial u}(t + y^2) = \mu \Leftrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{du}{u} \Leftrightarrow \int \frac{1}{\mu} d\mu = \int \frac{1}{u} du + c_1 \Leftrightarrow \log |\mu| = \log (|u| \cdot e^{c_1})$$

$$\mu = \pm u e^{c_1} = \pm e^{c_1} (t + y^2) \Leftrightarrow \mu = c_3 (t + y^2)$$

Άρα, ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\mu(t, y) = t + y^2$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα τη σχέση (1).

$$(t + y^2)(3t + 2y + y^2) + (t + y^2)(t + 4yt + 5y^2) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$(y^4 + 2y^3 + 4y^2t + 2ty + 3t^2) + (t^2 + 4yt^2 + 6y^2t + 4y^3t + 5y^4) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (2)$$

όπου, $\bar{M}(t, y) = y^4 + 2y^3 + 4y^2t + 2ty + 3t^2$ και $\bar{N}(t, y) = t^2 + 4yt^2 + 6y^2t + 4y^3t + 5y^4$.

Έχουμε πως,

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial y}(t, y) = 4y^3 + 6y^2 + 8yt + 2t = \frac{\partial \bar{N}}{\partial t}$$

άρα, η (2) είναι ακριβής.

Άρα, γνωρίζουμε πως υπάρχει $F(t, y) = c$ ώστε,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = \bar{M}(t, y) \text{ και } \frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = \bar{N}(t, y)$$

- $\frac{\partial F}{\partial y}(t, y) = \bar{N}(t, y) \Leftrightarrow F(t, y) = \int t^2 + 4yt^2 + 6y^2t + 4y^3t + 5y^4dy + h(t)$
 $F(t, y) = t^2y + 2y^2t^2 + 2y^3t + y^4t + y^5 + h(t)$
- $\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = \bar{M}(t, y) \Leftrightarrow 2ty + 4y^2t + 2y^3 + y^4 + h'(t) = y^4 + 2y^3 + 4y^2t + 2yt + 3t^2$
 $h'(t) = 3t^2 \Leftrightarrow h(t) = t^3 + c_4$ όπου για $c_4 = 0$ έχουμε,

$$h(t) = t^3$$

Έτσι τελικά προκύπτει πως,

$$F(t, y) = y^5 + ty^4 + 2ty^3 + 2t^2y^2 + t^2y + t^3 = c$$

η οποία είναι λύση σε **πεπλεγμένη μορφή**. ■

Κεφάλαιο 2

Τα Βασικά Θεωρήματα

Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1. **Προσεγγίσεις Picard** Η ακολουθία προσεγγίσεων ορίζεται επαγωγικά ως εξής :

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

2. **Θεώρημα Picard – Lindelof**

1. Έστω $f(t, y), \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ συνεχείς συναρτήσεις στο ορθογώνιο

$$S = \{ (t, y) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b \}$$

Έστω ακόμη $M = \max_S |f(t, y)|, \delta = \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$. Τότε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση στο $[t_0, t_0 + \delta]$.

3. **Ορισμός:** Η συνάρτηση f ικανοποιεί **συνθήκη Lipschitz** στο S αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $(t, y_1), (t, y_2) \in S$ έχουμε την ανισότητα

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

4. Απλή ανάγνωση της απόδειξης του Θεωρήματος (b) δείχνει ότι η υπόθεση για την παράγωγο $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ είναι δυνατόν να αντικατασταθεί με τη λιγότερο περιοριστική (c) χωρίς καμία αλλαγή στο συμπέρασμα.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

2.1 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = y^3, \quad y(0) = 1.$$

Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα $[0, \delta]$ στο οποίο το Θεώρημα *Picard – Lindelof* εγγυάται υπάρξη λύσης και μοναδικότητα.

2.2 Για το ακόλουθο Π.Α.Τ. να προσεγγιστούν οι πρώτες τέσσερις προσεγγίσεις *Picard* :

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \quad y(1) = 2.$$

2.3 Έστω το Π.Α.Τ. :

$$y' = \sqrt{y} + 1 \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

- (i) Δείξτε ότι η $f(t, y)$ δεν είναι *Lipschitz* σε διάστημα που περιέχει το $y = 0$.
(ii) Δείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση.

Υπόδειξη 1: Υποθέστε ότι το Π.Α.Τ. έχει τουλάχιστον μια λύση.

Υπόδειξη 2: Θεωρήστε την συνάρτηση $z(t) = (\sqrt{y_1(t)} - \sqrt{y_2(t)})^2$.

2.4 Θεωρώντας το Π.Α.Τ.

$$x' = 1 + x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0$$

να δειχθεί ότι η συνθήκη *Lipshitz* δεν είναι αναγκαία για το μονοσήμαντο των λύσεων.

2.5 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{(y^2 - 4)(\sin^2 y^3 + \cos y - 2)}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Αν $y = \phi(t)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ., εξηγήστε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) γιατί ισχύει ότι $\phi(t) < 2$, για κάθε t .

2.6 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = 2ty^2, \quad y(0) = 1.$$

Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 2

2.1 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = y^3, \quad y(0) = 1.$$

Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα $[0, \delta]$ στο οποίο το Θεώρημα *Picard – Lindelof* εγγυάται ύπαρξη λύσης και μοναδικότητα.

Λύση.

Θεωρούμε το ορθογώνιο

$$S = \{ (t, y) : 0 \leq t \leq a, |y - 1| \leq b \}.$$

Έχουμε $f(t, y) = y^3$ άρα,

$$M = \max_{1-b \leq y \leq 1+b} |y^3| = (1+b)^3.$$

Έχουμε, $\delta^* = \min\{a, \frac{b}{(b+1)^3}\}$ άρα, για a αυθαίρετα μεγάλο $\delta^* = \frac{b}{(b+1)^3}$. Για να βρούμε το μέγιστο διάστημα που εγγυάται ύπαρξη λύσης και μοναδικότητα αναζητούμε $\delta = \max_{b>0} \frac{b}{(1+b)^3}$ και παρατηρούμε ότι $b_{max} = \frac{1}{2}$. Άρα, συμπεραίνουμε ότι $\delta = \frac{1/2}{(3/2)^3} = \frac{4}{27}$. Δηλαδή το μέγιστο διάστημα που εγγυάται μοναδικότητα και ύπαρξη λύσης είναι το $\left[0, \frac{4}{27}\right]$. ■

2.2 Για το ακόλουθο Π.Α.Τ. να προσεγγιστούν οι πρώτες τέσσερις προσεγγίσεις *Picard* :

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \quad y(1) = 2.$$

Λύση.

Θεωρούμε την ακολουθία *Picard*:

$$y_0(t) = 2, \quad y_n(t) = 2 + \int_1^t [s^2 + y_{n-1}^2(s)] ds.$$

• Για $n = 0$ έχουμε πως, $y_0(t) = 2$

• Για $n = 1$ έχουμε πως, $y_1(t) = 2 + \int_1^t [s^2 + y_0^2(s)] ds = 2 + \int_1^t [s^2 + 4] ds = \frac{t^3}{3} + 4t - \frac{7}{3}$

Ομοίως υπολογίζονται οι προσεγγίσεις για $n = 2, 3$. ■

2.3 Έστω το Π.Α.Τ. :

$$y' = \sqrt{y} + 1 \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

- (i) Δείξτε ότι η $f(t, y)$ δεν είναι *Lipschitz* σε διάστημα που περιέχει το $y = 0$.
 (ii) Δείξτε ότι το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση.

Υπόδειξη 1: Υποθέστε ότι το Π.Α.Τ. έχει τουλάχιστον μια λύση.

Υπόδειξη 2: Θεωρήστε την συνάρτηση $z(t) = (\sqrt{y_1(t)} - \sqrt{y_2(t)})^2$.

Λύση.

(i) Έστω ότι η f είναι *Lipschitz* δηλαδή υπάρχει $L > 0$ ώστε για κάθε y_1, y_2 να ισχύει

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1(t) - y_2(t)|.$$

Άρα, για $y_1(t) = y(t)$ και $y_2(t) = 0$ έχουμε,

$$|f(t, y) - f(t, 0)| \leq L|y(t) - 0| \Leftrightarrow \sqrt{y} \leq L|y(t)| \Leftrightarrow 1 \leq L\sqrt{y(t)}$$

το οποίο είναι άτοπο για $t = 0$.

(ii) Έστω y_1, y_2 οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης και

$$z(t) = (\sqrt{y_1(t)} - \sqrt{y_2(t)})^2 = y_1(t) + y_2(t) - 2\sqrt{y_1(t)y_2(t)} \geq 0.$$

Άρα, προκύπτει πως,

$$z'(t) = y_1' + y_2' - 2(\frac{1}{2}y_1'y_1^{-1/2}y_2^{1/2} + \frac{1}{2}y_2'y_2^{-1/2}y_1^{1/2}) = y_1' + y_2' - \frac{y_1'\sqrt{y_2}}{\sqrt{y_1}} - \frac{y_2'\sqrt{y_1}}{\sqrt{y_2}} < 0$$

Άρα, $z(t) \leq 0$ όπου προκύπτει πως,

$$z(t) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

■

2.4 Θεωρώντας το Π.Α.Τ.

$$x' = 1 + x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0$$

ναδειχθεί ότι η συνθήκη *Lipshitz* δεν είναι αναγκαία για το μονοσήμαντο των λύσεων.

Λύση.

Αρχικά θα επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση

$$x' = x^{\frac{2}{3}} + 1 \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}} + 1} = \int dt + c_1$$

Άρα, αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}} + 1}$ όπου προκύπτει ότι

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}} + 1} = 3x^{1/3} - 3 \arctan x^{1/3} + c_2.$$

Αν θεωρήσουμε $c = c_1 - c_2$ τότε,

$$3x^{1/3} - 3 \arctan x^{1/3} = t + c.$$

Δηλαδή για $t = 0$ έχουμε πως, το Π.Α.Τ. έχει, μοναδική λύση σε πεπλεγμένη μορφή,

$$3x^{1/3} - 3 \arctan x^{1/3} = t.$$

Όστόσο η $f(t, y) = x^{2/3} + 1$ η οποία ορίζεται σε περιοχή που περιέχει το $(0, 0)$ δεν είναι *Lipchitz* αφού,

$$|f(t, x) - f(t, 0)| = |x^{2/3}|$$

με $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|x^{2/3}|}{|x|} = \infty$ το οποίο έχει ως αποτέλεσμα

$$|f(t, x) - f(t, 0)| > L|x|.$$

■

2.5 Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{(y^2 - 4)(\sin^2 y^3 + \cos y - 2)}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Αν $y = \phi(t)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ., εξηγήστε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) γιατί ισχύει ότι $\phi(t) < 2$, για κάθε t .

Λύση.

Από υπόθεση ισχύει $\phi(0) = \frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι η αρχική εξίσωση για $y' = 0$ και $y = 2$ μηδενίζεται, δηλαδή $y(t) = 2$ είναι λύση της.

Άρα, για $\frac{1}{2} < 2 \Leftrightarrow \phi(0) < y(t)$. Από το μονοσήμαντο της λύσης προκύπτει ότι $\phi(t) < y(t) = 2$ για κάθε t . ■

Κεφάλαιο 3

Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + P(t)y' + Q(t)y = f(t)$ (*) με $P, Q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς είναι της μορφής :

$$y(t) = y_{ομ}(t) + y_{ειδ}(t)$$

με $y_{ομ}$ λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (*) και $y_{ειδ}$ μια ειδική λύση της (*).

2. Έστω η ομογενής διαφορική εξίσωση

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (*)$$

με $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς.

Αν $\phi_1(t), \phi_2(t)$ λύσεις της (*) τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι λύση της (*).

3. Η **ορίζουσα Wronski** δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων $\phi_1, \phi_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως :

$$W(t) = W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix}$$

4. **Θεώρημα** : Έστω ϕ_1, ϕ_2 λύσεις της $L(y) = 0$ στο I . Τότε ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I αν και μόνο αν $W(\phi_1, \phi_2)(t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$.

5. **Θεώρημα** (Τύπος του *Liouville*) : Έστω ϕ_1, ϕ_2 λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (*)$$

με $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και $W(\phi_1, \phi_2)(t)$ η ορίζουσα *Wronski*. Τότε,

(i) $W(t) = ce^{-\int p(t)dt}$,

(ii) $W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds}$.

6. Έστω η ομογενής διαφορική εξίσωση

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (*)$$

με $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε θεωρούμε την **χαρακτηριστική εξίσωση** της (*)

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

- (i) Αν $\Delta > 0$ με λ_1, λ_2 οι δύο άνισες λύσεις της χ.ε. τότε προκύπτει πως, $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (*) και μάλιστα

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

- (ii) Αν $\Delta = 0$ με $\lambda = -\frac{a}{2}$ η διπλή ρίζα της χ.ε., τότε προκύπτει πως, $e^{-at/2}, te^{-at/2}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (*) και μάλιστα

$$y(t) = c_1 e^{-at/2} + c_2 t e^{-at/2}.$$

- (iii) Αν $\Delta < 0$ και $\lambda_{1,2} = \gamma \pm \delta i$ οι μιγαδικές λύσεις της χ.ε. τότε προκύπτει πως, η γενική λύση της (*) είναι

$$y(t) = e^{\gamma t}(c_1 \cos \delta t + c_2 \sin \delta t)$$

7. **Εύρεση ειδικής λύσης της $L(y) = f(t)$.**

- **Μέθοδος Lagrange** (ή Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων): Από την λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. $L(y) = 0$ έχουμε :

$$y_{om}(t) = c_1\phi(t) + c_2\phi_2(t)$$

όπου ϕ_1, ϕ_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσης της $L(y) = 0$. Θεωρούμε $c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t)$ με

$$y_e = c_1(t)\phi(t) + c_2(t)\phi_2(t)$$

μια ειδική λύση της $L(y) = f(t)$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $L(y_e) = f(t)$ προκύπτει το εξής αλγεβρικό σύστημα :

$$\begin{aligned} \phi_1(t)c_1'(t) + \phi_2(t)c_2'(t) &= 0 \\ \phi_1'(t)c_1(t) + \phi_2'(t)c_2(t) &= f(t) \end{aligned}$$

με το οποίο υπολογίζονται τα $c_1(t)$ και $c_2(t)$.

- **Μέθοδος Απροσδιόριστων Συντελεστών:** Έστω $L(y) = f(t) \Leftrightarrow y'' + ay' + by = f(t)$ με $a, b \in \mathbb{R}, f(t) \in C(I)$.

Αν $f(t)$ είναι εκθετική συνάρτηση, σταθερή, πολυώνυμο του t , τριγωνομετρική συνάρτηση ή συνδυασμός αυτών τότε, γίνεται χρήση της παρακάτω μεθόδου.

Περιγραφή της μεθόδου :

Θεωρούμε $y'' + ay' + by = f(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$ και

$$f(t) = e^{\gamma t}[P_n(t) \cos(\delta t) + Q_n(t) \sin(\delta t)]$$

με $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $P_n(t), Q_n(t) \in \mathbb{R}_n(t)$.

Αν $\gamma + \delta i$ ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, πολλαπλότητας p τότε η μη-ομογενής διαφορική εξίσωση έχει ειδική λύση της μορφής

$$y_e = t^p e^{\gamma t}[p_n(t) \cos(\delta t) + q_n(t) \sin(\delta t)]$$

με $p_n(t), q_n(t)$ πολυώνυμα n βαθμού του t .

8. **Η αρχή της υπέρθεσης:** Έστω η διαφορική εξίσωση $L(y) = f_1(t) + f_2(t)(*)$, $f_1(t), f_2(t) \in C(I)$.

Θεωρούμε τις διαφορικές εξισώσεις $L(y) = f_1(t)$ (1) και $L(y) = f_2(t)$ (2) με $y_{1e}(t), y_{2e}(t)$ ειδικές λύσεις των (1), (2) αντίστοιχα. Τότε, $y_e(t) = y_{1e}(t) + y_{2e}(t)$ ειδική λύση της (*).

9. Σε διαφορικές εξισώσεις τάξης n με $n \geq 3$ ισχύουν οι ίδιες τεχνικές και θεωρήματα με αυτά που προαναφέρθηκαν παραπάνω.
10. **Εξίσωση Euler** είναι η διαφορική εξίσωση της μορφής :

$$t^2 y'' + aty + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Προκύπτει πως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω δ.ε. είναι το $r(r-1) + ar + b = 0$.

- (i) Αν $\Delta > 0$ τότε για r_1, r_2 λύσεις της εξίσωσης με $r_1 \neq r_2$ έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}.$$

- (ii) Αν $\Delta = 0$ για $r = \frac{1-a}{2}$ η διπλή λύση της εξίσωσης έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t) = c_1 t^r + c_2 \log t t^r.$$

- (iii) Αν $\Delta < 0$ για $r_{1,2} = \sigma \pm \omega i$ λύσεις της εξίσωσης έχουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$y(t) = t^\sigma [c_1 \cos(\omega \log t) + c_2 \sin(\omega \log t)].$$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

3.1 Αν $a, b, c > 0$, ναδειχθεί ότι για κάθε λύση $y = \phi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0.$$

3.2 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2t}}{e^t + 1}.$$

3.3 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = e^{3t}.$$

3.4 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = 2e^t.$$

3.5 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}.$$

3.6 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = 3e^t.$$

3.7 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = \sin t.$$

3.8 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = 3 \cos 2t.$$

3.9 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' + y = t^2.$$

3.10 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = te^t.$$

3.11 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + ky = \sin bt$$

με $k, b > 0$.

3.12 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = e^t - te^{2t}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης.

3.13 Να κατασκευαστεί η ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης αν είναι γνωστές $\phi_1(t), \phi_2(t)$, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της.

3.14 Ναλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$t^2 y'' - 5ty' + 25y = 0.$$

3.15 Αν ϕ_1, ϕ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης :

$$(1 + y^2)y'' - 2ty + 2y = 0$$

με $\phi_1(1) = \phi_1'(1) = 1, \phi_2(1) = 0$ και $\phi_2'(1) = 2$ να υπολογιστεί η $W(\phi_1, \phi_2)(t)$.

Υπόδειξη : Χρησιμοποιήστε τον τύπο του *Liouville*.

Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 3

3.1 Αν $a, b, c > 0$, να δειχθεί ότι για κάθε λύση $y = \phi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (*),$$

ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (*)

$$ar^2 + br + c = 0.$$

(i) Αν $\Delta > 0$ έχουμε λ_1, λ_2 τις δύο άνισες λύσεις της χ.ε. με $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a} < 0$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{c}{a} > 0$ που συμπεραίνουμε πως, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Όμως, η $\phi(t)$ είναι της μορφής :

$$\phi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

που συμπεραίνουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$.

(ii) Αν $\Delta = 0$ τότε, έχουμε $\lambda = -\frac{b}{2a}$ της διπλής ρίζας της χ.ε. και μάλιστα $\lambda < 0$.

Τότε προκύπτει άμεσα πως, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{\lambda t} = 0$ ² και αφού η $\phi(t)$ είναι της μορφής :

$$\phi(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

τότε συμπεραίνουμε πως, $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$.

(iii) Αν $\Delta < 0$ τότε $\lambda_{1,2} = \gamma \pm \delta i$ οι μιγαδικές ρίζες της χ.ε. με $\gamma = -\frac{b}{2a} < 0$ ³ Τότε, η $\phi(t)$ θα είναι της μορφής :

$$\phi(t) = e^{\gamma t} (c_1 \cos \delta t + c_2 \sin \delta t).$$

Όμως, $|\phi(t)| \leq e^{\gamma t} (|c_1| + |c_2|) \rightarrow 0$ για $t \rightarrow \infty$. Δηλαδή, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = 0$. ■

3.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση⁴

$$y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2t}}{e^t + 1}.$$

Λύση.

Από την σχέση (1) προκύπτει πως η χαρακτηριστική εξίσωση της δ.ε. είναι

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = 2$.

²Ο υπολογισμός του ορίου γίνεται άμεσα με χρήση του κανόνα *De l' Hospital*.

³Η παραπάνω σχέση προέκυψε με την χρήση τύπων *Vietta*.

⁴Για την λύση της **Άσκησης 3.4** θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο *Lagrange*.

Δηλαδή, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς της (1) είναι

$$y_{om} = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

Έχουμε πως,

$$y_\epsilon(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{2t}$$

όπου y_ϵ ειδική λύση της (1) και για την εύρεση της πρέπει να λύσουμε το αλγεβρικό σύστημα: ⁵

$$\begin{aligned} e^t c_1'(t) + e^{2t} c_2'(t) &= 0 \\ e^t c_1'(t) + 2e^{2t} c_2'(t) &= f(t) \end{aligned}$$

Από τον κανόνα του *Cramer* αφού, $W(e^t, e^{2t})(t) = e^{3t} \neq 0$ τότε,

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2t} \\ -\frac{e^{2t}}{e^t+1} & 2e^{2t} \end{vmatrix}}{W(t)} \text{ και } c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & -\frac{e^{2t}}{e^t+1} \end{vmatrix}}{W(t)}$$

Δηλαδή, $c_1(t) = \int \frac{e^t}{e^t+1} dt + d_1 = \log(e^t + 1) + d_1$ και $c_2(t) = -\int \frac{1}{e^t+1} dt + d_2 = \log(e^{-t} + 1) + d_2$

Άρα, προκύπτει πως μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_\epsilon = \log(e^t + 1)e^t + \log(e^{-t} + 1)e^{2t}$$

Τελικά αφού γνωρίζουμε πως $y(t) = y_{om}(t) + y_\epsilon(t)$ η γενική λύση της (1) έχει τη μορφή:

$$y(t) = [c_1 + \log(e^t + 1)]e^t + [c_2 + \log(e^{-t} + 1)]e^{2t}$$

■

3.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = e^{3t}.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = -2$. Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται με

$$y_{om}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$$

Το 3 δεν είναι ρίζα της (2) άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = A e^{3t}$$

και αφού η $y_\epsilon(t)$ ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y_\epsilon''(t) + y_\epsilon'(t) - 2y_\epsilon(t) = e^{3t} \Leftrightarrow 9Ae^{3t} + 3Ae^{3t} - 2Ae^{3t} = e^{3t} \Leftrightarrow A = \frac{1}{10}.$$

⁵Το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα προέκυψε αφού η y_ϵ ικανοποιεί την $L[y] = -\frac{e^{2t}}{e^t+1}$.

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_e = \frac{1}{10}e^{3t}.$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_e(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \frac{1}{10}e^t$$

■

3.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' - 2y = 2e^t.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + y - 2 = 0 \quad (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = -2$. Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται με

$$y_{ομ}(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t}$$

Το 1 είναι ρίζα της (2) πολλαπλότητας 1 άρα, μία ειδική λύση της (1) είναι της μορφής:

$$y_e(t) = Ate^t$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$y_e''(t) + y_e'(t) - 2y_e(t) = 2e^t \Leftrightarrow (2Ae^t + Ae^t) + (Ae^t + Ate^t) - 2Ate^t = 2e^t \Leftrightarrow A = \frac{2}{3}$ Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_e(t) = \frac{2}{3}te^t.$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_e(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \frac{2}{3}te^t$$

■

3.5 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \quad (2)$$

η οποία έχει λύση $r = 2$ πολλαπλότητας 2. Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται

$$y_{ομ}(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$$

Το -2 είναι ρίζα της (2) πολλαπλότητας 2 άρα, μια λύση της (1) είναι της μορφής:

$$y_e(t) = At^2e^{-2t}$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y_e''(t) + 4y_e'(t) + 4y_e(t) = e^{-2t} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-2t}$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-2t}$$

■

3.6 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = 3e^t.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = i$ και $r_2 = -i$. Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :

$$y_{ομ}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Το 1 δεν είναι λύση της (2) άρα μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_\epsilon(t) = Ae^t$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y_\epsilon''(t) + y_\epsilon(t) = 3e^t \Leftrightarrow A = \frac{3}{2}$$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{3}{2}e^t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{3}{2}e^t$$

■

3.7 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = \sin t.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + 4 = 0 \quad (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 2i$ και $r_2 = -2i$. Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :

$$y_{ομ}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Το i δεν είναι λύση της (2) άρα μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_ε(t) = A \sin t + B \cos t$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y_ε''(t) + 4y_ε(t) = 3e^t \Leftrightarrow A = \frac{1}{3} \text{ και } B = 0$$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_ε(t) = \frac{1}{3} \sin t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_ε(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{3} \sin t$$

■

3.8 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = 3 \cos 2t.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + 4 = 0 \quad (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 2i$ και $r_2 = -2i$. Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :

$$y_{ομ}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Το $2i$ είναι λύση της (2), πολλαπλότητας 1 άρα μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_ε(t) = t(A \sin 2t + B \cos 2t)$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y_ε''(t) + 4y_ε(t) = 3 \cos 2t \Leftrightarrow A = 0 \text{ και } B = \frac{3}{4}$$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_ε(t) = \frac{3}{4}t \sin 2t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_ε(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \cos 2t + (c_2 + \frac{3}{4}t) \sin 2t$$

■

3.9 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + y' + y = t^2.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 + r + 1 = 0$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ και $r_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$. Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :

$$y_{ομ}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

Μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_{\epsilon}(t) = At^2 + Bt + C$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y_{\epsilon}'' + y_{\epsilon}' + y_{\epsilon} = t^2 \Leftrightarrow A = 1, B = -2 \text{ και } C = 0$$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_{\epsilon}(t) = t^2 - 2t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_{\epsilon}(t)$ ισχύει :

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] + t^2 - 2t$$

■

3.10 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - y = te^t.$$

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (1) :

$$r^2 - 1 = 0 \quad (2)$$

η οποία έχει λύσεις $r_1 = 1$ και $r_2 = -1$. Άρα, γνωρίζουμε πως η αντίστοιχη ομογενής της (1) ισούται :

$$y_{ομ}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Αφού η $f(t) = te^t$ παίρνει την μορφή

$$f(t) = e^t [t \cos 0 + Q(t) \sin 0]$$

και το 1 είναι λύση της (2) πολλαπλότητας 1, μια ειδική λύση της (1) είναι της μορφής :

$$y_{\epsilon}(t) = te^t (At + B)$$

και αφού ικανοποιεί την (1) έχουμε πως,

$$y_\epsilon'' - y_\epsilon = ye^t \Leftrightarrow A = \frac{1}{4} \text{ και } B = -\frac{1}{4}$$

Άρα, μια ειδική λύση της (1) είναι

$$y_\epsilon(t) = \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{4}te^t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{4}t^2e^t - \frac{1}{4}te^t$$

■

3.11 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + ky = \sin bt \quad (*)$$

με $k, b > 0$.

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (*)

$$r^2 + k = 0$$

η οποία έχει ρίζες $r_{1,2} = \pm\sqrt{k}i$. Τότε, η αντίστοιχη ομογενής δ.ε. της (*) είναι η

$$y_{ομ}(t) = c_1 \sin \sqrt{k}t + c_2 \cos \sqrt{k}t$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(i) Αν $b \neq \sqrt{k}$ τότε,

$$y_\epsilon = A \sin bt + B \cos bt$$

όπου y_ϵ μια ειδική λύσης (*). Διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει πως,

$$y_\epsilon'' = -Ab^2 \sin bt - Bb^2 \cos bt.$$

Αφού y_ϵ ειδική λύση της (*) ικανοποιεί την σχέση

$$y_\epsilon'' + ky_\epsilon = \sin bt \Leftrightarrow A = \frac{1}{k - b^2} \text{ και } B = 0$$

Άρα, μια ειδική λύση της (*) είναι

$$y_\epsilon = \frac{1}{k - b^2} \sin bt$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \sin \sqrt{k}t + c_2 \cos \sqrt{k}t + \frac{1}{k - b^2} \sin bt.$$

(ii) Αν $b = \sqrt{k}$ τότε είναι μια ειδική λύση θα είναι της μορφής :

$$y_\epsilon = t(A \sin bt + B \cos bt)$$

μια ειδική λύσης (*). Διαφορίζοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει πως,

$$y''_{\epsilon} = -2Ab \sin bt + 2Bb \cos bt - b^2(A \sin bt + B \cos bt).$$

Αφού y_{ϵ} ειδική λύση της (*) ικανοποιεί την σχέση

$$y''_{\epsilon} + ky_{\epsilon} = \sin bt \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2b} \text{ και } B = 0.$$

Άρα, μια ειδική λύση της (*) είναι

$$y_{\epsilon} = -\frac{t}{2b} \sin bt.$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{ομ}(t) + y_{\epsilon}(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1 \sin \sqrt{kt} + c_2 \cos \sqrt{kt} - \frac{t}{2b} \sin bt.$$



3.12 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = e^t - te^{2t} (*).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αρχή της υπέρθεσης.

Λύση.

Θεωρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση της (*) :

$$r^4 - 5r^2 + 4 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τα 1, 2, -1, -2. Άρα, η αντίστοιχη ομογενής δ.ε. της (*) είναι

$$y_{ομ} = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}.$$

Αρχικά αναζητούμε μια ειδική λύση για την διαφορική εξίσωση :

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = e^t \quad (i)$$

Αφού το 1 είναι ρίζα του χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε μια ειδική λύση είναι της μορφής :

$$y_{1\epsilon} = Ate^t.$$

και αφού ικανοποιεί την (i) έχουμε πως,

$$y_{1\epsilon}^{(4)} - 5y_{1\epsilon}^{(2)} + 4y_{1\epsilon} = e^t \Leftrightarrow A = -\frac{1}{6}.$$

Άρα, μια ειδική λύση της (i) είναι

$$y_{1\epsilon} = -\frac{1}{6}te^t.$$

Έπειτα αναζητούμε ειδική λύση για την διαφορική εξίσωση :

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = -te^{2t} \quad (ii).$$

Αφού το 2 είναι ρίζα του χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε μια ειδική λύση είναι της μορφής :

$$y_{2\epsilon} = te^{2t}(At + B)$$

και αφού ικανοποιεί την (ii) έχουμε πως,

$$y_{2\epsilon}^{(4)} - 5y_{2\epsilon}^{(2)} + 4y_{2\epsilon} = te^{2t} \Leftrightarrow A = -\frac{1}{24} \text{ και } B = \frac{19}{144}.$$

Άρα, μια ειδική λύση της (i) είναι

$$y_{2\epsilon} = -\frac{1}{24}t^2e^t + \frac{19}{144}te^t.$$

Τότε, έπεται πως, μια ειδική λύση της (*) είναι

$$y_\epsilon = y_{1\epsilon} + y_{2\epsilon} = -\frac{1}{6}te^t - \frac{1}{24}t^2e^t + \frac{19}{144}te^t = -\frac{1}{24}t^2e^t - \frac{5}{144}te^t$$

Αφού γνωρίζουμε πως, $y(t) = y_{\text{ομ}}(t) + y_\epsilon(t)$ ισχύει :

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t} - \frac{1}{24}t^2e^t - \frac{5}{144}te^t.$$

■

3.13 Να κατασκευαστεί η ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης αν είναι γνωστές $\phi_1(t), \phi_2(t)$, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της.

Λύση.

Έστω $\phi_1(t), \phi_2(t) \in C(I)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (1)$$

$a(t).b(t) \in C(I)$. Γνωρίζουμε πως η γενική λύση της (1) είναι

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

καθώς και $W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t) \neq 0$.

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$(\phi_1(t), \phi_1'(t), \phi_1''(t)), (\phi_2(t), \phi_2'(t), \phi_2''(t)), (y, y', y'')$$

τα οποία είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Δηλαδή ισχύει ότι,

$$\begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & y \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) & y' \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) & y'' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix} y = 0$$

$$W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t)y'' - \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix} y = 0, \quad W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t) \neq 0$$

Άρα, η (1) έχει την μορφή :

$$y'' - \frac{\begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix}}{W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t)} y' + \frac{\begin{vmatrix} \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \\ \phi_1''(t) & \phi_2''(t) \end{vmatrix}}{W(\phi_1(t), \phi_2(t))(t)} y = 0$$

■

3.14 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$t^2 y'' - 5ty' + 25y = 0. (*)$$

Λύση.

Παρατηρήστε ότι η (*) είναι δ.ε. της μορφής *Euler*. Θεωρούμε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο :

$$r^2 - 6r + 25.$$

η οποία έχει ρίζες $r_{1,2} = 3 \pm 4i$, όπου προκύπτει ότι η γενική λύση της (*) είναι

$$y(t) = t^3 [c_1 \cos(4 \log t) + c_2 \sin(4 \log t)].$$

■

3.15 Αν ϕ_1, ϕ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης :

$$(1 + y^2)y'' - 2ty + 2y = 0$$

με $\phi_1(1) = \phi_1'(1) = 1, \phi_2(1) = 0$ και $\phi_2'(1) = 2$ να υπολογιστεί η $W(\phi_1, \phi_2)(t)$.

Υπόδειξη : Χρησιμοποιήστε τον τύπο του *Liouville*.

Λύση.

Έχουμε, πως $W(\phi_1, \phi_2)(1) = \begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) \\ \phi_1'(1) & \phi_2'(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ άρα, ϕ_1, ϕ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του *Liouville* έχουμε πως,

$$W(t) = ce^{-\int \frac{-2t}{1+t^2} dt} = c(t^2 + 1)$$

όπου για $t = 1$ προκύπτει πως, $c = \frac{W(\phi_1, \phi_2)(1)}{2} = 1$. Άρα, τελικά έχουμε πως,

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = 1 + t^2.$$

■

Κεφάλαιο 4

Μέθοδος δυναμοσειρών

Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1. Μια σειρά της μορφής :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$$

όπου $a_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) και $t_0 \in \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά με κέντρο t_0 .

2. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$ όπου r η ακτίνα σύγκλισης :

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3. Η $f(t)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t-t_0)^{n-1} \quad \text{και} \quad f''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t-t_0)^{n-2}.$$

4. Θεωρούμε την εξίσωση :

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Ένα σημείο $t_0 \in \mathbb{R}$ λέγεται **ομαλό** αν οι p, q είναι αναλυτικές στο t_0 . Αν μια τουλάχιστον από τις p, q δεν είναι αναλυτικές στο t_0 τότε το t_0 είναι **ιδιάζων** σημείο της εξίσωσης.

5. **Θέωρημα** : Έστω, p, q συναρτήσεις αναλυτικές στο $t_0 \in \mathbb{R}$, με αντίστοιχες σειρές :

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t-t_0)^n \quad \text{και} \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t-t_0)^n$$

συγκλίνουσες για $|t-t_0| < R$. Τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(t_0) = a_0$ και $y'(t_0) = a_1$ είναι αναλυτική στο t_0 με σειρά *Taylor* που συγκλίνει τουλάχιστον για $|t-t_0| < R$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

4.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' - y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' + y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y' - y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' + ty' + y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.5 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$(t^2 - 4)y'' + 3ty' + y = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

4.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y'' + t^2y' + 2ty = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών και να προσδιοριστούν οι 3 πρώτοι όροι της λύσης.

Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 4

4.1 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' - y = 0 (*)$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση.

Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Τότε, αφού ισχύει πως, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ προκύπτει πως,

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n.$$

Από την (*) έχουμε πως,

$$y'' - y = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n] t^n \Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

όπου προκύπτει πως, $a_{2n} = \frac{a_0}{2n!}$ και $a_{2n+1} = \frac{a_1}{(2n+1)!}$. Τελικά έχουμε πως, η λύση της (*) είναι :

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

■

4.2 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' + y = 0 (*)$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση.

Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Τότε, αφού ισχύει πως, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ προκύπτει πως,

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n.$$

Από την (*) έχουμε πως,

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] t^n \Leftrightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

όπου προκύπτει πως, $a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2n!}$ και $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}$. Τελικά έχουμε πως, η λύση της (*) είναι :

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} = a_0 \cos t + a_1 \sin t.$$

■

4.3 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y' - y = 0 (*)$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση.

Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Τότε, αφού ισχύει πως,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

από την (*) προκύπτει πως,

$$y' - y = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - a_n] t^n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

Άρα, έχουμε πως, $a_n = \frac{a_0}{n!}$ δηλαδή, η λύση της (*) είναι

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = a_0 e^t.$$

■

4.4 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$y'' + ty' + y = 0 (*)$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση. Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Τότε, αφού ισχύει πως, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ προκύπτει πως,

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n.$$

Από την (*) έχουμε πως,

$$y'' + ty' + y = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n] t^n = 0 \Leftrightarrow a_{n+1} = -\frac{a_n}{n+2}.$$

Από την παραπάνω αναδρομική ακολουθία προκύπτει πως, $a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n \cdot n!}$ και

$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{2^n \cdot n! (-1)^n a_1}{(2n+1)!}$. Άρα, η λύση της (*) είναι :

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n \cdot n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)!} t^{2n+1} = a_0 e^{-t^2/2} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

■

4.5 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση :

$$(t^2 - 4)y'' + 3ty' + y = 0 \quad (*)$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών.

Λύση.

Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Τότε, αφού ισχύει πως, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ προκύπτει πως,

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n.$$

Από την (*) έχουμε πως,

$$(t^2 - 4)y'' + 3ty' + y = 0 \Leftrightarrow t^2 y'' - 4y'' + 3ty' + y = t^2 y''$$

$$t^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + 3t \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)^2 a_n - (n+2)(n+1) a_{n+2}] t^n = 0 \Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{n+1}{4(n+2)} a_n$$

που προκύπτει πως, $a_{2n} = \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]}{4^n \cdot [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)]} a_0 = \frac{(2n)!}{4^{2n} \cdot (n!)^2} a_0$ και $a_{2n+1} = \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} a_1$ άρα η λύση της (*) είναι

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^{2n} \cdot (n!)^2} t^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} t^{2n+1}.$$

■

4.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y'' + t^2 y' + 2ty = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

με την μέθοδο των δυναμοσειρών και να προσδιοριστούν οι 3 πρώτοι όροι της λύσης.

Λύση.

Θεωρούμε την λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Τότε, αφού ισχύει πως, $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ προκύπτει πως,

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+3) a_{n+3} t^{n+1} + 2a_2.$$

Από την (*) έχουμε πως,

$$y'' + t^2 y' + 2ty = 0 \Leftrightarrow 2a_2 + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+3)(n+2) a_{n+3} + (n+2) a_n] t^{n+1} = 0$$

που συμπεραίνουμε ότι $a_2 = 0$ και $a_{n+3} = -\frac{a_n}{n+3}$. Από Π.Α.Τ. έχουμε ότι $y(0) = a_0 = 1$ και $y'(0) = a_1 = 0$ άρα, οι πρώτοι 3 όροι της (*) είναι

$$y_1(t) = a_0 = 1 \quad y_2(t) = a_1 t = 0 \quad y_3(t) = a_2 t^2 = 0$$

■

Κεφάλαιο 5

Γραμμικά Συστήματα

Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1. Σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης της γενικής μορφής :

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

όπου y_i είναι οι άγνωστες συναρτήσεις του t και οι f_i ορίζονται σε ένα τόπο $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Θέτοντας,

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{bmatrix}$$

το σύστημα παίρνει τη μορφή: $y'(t) = f(t, y)$, που αντιστοιχεί σε μια διανυσματική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

2. **Θεώρημα** : Έστω ο πίνακας $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $1 \leq i, j \leq n$ και η διανυσματική συνάρτηση $b(t) = [b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)]^T$ είναι συνεχείς στο ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$ και $t_0 \in I$. Τότε, το Π.Α.Τ. :

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t), \quad y(t_0) = y_0$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα I .

3. Ομογενή γραμμική εξίσωση λέμε την διαφορική εξίσωση της μορφής :

$$y'(t) = A(t)y(t) (*)$$

όπου $t \in I$ με $I \subset \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με στοιχεία $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ συναρτήσεις του t συνεχείς για $t \in I$.

4. Η λύση $\phi(t)$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\phi(t_0) = y_0$.
5. Η διάσταση του διανυσματικού χώρου L_0 των λύσεων της (*) στο \mathbb{R} είναι n .
6. Μια βάση $B = \{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)\}$ του χώρου λύσεων L_0 της (*) λέμε ότι αποτελεί ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων.
7. Ο $n \times n$ πίνακας $\Phi(t) = (\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \dots \ \phi_n(t))$ που δημιουργείται με στήλες τα στοιχεία $\phi_i(t)$ της βάσης B λέγεται θεμελιώδης πίνακας λύσεων της εξίσωσης.
8. Ο $\Phi(t)$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της εξίσωσης (*) αν και μόνο αν $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.
9. Έστω $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ λύσεις της δ.ε. (*) και $\Phi(t)$ ο αντίστοιχος θεμελιώδης πίνακας της εξίσωσης. Τότε, η ορίζουσα $W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)(t) = |\Phi(t)|$ ονομάζεται ορίζουσα *Wronski* των $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$.
10. **Θεώρημα** : Οι λύσεις $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ της (*) αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν $W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \neq 0$.

11. Έστω $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \subset L_0$. Τότε, ισχύει η ακόλουθη προτάση : $W(t) = 0$ για κάθε $t \in I$ αν και μόνο αν $W(t_0) = 0$ για κάποιο $t_0 \in I$.
12. Αν $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ είναι ένα σύστημα λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (*) από το 6. προκύπτει ότι η τυχούσα λύση $y(t)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$. Δηλαδή υπάρχουν $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ώστε :

$$y(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \dots & \phi_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \Phi(t) \cdot C.$$

13. **Θεώρημα** : Αν $\Phi(t)$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της διαφορικής εξίσωσης και C ένας $n \times n$ σταθερός αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ο $\Phi(t) \cdot C$ είναι επίσης θεμελιώδης πίνακας. Ακόμη αν $\Phi_1(t)$ είναι ένας άλλος θεμελιώδης πίνακας για την ίδια διαφορική εξίσωση, τότε υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $|C| \neq 0$ ώστε $\Phi_1(t) = \Phi(t) \cdot C$.
14. Ο πίνακας $G(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ λέγεται κύριος πίνακας (ή πίνακας μεταφοράς) για την διαφορική εξίσωση (*).
15. **Πρόταση** : (i) Ο $G(t, t_0)$ είναι ανεξάρτητος από τον θεμελιώδη πίνακα $\Phi(t)$ που παράγει.
(ii) Για κάθε $t, t_0 \in I$ έχουμε : $\frac{\partial G(t, t_0)}{\partial t} = A(t)G(t, t_0)$.
(iii) Για κάθε $t \in I$ έχουμε $G(t, t) = I_n$.
(iv) Για κάθε $t, t_0 \in I$ έχουμε $G^{-1}(t, t_0) = G(t_0, t)$.
(v) Για κάθε $t_1, t_2, t_3 \in I$ έχουμε $G(t_0, t_2) = G(t_2, t_1)G(t_1, t_0)$.
16. Αν $G(t, t_0)$ είναι ο κύριος πίνακας της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (*), τότε η λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(t_0) = y_0$ είναι

$$y(t) = G(t, t_0)y_0.$$

17. Έστω $\Phi(t)$ ένας θεμελιώδης πίνακας την $y' = Ay$, όπου A σταθερός πίνακας. Ορίζουμε τον πίνακα

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0).$$

18. Ο κύριος πίνακας e^{At} έχει τις εξής ιδιότητες :

$$\begin{aligned} (i) e^{A(t+s)} &= e^{At} \cdot e^{As} & (iii) \frac{d(e^{At})}{dt} &= A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A \\ (ii) (e^{At})^{-1} &= e^{A(-t)} & (iv) e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n \end{aligned}$$

19. Μια συλλογή $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, $t \in I$ λύσεων της

$$x^n(t) + a_1x^{n-1}(t) + \dots + a_nx(t) = 0 \quad (2)$$

λέγεται ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων αν είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I .

20. **Θεώρημα** : Για την διαφορική εξίσωση (2) πάντοτε υπάρχει ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων.
21. **Θεώρημα** : Αν $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (2), τότε οι αντίστοιχες λύσεις της ισοδύναμης εξίσωσης $y' = Ay$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες στο I .
22. **Θεώρημα** : Έστω $x = x(t)$ μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) και $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων αυτής. Τότε, υπάρχουν $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(t), \quad \forall t \in I.$$

23. Αν $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (2) ορίζουμε την ορίζουσα *Wronski* αυτών ως εξής :

$$W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)(t) := \begin{bmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{n-1} & \dots & \phi_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

24. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n \times n}$) ένας τετραγωνικός πίνακας. Το ζεύγος (λ, u) , όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ και $u \in \mathbb{C}^n$ με $u \neq 0$ λέγεται ζεύγος ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος του πίνακα A αν και μόνο αν $Au = \lambda u$.
25. Το πολυώνυμο βαθμού n $\phi(\lambda) := |A - \lambda I_n|$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , η εξίσωση $\phi(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0$ ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση του A , ενώ το σύνολο $\sigma(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \phi(\lambda_i) = 0\}$ δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών του A , λέγεται φάσμα του A .
26. Αν $\lambda_i \in \sigma(A)$ τότε ο διανυσματικός χώρος N_{λ_i} που ορίζεται ως $N_{\lambda_i} = \{u_j \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda_i)u_j = 0\}$ ορίζεται ως ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i .
27. Ο μεγιστό αριθμός d_i των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i , δηλαδή $d_i := \dim N_{\lambda_i}$ ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i .
28. Η πολλαπλότητα τ_i της ιδιοτιμής λ_i ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\phi(\lambda)$ ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i .
29. Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n \times n}$) λέγεται απλή δομής αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i \in \sigma(A)$ ισχύει ότι $d_i = \tau_i$. Αν υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda_i \in \sigma(A)$ ώστε $\sigma_i < \tau_i$ τότε ο πίνακας A λέγεται μη-απλής δομής.
30. Το διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$ (ή \mathbb{C}^n) ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης p ($p \geq 1$) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$(A - \lambda I_n)^p \text{ και } (A - \lambda I_n)^{p-1} \neq 0.$$

Μια αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους k που παράγεται από το απλο ιδιοδιάνυσμα u_1 είναι ένα σύνολο $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ από k γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ώστε :

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_n)u_k &= u_{k-1} \\ (A - \lambda I_n)u_{k-1} &= u_{k-2} \\ &\vdots \\ (A - \lambda I_n)u_2 &= u_1 \end{aligned}$$

Επειδή, το u_1 είναι απλό ιδιοδιάνυσμα και ισχύει $(A - \lambda I_n)u_1 = 0$ τότε $(A - \lambda I_n)^j u_j = 0$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, k$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

5.1 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

5.2 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} y.$$

5.3 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} y.$$

5.4 Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \log t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}, \quad t > 0$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} y$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $y(1) = [-2 \quad 1]^T$.

5.5 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y.$$

5.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.7 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.8 Θεωρούμε το σύστημα :

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x.$$

(i) Να βρεθεί η γενική του λύση.

(ii) Να προσδιοριστεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις να τείνουν στο 0 καθώς το $t \rightarrow \infty$.

5.9 Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$y' = Ay + b(t), \quad y(0) = y_0,$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

και ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν ο πίνακας e^{At} και η λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.

Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 5

5.1 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

Αρχικά αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$ μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\phi(\lambda) = |A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$

όπου συμπεραίνεται πως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = -3$.

Ο πίνακας A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές άρα είναι απλής δομής και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 5 προκύπτουν από τη λύση του συστήματος :

$$(A - 5I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

άρα, έχουμε πως

$$N_5 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : (A - 5I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

δηλαδή $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 5. Με ανάλογο τρόπο το $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -3 . Τότε, γνωρίζουμε πως, $A = P \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} P^{-1}$ όπου P ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ που προκύπτει από τα u_1 και u_2 . Ακόμη για τον πίνακα e^{At} ισχύει ότι ισούται με

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Τελικά η γενική λύση του Π.Α.Τ. δίνεται από τον τύπο $y(t) = e^{At}y(0) = P \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} P^{-1}y_0$ όπου θέτοντας $C = P^{-1}y(0)$ έχουμε πως,

$$y(t) = P \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} C.$$

με την αντικατάσταση $t = 0$ προκύπτει πως, $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ δηλαδή η λύση του συστήματος να ισούται με

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} + 2e^{-3t} \\ 2e^{5t} + e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

■

5.2 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} y.$$

Λύση.

Αρχικά αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\phi(\lambda) = |A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = 0$$

όπου συμπεραίνεται πως, οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 1$.

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -2$ αρκεί να λύσουμε το σύστημα :

$$(A + 2I_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

όπου μέσω της 5.1 συμπεραίνεται πως, $u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα

ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -2 . Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι το $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 . Τότε, συμπεραίνουμε πως, ο A είναι απλής μορφής και μάλιστα $A = P \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$ όπου $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ που προκύπτει από τα ιδιοδιανύσματα u_1, u_2 και u_3 . Ακόμη για τον πίνακα e^{At} ισχύει ότι ισούται με

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Τελικά η γενική λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση $y(t) = P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} P^{-1} y_0$ όπου θέτοντας $C = P^{-1} y_0$ προκύπτει πως, η γενική λύση του συστήματος ισούται με

$$y(t) = \begin{bmatrix} -(c_1 + c_2)e^{-2t} + c_3e^t \\ c_1e^{-2t} + c_3e^t \\ c_2e^{-2t} + c_3e^t \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■

5.3 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} y.$$

Λύση.

Αρχικά αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\phi(\lambda) = |A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

συμπεραίνουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι οι $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Για την εύρεση ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $2i$ αρκεί να λύσουμε το σύστημα :

$$(A - 2iI_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

όπου προκύπτει πως ένα τέτοιο είναι το $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Άρα, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσης του συστήματος είναι

$$\phi_1(t) = \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \phi_2(t) = \sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή η γενική λύση του συστήματος δίνεται από τη σχέση :

$$\phi(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

■

5.4 Ναδειχθεί ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \log t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}, \quad t > 0$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} y$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $y(1) = [-2 \quad 1]^T$.

Λύση.

Για να δείξουμε ότι ο Φ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος αρκεί να δείξουμε ότι :

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} \Phi$$

όπου η επαλήθευση του αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Για την επίλυση του συστήματος ομοίως με την 5.1 δείξτε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = -\frac{1}{t}$ με $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t} \end{bmatrix}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους. Τότε, έχουμε πως, $e^{A(t-1)} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} P^{-1}$ όπου P ο πίνακας $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}$. Θέτοντας $C = P^{-1}y(1)$ έχουμε πως, η γενική λύση του συστήματος ισούται με

$$y(t) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} C.$$

Λόγω της αρχικής παραμέτρου για $t = 1$ έχουμε τελικά,

$$y(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}.$$

■

5.5 Να λυθεί το γραμμικό σύστημα :

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y.$$

Λύση.

Αρχικά αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης :

$$\phi(\lambda) = |A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^3 = 0$$

όπου προκύπτει ότι $\lambda = -1$ είναι η μόνη διακεκριμένη ιδιοτιμή του A . Λύνουμε το παρακάτω σύστημα :

$$(A + I_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

όπου προκύπτει ότι μια βάση του διανυσματικού χώρου N_{-1} είναι το σύνολο $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ με $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής -1 δηλαδή $\dim N_{-1} = 1 \neq 3$ που σημαίνει πως ο A είναι πίνακας μη-απλής δομής. Τότε σκοπός μας είναι να ανάξουμε τον πίνακα A σε πίνακα μορφής *Jordan* με τη χρήση γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων. Γνωρίζουμε πως, για τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα u_2, u_3 ισχύει :

$$\begin{aligned} (A + I)u_3 &= u_2 \\ (A + I)u_2 &= u_1 \end{aligned} \Leftrightarrow u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε, έχουμε πως $A = P \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1}$ όπου $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Άρα, προκύπτει πως,

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Με όμοιο τρόπο με την 5.1 καταλήγουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι :

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2 - c_2 - c_3t \\ c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2 + 2c_2 + 2c_3t - c_3 \\ -c_1 - c_2t - \frac{1}{2}c_3t^2 + 2c_3 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}$$

■

5.6 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

Αρχικά παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ήδη σε κανονική μορφή *Jordan* άρα, άμεσα συμπεραίνουμε πως, $e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$. Τώρα για την επίλυση του Π.Α.Τ. γνωρίζουμε ότι η γενική λύση του συστήματος ικανοποιεί την σχέση :

$$y(t) = e^{At}y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds.$$

$$y(t) = e^{At}y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds = \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds = e^t \int_0^t e^{A(-s)}b(s)ds = \begin{bmatrix} e^t \int_0^t e^{-s} ds \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

5.7 Να λυθεί το Π.Α.Τ. :

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} y, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

Υπόδειξη : Λύστε την άσκηση με τρόπο όμοιο με την 5.1 και δείξτε ότι :

$$y(t) = \frac{1}{5}e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + -\frac{2}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

5.8 Θεωρούμε το σύστημα :

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x.$$

- (i) Να βρεθεί η γενική του λύση.
(ii) Να προσδιοριστεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις να τείνουν στο 0 καθώς το $t \rightarrow \infty$.

Λύση.

- (i) Η επίλυση του συστήματος είναι όμοια με την 5.1 και τελικά προκύπτει πως :

$$x(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (ii) Παρατηρήστε πως,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_1 = 0$$

άρα, για το σύνολο των αρχικών συνθηκών ισχύει πως, $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $c_2 \in \mathbb{R}$. ■

5.9 Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$y' = Ay + b(t), \quad y(0) = y_0,$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

και ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν ο πίνακας e^{At} και η λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.

Λύση.

Αρχικά για την εύρεση του πίνακα e^{At} έχουμε πως,

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^{2t} - e^t \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Έπειτα γνωρίζουμε ότι η γενική λύση του Π.Α.Τ. δίνεται από την σχέση :

$$y(t) = e^{At}y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds$$

όπου ο υπολογισμός της $y(t)$ αφήνεται για τον αναγνώστη. ■

Κεφάλαιο 6

Ποιοτική Θεωρία

Χρήσιμα κομμάτια θεωρίας ως προς την επίλυση ασκήσεων

1. Η εξίσωση $y' = f(t, y)$ λέγεται αυτόνομη αν η f δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή t , δηλαδή είναι της μορφής $f(y)$.
2. Ο χώρος φάσης της εξίσωσης $y' = f(y)$ είναι ο άξονας των y . Το \bar{y} λέγεται σημείο ισορροπίας αν $f(\bar{y}) = 0$. Το διάγραμμα φάσης είναι ο άξονας των y μαζί με τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη που καταδεικνύουν το πρόσημο της κλίσης της λύσης.
3. Συμβολίζουμε τη λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.: $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ με $\phi(t, y_0)$. Εξ' ορισμού ισχύει ότι $\phi(0, y_0) = y_0$.
4. Έστω ότι ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων του Π.Α.Τ. Τότε, αν \bar{y} σημείο ισορροπίας $\phi(t, \bar{y}) \equiv \bar{y}$ για όλα τα t . (η σταθερή λύση $y(t) = y_0$ ικανοποιεί τόσο την δ.ε. όσο και την αρχική συνθήκη και από το μονοσήμαντο των λύσεων είναι η μοναδική λύση). Αν y_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας, τότε η $\phi(t, y_0)$ δεν είναι ποτέ ίση με σημείο ισορροπίας. Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι αν y_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας τότε, η $t \rightarrow f(\phi(t, y_0))$ δεν αλλάζει πρόσημο στο χρόνο. Επομένως σε αυτή τη περίπτωση $\phi(t, y_0)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Επίσης λόγω του μονοσήμαντου της λύσης, η $\phi(t, y_0)$ δεν μπορεί να φτάσει το σημείο ισορροπίας σε πεπερασμένο χρόνο.
5. Το σημείο ισορροπίας \bar{y} λέγεται ευσταθές αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε αν $|y - \bar{y}| < \delta$ να ισχύει

$$|\phi(t, y) - \phi(t, \bar{y})| < \epsilon$$

για $t \geq 0$. Το \bar{y} λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και επιπλέον υπάρχει $\eta > 0$ ώστε αν $|y_0 - \bar{y}| < \eta$ να ισχύει

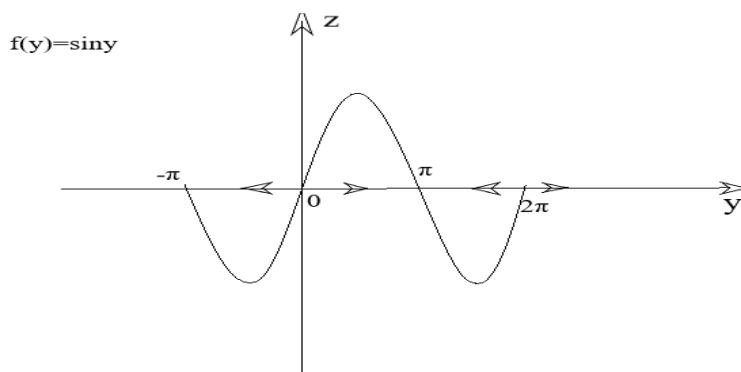
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, y_0) = \bar{y}.$$

Τέλος το σημείο ισορροπίας \bar{y} λέγεται ασταθές αν δεν είναι ευσταθές.

6. Στην περίπτωση που $f'(\bar{y}) \neq 0$, τότε \bar{y} είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν $f'(\bar{y}) < 0$ και ασταθές όταν $f'(\bar{y}) > 0$.
7. Παράδειγμα : Η αυτόνομη διαφορική εξίσωση: $y' = \sin y$ έχει σημεία ισορροπίας :

$$y = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Το διάγραμμα φάσης είναι :



Τα σημεία ισορροπίας $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι ασταθή σημεία ισορροπίας και τα $y = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας.

8. Μια οικογένεια διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = f_{\mu}(y),$$

όπου σε κάθε τιμή της παραμέτρου μ αντιστοιχεί μια διαφορική εξίσωση, καλείται μονοπαραμετρική οικογένεια διαφορικών εξισώσεων.

9. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση με παράμετρο μ

$$\frac{dy}{dt} = f_{\mu}(y).$$

Η τιμή $\bar{\mu}$ της παραμέτρου μ για την οποία έχουμε αλλαγή του αριθμού των σημείων ισορροπίας ή αλλαγή της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας λέγεται τιμή διακλάδωσης.

10. Αν έχουμε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών το οποίο εξαρτάται από μια μεταβλητή λ , οι τιμές του λ για τις οποίες το π.σ.τ. έχει λύση εκτός της μηδενικής ονομάζονται ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες λύσεις, ιδιοσυναρτήσεις ή ιδιολύσεις του π.σ.τ. Το σύνολο των ιδιοτιμών ονομάζεται φάσμα του π.σ.τ.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

6.1 Να γίνουν τα διαγράμματα φάσης για τις κάτωθι διαφορικές εξισώσεις :

$$(i) y' = y^2 \quad (ii) y' = (1 + y)^2 \quad (iii) y' = 1 + y^2.$$

6.2 Να γίνει το διάγραμμα φάσης και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης :

$$y' = y^2 - 3y + 2.$$

6.3 Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης :

$$y' = y^2 - 6y - 16$$

και να βρεθούν το $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες :

$$(i) y(0) = 0 \quad (ii) y(0) = -3 \quad (iii) y(0) = 8.$$

6.4 Να γίνει το διάγραμμα φάσης για την διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dt} = (y - 2) \sin y, \quad -\pi \leq y \leq \pi.$$

6.5 Να γίνουν τα διαγράμματα διακλάδωσης των διαφορικών εξισώσεων :

$$(i) y' = y^2 - 2y + 2\mu \quad (ii) y' = y^2 + 4y + \mu \quad (iii) y' = \mu - y.$$

6.6 Να λυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών :

$$(i) \begin{cases} x'' + x = t, & t \in [0, \pi] \\ x(0) - x(\pi) = 0 \\ x'(0) - x'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x'' + x = 0, & t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

6.7 Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών :

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, & t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}.$$

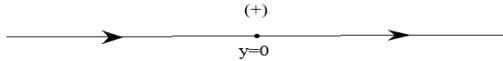
Ενδεικτικές Λύσεις Ασκήσεων Κεφαλαίου 6

6.1 Να γίνουν τα διαγράμματα φάσης για τις κάτωθι διαφορικές εξισώσεις :

$$(i) y' = y^2 \quad (ii) y' = (1 + y)^2 \quad (iii) y' = 1 + y^2.$$

Λύση.

(i) Λύνουμε την εξίσωση $f(y) = y^2 = 0$ άρα, $\bar{y} = 0$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Μάλιστα παρατηρούμε ότι $f(y) > 0$ για κάθε $y \neq \bar{y}$ άρα, το διάγραμμα φάσης είναι :



(ii) Η λύση είναι όμοια με το (i).

(iii) Λύση όμοια με το (i) με τη διαφοροποίηση ότι η $f(y) = 1 + y^2$ δεν έχει ρίζα άρα η διαφορική εξίσωση δεν έχει σημεία ισορροπίας.

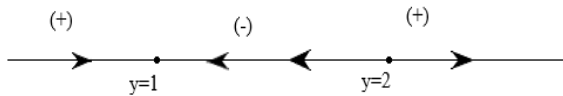
■

6.2 Να γίνει το διάγραμμα φάσης και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης :

$$y' = y^2 - 3y + 2.$$

Λύση.

Λύνουμε την εξίσωση $f(y) = y^2 - 3y + 2 = 0$ και παρατηρούμε ότι $\bar{y} = 1$ και $\bar{y} = 2$ τα μοναδικά σημεία ισορροπίας. Βρίσκουμε το πρόσημο της $f(y)$ για τις διάφορες τιμές του y και προκύπτει πως, το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης είναι το :



όπου παρατηρούμε ότι το $\bar{y} = 1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, ενώ το $\bar{y} = 2$ είναι ασταθές.

■

6.3 Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης :

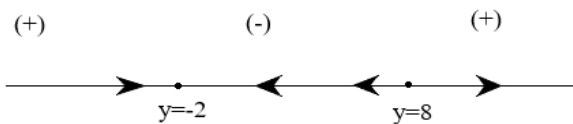
$$y' = y^2 - 6y - 16$$

και να βρεθούν το $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες :

$$(i) y(0) = 0 \quad (ii) y(0) = -3 \quad (iii) y(0) = 8.$$

Λύση.

Όμοια με 6.2 έχουμε πως, το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης είναι :



(i) Για την πρώτη περίπτωση αφού $-2 < y(0) < 8$ από το μονοσήμαντο της λύσης του Π.Α.Τ. έχουμε πως, $-2 < y < 8$ και μάλιστα αφού το $\bar{y} = -2$ έχει σημείο ευστάθειας τότε έχουμε πως,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -2.$$

(ii) Για $y(0) = -3$ έχουμε πως, $y(0) < -2$ και από το μονοσήμαντο λύσης του Π.Α.Τ. έχουμε πως, $y < -2$ και αφού $\bar{y} = -2$ σημείο ευστάθειας τότε,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -2.$$

(iii) Για $y(0) = 8$ από το μονοσήμαντο λύση του Π.Α.Τ. έχουμε πως, $y(t) = 8$ και μάλιστα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 8.$$

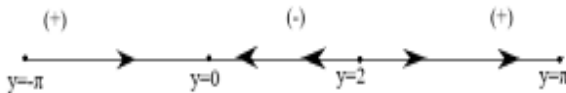
■

6.4 Να γίνει το διάγραμμα φάσης για την διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dt} = (y - 2) \sin y, \quad -\pi \leq y \leq \pi.$$

Λύση.

Λύνουμε την εξίσωση $f(y) = (y - 2) \sin y = 0$ όπου προκύπτει πως, $\bar{y} = 2$ και $\bar{y} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι σημεία ισορροπίας. Ελέγχουμε το πρόσημο της $f(y)$ και έχουμε πως, το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης είναι:



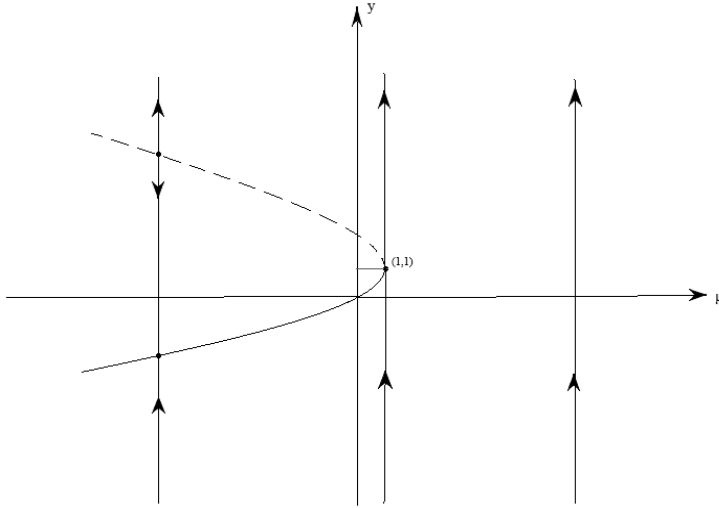
■

6.5 Να γίνουν τα διαγράμματα διακλάδωσης των διαφορικών εξισώσεων :

$$(i) y' = y^2 - 2y + \mu \quad (ii) y' = y^2 + 4y + \mu \quad (iii) y' = \mu - y.$$

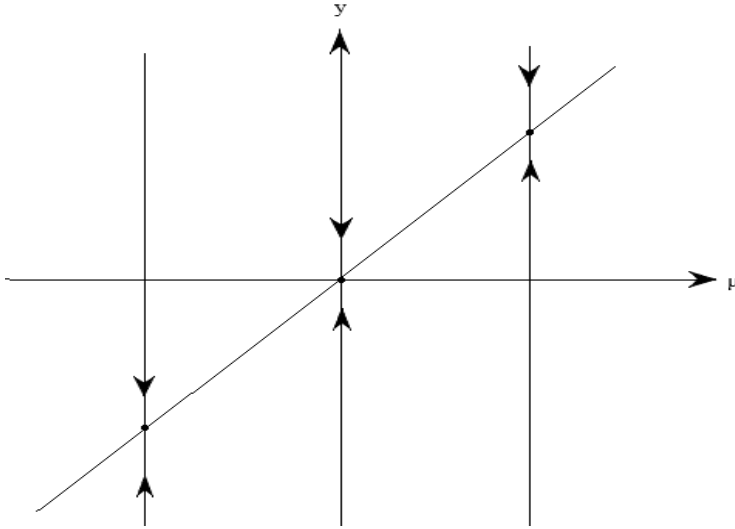
Λύση.

(i) Έχουμε πως, $y' = f_\mu(y)$ με $f_\mu(y) = y^2 - 2y + \mu = (y - 1)^2 + \mu - 1$. Τότε, ελέγχουμε την γραφική παράσταση της $f_\mu(y) = 0$ για την εύρεση του διαγράμματος διακλάδωσης όπου $\mu = 1$ είναι η τιμή της διακλάδωσης με $(1, 1)$ η κορυφή της παραβολής τότε το διάγραμμα διακλάδωσης είναι :



(ii) Η λύση είναι όμοια με το (i).

(iii) Έχουμε την διαφορική εξίσωση $y' = f_\mu(y)$ όπου $f_\mu(y) = \mu - y$ όπου παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει άπειρα σημεία ισορροπίας τα $\bar{y} = \mu$ και μάλιστα $f_\mu(y) > 0 \Leftrightarrow \mu > y$ ενώ $f_\mu(y) < 0 \Leftrightarrow \mu < y$. Τότε έχουμε πως, το διάγραμμα διακλάδωσης είναι :



■

6.6 Να λυθούν τα προβλήματα συνοριακών τιμών :

$$(i) \begin{cases} x'' + x = t, & t \in [0, \pi] \\ x(0) - x(\pi) = 0 \\ x'(0) - x'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x'' + x = 0, & t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

Λύση.

(i) Αρχικά λύνουμε την διαφορική εξίσωση

$$x'' + x = 0$$

όπου μέσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + 1 = 0$ συμπεραίνουμε ότι η λύση της x_{om} είναι :

$$x_{om}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Ακόμη υπολογίζουμε πως, $x'_{om}(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$ και παρατηρούμε ότι μια ειδική λύση είναι η $x_e(t) = t$. Άρα, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \quad \text{και} \quad x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 1.$$

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει το παρακάτω αλγεβρικό σύστημα :

$$\begin{cases} 2c_1 - \pi = 0 \\ 2c_2 = 0 \end{cases}$$

όπου προκύπτει ότι η μοναδική λύση είναι η $(c_1, c_2) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ δηλαδή η λύση του π.σ.τ. είναι

$$x(t) = \frac{\pi}{2} \cos t + t, \quad t \in [0, \pi].$$

(ii) Αρχικά λύνουμε την διαφορική εξίσωση

$$x'' + x = 0$$

όπου μέσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + 1 = 0$ συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι :

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει πως, $c_1 = 0$ άρα, η λύση του π.σ.τ. είναι

$$x(t) = c \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

■

6.7 Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών :

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \quad t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Λύση.

Διακρίνουμε περιπτώσεις σχετικά με τις τιμές του λ :

(i) Αν $\lambda = 0$,

Έχουμε πως, $x'' = 0$ όπου από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει πως, η λύση του π.σ.τ. είναι η τετριμμένη

$$x(t) = 0.$$

(ii) Αν $\lambda < 0$,

Έχουμε πως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$x(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t}$$

όπου από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει πως, η λύση του π.σ.τ. είναι η τετριμμένη $x(t) = 0$.

(iii) Αν $\lambda > 0$,

Έχουμε πως, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι :

$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}t + c_2 \sin \sqrt{\lambda}t$$

όπου από τις αρχικές συνθήκες προκύπτει πως,

$$c_1 = 0 \quad \text{και} \quad c_2 \sin \sqrt{\lambda}t = 0.$$

Για να έχει το π.σ.τ. μη-τετριμμένες λύσεις πρέπει να ισχύει πως, $\sin \sqrt{\lambda}\pi \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi \Leftrightarrow \lambda = n^2$.

Οι τιμές του λ κατά τις οποίες ισχύει ότι $\lambda(n) = n^2$ είναι ιδιοτιμές του π.σ.τ. ενώ οι αντίστοιχες λύσεις $x_n(t) = c \sin nt$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. . ■