

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$L[x] = x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t) \quad (1), \quad t \in [\alpha, \beta] = I$$

$$p, q, r \in C([\alpha, \beta])$$

Λύση της (1): Συνοριακές συνθήκες

$$b_1(x) = a_{11}x(\alpha) + a_{12}x'(\alpha) + \beta_{11}x(\beta) + \beta_{12}x'(\beta) = \gamma_1$$

$$b_2(x) = a_{21}x(\alpha) + a_{22}x'(\alpha) + \beta_{21}x(\beta) + \beta_{22}x'(\beta) = \gamma_2$$

Μη ομογενές πστ

$$r(t) \neq 0$$

$$|\gamma_1| + |\gamma_2| > 0$$

ομογενές πστ

$$r(t) = 0$$

$$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$$

$$I) \left(\begin{array}{l} x'' + \pi^2 x = 1, \quad t \in [0, 1] \\ x(0) + x'(0) = 0 \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{array} \right)$$

Γενική λύση

$$x(t) = \frac{1}{\pi^2} + c_1 \cos \pi t + c_2 \sin \pi t, \quad t \in [0, 1]$$

Συνοριακές συνθήκες

$$\begin{array}{l|l} c_1 + \pi c_2 = -\frac{1}{\pi^2} \\ -c_1 - \pi c_2 = -\frac{1}{\pi^2} \end{array} \quad \text{αδύνατο}$$

Το πστ δεν έχει λύση

$$\text{II)} \left(\begin{array}{l} x'' + x = t, \quad t \in [0, \pi] \\ x(0) - x(\pi) = 0 \\ x'(0) - x'(\pi) = 0 \end{array} \right) \text{ πστ}$$

Γενική λύση

$$x(t) = t + c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

$$2c_1 - \pi = 0 \Rightarrow (c_1, c_2) = \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \text{ μοναδική λύση}$$

$$2c_2 = 0$$

$$x(t) = t + \frac{\pi}{2} \cos t, \quad t \in [0, \pi] \text{ μοναδική λύση του πστ.}$$

$$\text{III)} \left(\begin{array}{l} x'' + x = 0, \quad t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{array} \right) \text{ πστ}$$

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (c_1, c_2) = (0, c)$$

$$c_1(-1) + c_2 \cdot 0 = 0$$

άπειρες λύσεις

$$x(t) = c \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

Γραμμικά π.σ.τ. με παράμετρο

$$\left(\begin{array}{l} x'' + \lambda x = 0^{(1)}, \quad t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ πραγμ. παραμετρος} \end{array} \right)$$

$$\text{I)} \lambda = 0 \quad (1) \quad x'' = 0, \quad x(t) = c_1 t + c_2$$

$$\begin{array}{l} x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{array} \dots \Rightarrow x(t) = 0 \text{ (τετριμμένη λύση)}$$

$$\text{II)} \lambda < 0 : x(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

$$\text{III)} \lambda > 0 : x(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}t + c_2 \sin \sqrt{\lambda}t$$

$$\begin{array}{l} x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ x(\pi) = 0 \Rightarrow c_2 \sin \sqrt{\lambda} \cdot \pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot \pi = \eta \pi \Rightarrow \lambda \eta = \eta^2, \quad \eta = 1, 2 \end{array}$$

$$x_n(t) = c \cdot \sin \eta \cdot (\eta t), \quad c_2 \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} x'' + P(t, \lambda)x' + Q(t, \lambda)x = 0, \quad t \in [\alpha, \beta] \\ b_1[x] = 0, \quad b_2[x] = 0 \end{array} \right) \Pi_0 \quad (\text{ομογενές πσ})$$

Ορισμός:

Οι τιμές του λ για τις οποίες το πσ (Π_0) έχει λύσεις εκτός της μηδενικής ονομάζονται ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες λύσεις ιδιοσυναρτήσεις (ή ιδιολύσεις) του (Π_0).

Πρόβλημα Sturm-Liouville

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \quad (1), \quad \forall t \in I$$

$$a_1(t) \neq 0, \quad a_0(t), a_1(t), a_2(t) \in C(I)$$

$$\text{Πολλαπλασιάζουμε την (1) με } \frac{1}{a_0(t)} e^{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} \quad (2)$$

$$(1), (2): \underbrace{e^{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}}_{p(t)} \cdot x'' + \underbrace{\frac{a_1(t)}{a_0(t)} e^{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}}_{p'(t)} \cdot x' + \underbrace{\frac{a_2(t)}{a_0(t)} e^{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}}_{q(t)} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow (p(t) \cdot x')' + q(t) \cdot x = 0$$

$$(p(t) \cdot x')' + (q(t) + \lambda r(t))x = 0, \quad p, q, r \in C(I)$$

$$p(t) \geq 0, \quad r(t) > 0$$

Εξίσωση

Sturm-Liouville

Ορισμός:

Μια ακολουθία συναρτήσεων (φ_n) , $n=1, 2, \dots$ με $\varphi_n: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αποτελεί ένα ορθογώνιο σύστημα στο $[\alpha, \beta]$ με συνάρτηση βάρους $r: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

ανν:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi_n(t) \varphi_k(t) r(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \alpha_k, & k = n \end{cases}$$

Σχόλιο:

Αν $\alpha_k = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ τότε το σύστημα λέγεται ορθοκανονικό.

Το $\int_a^b \varphi_n(t) \varphi_m(t) \Gamma(t) dt = \delta_{nm}$ (το δέτα του Kronecker)

$$\delta_{ka} = \begin{cases} 1, & k=a \\ 0, & k \neq a \end{cases}$$

Λήμμα: (ταυτότητα Lagrange)

Αν $L = \frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{d}{dt} \right) + q(t)$, $p, p', q \in C(\mathcal{I})$ ^{$[\alpha, \beta]$} (διαφορικός τελεστής)
και αν $x_1, x_2 \in C''(\mathcal{I})$ τότε ισχύει:

$$x_1 \cdot L[x_2] - x_2 \cdot L[x_1] = \left[p(t) (x_1 x_2' - x_1' x_2) \right]'$$

$$\downarrow \text{ή}$$
$$\frac{d}{dt} \left[p(t) \left(x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} \right) \right]$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot L[x_2] - x_2 \cdot L[x_1] &= x_1 \left[(p(t) x_2')' + q(t) x_2 \right] - x_2 \left[(p(t) x_1')' + q(t) x_1 \right] = \dots = \\ &= p'(t) \underbrace{(x_1 x_2' - x_1' x_2)}_W + p(t) \underbrace{(x_1 x_2'' - x_1'' x_2)}_{W'} = \dots = \left[p(t) (x_1 x_2' - x_1' x_2) \right]' \end{aligned}$$

Θεώρημα:

Θεωρούμε το π.σ.τ. $\left(\begin{array}{l} L[x] = (p(t) \cdot x')' + q(t) \cdot x - \lambda \cdot \Gamma(t) x \\ p, p', q, \Gamma \in C([\alpha, \beta]) \\ b_1[x] = 0, b_2[x] = 0 \end{array} \right)$

Αν x_1, x_2 ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 , τότε ισχύει το εξής:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \left(\int_a^b x_1(t) x_2(t) \Gamma(t) dt = p(\beta) W(\beta) - p(\alpha) W(\alpha) \right),$$

$$\text{όπου } W(\alpha) = W(x_1, x_2) (\alpha)$$

$$W(\beta) = W(x_1, x_2) (\beta) \text{ ορίζουσες Wronski στα } \alpha, \beta.$$

Παρατήρηση:

Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες $p(\alpha)W(\alpha) = p(\beta)W(\beta)$

τότε $\int_a^b x_1(t) x_2(t) \Gamma(t) dt = 0$ x_1, x_2 ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις

Υπόδειξη για την απόδ. του προηγ. θεωρήματος:

x_1, x_2 λύσεις της δ.εφ.

$$L[x_1] = -\lambda_1 \Gamma \cdot x_1$$

$$L[x_2] = -\lambda_2 \Gamma x_2$$

Από ταυτότητα Lagrange:

$$x_1 L[x_2] - x_2 L[x_1] = [p(t)(x_1 x_2' - x_1' x_2)]'$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \Gamma \cdot x_1 x_2 = [p(t)(x_1 x_2' - x_1' x_2)]'$$

Ολοκληρώνοντας:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\alpha}^{\beta} x_1(t) x_2(t) \Gamma(t) dt &= [p(t)(x_1 x_2' - x_1' x_2)]_{\alpha}^{\beta} = \dots = \\ &= p(\beta) W(\beta) - p(\alpha) W(\alpha). \end{aligned}$$

Θεώρημα:

Αν x_i, x_j είναι δυο ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ (περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville).

$$\left(\begin{array}{l} (p(t) \cdot x')' + q(t) \cdot x = -\lambda \Gamma x \\ x(\alpha) = x(\beta) \\ x'(\alpha) = x'(\beta) \end{array} \quad \begin{array}{l} p, p', q, \Gamma \in C([\alpha, \beta]) \\ p, \Gamma > 0 \end{array} \right)$$

που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i, λ_j ($\lambda_i \neq \lambda_j$) αντιστοίχα, τότε οι x_i, x_j είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους Γ .

VIII. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ
ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ Δ.Ε. ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (π.σ.τ.) συνίσταται στην αναζήτηση της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης, που ικανοποιεί κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, δηλαδή συνθήκες πάνω στο σύνορο του πεδίου ορισμού της λύσης. Προβλήματα συνοριακών τιμών αναφέρονται σε όλα τα είδη και τις τάξεις των διαφορικών εξισώσεων. Από πλευράς εφαρμογών τα σημαντικότερα π.σ.τ. είναι εκείνα στα οποία η διαφορική εξίσωση είναι συνήθως β' τάξης και ειδικότερα γραμμική. Η επίλυση πολλών κλασικών προβλημάτων της φυσικής, που τα μαθηματικά τους μοντέλα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, όπως π.χ. η διάδοση της θερμότητας, η παλλόμενη χορδή, η στήριξη δοκού κ.α., οδηγεί σε π.σ.τ. τέτοιου τύπου.

Έτσι, λοιπόν, στα επόμενα θα γίνει μελέτη π.σ.τ. για γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης.

Θεωρούμε τη δ.ε.

$$L[x]=x''+p(t)x'+q(t)x=r(t), \quad t \in I=[a,\beta] \quad (1.1)$$

με $p, q, r \in C(I)$.

Αναζητούμε λύση της (1) που να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\left. \begin{aligned} b_1[x] &= \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) + \beta_{11}x(\beta) + \beta_{12}x'(\beta) = \gamma_1 \\ b_2[x] &= \alpha_{21}x(a) + \alpha_{22}x'(a) + \beta_{21}x(\beta) + \beta_{22}x'(\beta) = \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Υποθέτουμε ότι η μία συνοριακή συνθήκη δεν προκύπτει από την άλλη με πολλαπλασιασμό επί κατάλληλο αριθμό.

Ορισμός 1.1

Εάν η δ.ε. (1.1) είναι ομογενής ($r(t)=0$, $\forall t \in I$) και οι συνοριακές συνθήκες (2.1) επίσης ομογενείς ($\gamma_1=\gamma_2=0$), τότε το πρόβλημα $((1.1),(1.2))$ λέγεται γραμμικό ομογενές π.σ.τ.. Εάν η (1.1) είναι μη ομογενής ή μία τουλάχιστον συνοριακή συνθήκη είναι μη ομογενής ($|\gamma_1|+|\gamma_2|>0$), τότε το πρόβλημα $((1.1),(1.2))$ είναι ένα μη ομογενές π.σ.τ..

Ένα π.σ.τ. μπορεί να μην έχει λύση ή να έχει μία λύση μόνο ή ακόμη και άπειρες λύσεις, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1

$$\begin{cases} x'' + \pi^2 x = 1, & t \in [0, 1] \\ x(0) + x'(0) = 0 \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{cases}$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t) = \frac{1}{\pi^2} + c_1 \sin \pi t + c_2 \eta \mu \pi t, \quad t \in [0, 1]$$

και η απαίτηση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{cases} c_1 + \pi c_2 = -\frac{1}{\pi^2} \\ -c_1 - \pi c_2 = -\frac{1}{\pi^2} \end{cases}$$

που είναι αδύνατο. Δηλαδή το π.σ.τ. δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 1.2

$$\begin{cases} x'' + x = t, & t \in [0, \pi] \\ x(0) - x(\pi) = 0 \\ x'(0) - x'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t) = t + c_1 \sin t + c_2 \eta \mu t, \quad t \in [0, \pi]$$

Οι σταθερές c_1, c_2 λόγω των συνοριακών συνθηκών ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} 2c_1 - \pi = 0 \\ 2c_2 = 0 \end{cases}$$

που έχει τη μοναδική λύση $(c_1, c_2) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Άρα το π.σ.τ. έχει μία, μοναδική, λύση την

$$x(t) = t + \frac{\pi}{2} \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

Παράδειγμα 1.3

$$\begin{cases} x'' + x = 0, \quad t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \eta \mu t, \quad t \in [0, \pi]$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

που έχει τις λύσεις $(c_1, c_2) = (0, c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Επομένως το π.σ.τ. έχει άπειρες λύσεις

$$x(t) = c \eta \mu t, \quad t \in [0, \pi].$$

2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ Π.Σ.Τ. ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ.

Παράδειγμα 2.1.

Θεωρούμε το π.σ.τ.:

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \quad t \in [0, \pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{cases}$$

όπου λ είναι πραγματική παράμετρος.

Για την επίλυσή του διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

VIII. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

(i) Εάν $\lambda=0$ τότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1 t+c_2$$

και η απαίτηση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες δίνει:

$$x(t)=0, t \in [0, \pi] \text{ (τετριμμένη λύση).}$$

(ii) Εάν $\lambda < 0$ τότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1 \exp(\sqrt{-\lambda}t) + c_2 \exp(-\sqrt{-\lambda}t)$$

και οι συνοριακές συνθήκες δίνουν $(c_1, c_2)=(0,0)$, δηλαδή

$$x(t)=0, t \in [0, \pi]$$

(iii) Εάν $\lambda > 0$ τότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1 \sin \sqrt{\lambda}t + c_2 \eta \mu \sqrt{\lambda}t, t \in [0, \pi]$$

Από τη συνοριακή συνθήκη $x(0)=0$ συνάγεται ότι $c_1=0$ και λόγω της $x(\pi)=0$ έχουμε

$$c_2 \eta \mu \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

Για να έχει το π.σ.τ. μη τετριμμένες λύσεις, δηλαδή "γνήσιες λύσεις", όπως λέμε, πρέπει:

$$\sqrt{\lambda} \pi = n \pi, n=1,2,\dots$$

δηλαδή για τις τιμές

$$\lambda_n = n^2, n=1,2,\dots$$

της παραμέτρου λ , το π.σ.τ. έχει τη λύση

$$x_n(t) = c \eta \mu(nt), t \in [0, \pi], n=1,2,\dots$$

Έτσι γενικότερα, εάν θεωρήσουμε το π.σ.τ.

$$\begin{cases} x'' + P(t, \lambda)x' + Q(t, \lambda)x = R(t), t \in [\alpha, \beta] \\ b_1[x] = \gamma_1, b_2[x] = \gamma_2 \end{cases} \quad (\pi)$$

όπου λ πραγματική (ή και μιγαδική) παράμετρος, τότε η ύπαρξη ή μη λύσης τού εξαρτάται από τις τιμές του λ .

ΟΜΟΓΕΝΕΣ
π.σ.τ.

$$\begin{cases} x'' + P(t, \lambda)x' + Q(t, \lambda)x = 0, t \in [\alpha, \beta], \lambda \in \mathbb{R} \\ b_1[x] = 0, b_2[x] = 0 \end{cases} \quad (\pi_0)$$

Ορισμός 2.1

Οι τιμές του λ για τις οποίες το π.σ.τ. (π_0) έχει λύση, ονομάζονται ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες λύσεις, ιδιοσυναρτήσεις ή ιδιολύσεις του (π_0) . Το σύνολο των ιδιοτιμών ονομάζεται φάσμα του π.σ.τ. (π_0) .

Στην περίπτωση του ομογενούς π.σ.τ., ιδιοσυναρτήσεις είναι οι μη

μηδενικές (μη τετριμμένες) λύσεις του.

Στο παράδειγμα (2.1) οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_n = n^2$, $n=1,2,\dots$ και οι ιδιοσυναρτήσεις $x_n(t) = \sin(nt)$, $t \in [0, \pi]$, $n=1,2,\dots$.

Επίλυση του ομογενούς π.σ.τ.

$$\begin{cases} x'' + P(t, \lambda)x' + Q(t, \lambda)x = 0, & t \in [\alpha, \beta], \lambda \in \mathbb{R} \\ b_1[x] = 0, \quad b_2[x] = 0 \end{cases} \quad (\pi_0)$$

Αν $u_\lambda(t)$, $v_\lambda(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε. του (π_0) , τότε η γενική λύση της είναι

$$x_\lambda(t) = c_1 u_\lambda(t) + c_2 v_\lambda(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Συνεπώς το π.σ.τ. (π_0) θα έχει μη τετριμμένες λύσεις τότε και μόνο τότε αν το σύστημα (ως προς c_1, c_2)

$$\begin{cases} b_1[u_\lambda]c_1 + b_1[v_\lambda]c_2 = 0 \\ b_2[u_\lambda]c_1 + b_2[v_\lambda]c_2 = 0 \end{cases}$$

έχει λύση διάφορη της μηδενικής, δηλαδή τότε και μόνο τότε αν το λ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$\begin{vmatrix} b_1[u_\lambda] & b_1[v_\lambda] \\ b_2[u_\lambda] & b_2[v_\lambda] \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

Το σύνολο των ριζών της (2.1) είναι το φάσμα του π.σ.τ. (π_0) .

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM-LIOUVILLE.

Θεωρούμε τη δ.ε.

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \quad (E)$$

με $a_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί

$$\frac{1}{a_0(t)} \exp \left\{ \int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right\}$$

και θέτουμε

VIII. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

$$p(t) = \exp\left\{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right\}, \quad q(t) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)} \exp\left\{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right\}$$

Τότε η (E) γίνεται

$$p(t)x'' + p'(t)x' + q(t)x = 0$$

ή

$$(p(t)x')' + q(t)x = 0 \tag{3.1}$$

Η δ.ε. (3.1) είναι η αυτοσυζυγής μορφή της (E) και όπως είναι φανερό η (E) με $a_0, a_1, a_2 \in C(I)$ ανάγεται πάντοτε στη μορφή αυτή.

Θεωρούμε τη δ.ε. αυτοσυζυγούς μορφής με παράμετρο λ

$$(p(t)x'(t))' + (q(t) + \lambda r(t))x(t) = 0, \quad t \in I = [a, \beta] \tag{3.2}$$

Ορισμός 3.1

Η δ.ε. (3.2), όπου $p \in C^1(I)$, $q, r \in C(I)$, με $p(t) \geq 0$ και $r(t) > 0 \quad \forall t \in I$ ονομάζεται εξίσωση Sturm-Liouville. Εάν $p(t) > 0 \quad \forall t \in I$ τότε η (3.2) ονομάζεται ομαλή (κανονική) εξίσωση Sturm-Liouville και εάν $p(a) = 0$ ή $p(\beta) = 0$ τότε η (3.2) ονομάζεται ιδιάζουσα (μη κανονική) εξίσωση Sturm-Liouville.

Είναι φανερό ότι η εξίσωση Sturm-Liouville έχει λύσεις αφού γράφεται

$$p(t)x'' + p'(t)x' + (q(t) + \lambda r(t))x = 0$$

και οι $p, p', q - \lambda r$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Ορισμός 3.2

Μία ακολουθία συναρτήσεων (φ_n) $n=1, 2, \dots$ με $\varphi_n: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ λέμε ότι αποτελεί ένα ορθογώνιο σύστημα στο διάστημα $[a, \beta]$ με συνάρτηση βάρους $r: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ τότε και μόνον τότε αν:

$$\int_a^\beta \varphi_k(t) \varphi_\lambda(t) r(t) dt = \begin{cases} 0, & k \neq \lambda \\ a_k, & k = \lambda \end{cases}$$

Αν $a_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ τότε το σύστημα ονομάζεται ορθοκανονικό και γράφουμε

$$\int_a^\beta \varphi_k(t) \varphi_\lambda(t) r(t) dt = \delta_{k\lambda}$$

όπου $\delta_{k\lambda}$ είναι το δέλτα του Kronecker, δηλαδή

$$\delta_{k\lambda} = \begin{cases} 1, & k=\lambda \\ 0, & k \neq \lambda \end{cases}$$

Σημείωση 3.1

Για $\varphi_k = \varphi_\lambda = \varphi$ η συνάρτηση με τύπο

$$\|\varphi(t)\| = \left(\int_a^\beta [\varphi(t)]^2 r(t) dt \right)^{1/2}$$

ορίζει μία norm στο χώρο $C([a, \beta])$.

Είναι προφανές ότι εάν η ακολουθία (φ_n) $n=1, 2, \dots$ αποτελεί ένα ορθογώνιο σύστημα στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε η ακολουθία (f_n) με

$$f_n(t) = \frac{\varphi_n(t)}{\|\varphi_n(t)\|}, n=1, 2, \dots$$

είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στο $[a, \beta]$ ως προς την ίδια συνάρτηση βάρους.

Λήμμα 3.1 (Ταυτότητα Lagrange)

Εάν

$$L = \frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{d}{dt} \right) + q(t)$$

με $p, p', q \in C([a, \beta])$ είναι ένας αυτοσυζυγής διαφορικός τελεστής στο $[a, \beta]$ και εάν x_1, x_2 είναι συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[a, \beta]$, τότε:

$$x_1 L[x_2] - L[x_1] x_2 = \left[p(x_1 x_2' - x_1' x_2) \right]'$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό του ορισμού L έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 L[x_2] - L[x_1] x_2 &= x_1 \left[(px_2')' + qx_2 \right] - x_2 \left[(px_1')' + qx_1 \right] = x_1 (px_2')' - x_2 (px_1')' \\ &= x_1 (p'x_2' + px_2'') - x_2 (p'x_1' + px_1'') \\ &= p'(x_1 x_2' - x_1' x_2) + p(x_1 x_2'' - x_1'' x_2) \\ &= \left[p(x_1 x_2' - x_1' x_2) \right]'. \end{aligned}$$

Θεωρούμε την εξίσωση Sturm-Liouville:

$$L[x] = (px')' + qx = -\lambda x \tag{3.3}$$

$$\left(p \in C^1([a, \beta]), q, r \in C([a, \beta]) \right)$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$b_1[x] = 0, b_2[x] = 0 \tag{3.4}$$

όπου b_1, b_2 είναι οι "συνοριακοί τελεστές", όπως έχουν οριστεί στην (1.2).

Θεώρημα 3.1

Αν x_1, x_2 είναι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. ((3.3),(3.4)) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 , τότε

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^\beta x_1(t)x_2(t)r(t)dt = p(\beta)W(\beta) - p(\alpha)W(\alpha)$$

όπου $W(\alpha), W(\beta)$ είναι οι τιμές της ορίζουσας Wronski για τις x_1, x_2 στα α, β .

Απόδειξη.

Αφού x_1, x_2 είναι λύσεις της δ.ε. (3.3) θα έχουμε

$$L[x_1] = -\lambda_1 r x_1, \quad L[x_2] = -\lambda_2 r x_2$$

Αντικαθιστούμε στην ταυτότητα Lagrange και παίρνουμε

$$(\lambda_1 - \lambda_2) r x_1 x_2 = [p(x_1 x_2' - x_1' x_2)]'$$

Ολοκληρώνουμε στο $[a, \beta]$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^\beta r(t)x_1(t)x_2(t)dt &= [p(x_1 x_2' - x_1' x_2)]_a^\beta = \\ &= p(\beta) [x_1(\beta)x_2'(\beta) - x_1'(\beta)x_2(\beta)] - p(\alpha) [x_1(\alpha)x_2'(\alpha) - x_1'(\alpha)x_2(\alpha)] = \\ &= p(\beta)W(\beta) - p(\alpha)W(\alpha). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι εάν οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι διαφορετικές και οι συνοριακές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε $p(\alpha)W(\alpha) = p(\beta)W(\beta)$, τότε οι ιδιοσυναρτήσεις x_1, x_2 είναι ορθογώνιες.

Ορισμός 3.3

Ένα π.σ.τ. που αποτελείται από μια δ.ε. Sturm-Liouville και συνοριακές συνθήκες τέτοιες ώστε οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές να είναι ορθογώνιες, λέγεται πρόβλημα (ή σύστημα) Sturm-Liouville.

Αναφέρουμε τρεις, τις πιο σημαντικές, περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στα προβλήματα Sturm-Liouville.

Περίπτωση 1.

$$\begin{cases} \alpha_1 x(\alpha) + \alpha_2 x'(\alpha) = 0, & |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \\ \beta_1 x(\beta) + \beta_2 x'(\beta) = 0, & |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

που ονομάζονται χωρισμένες συνορικές συνθήκες και το αντίστοιχο π.σ.τ. ονομάζεται πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες.

Περίπτωση 2

$$\begin{cases} x(a)=x(b) \\ x'(a)=x'(b) \end{cases} \quad (3.6)$$

που ονομάζονται περιοδικές συνθήκες και το αντίστοιχο π.σ.τ. με την επιπλέον υπόθεση $p(a)=p(b)$, ονομάζεται περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville.

Περίπτωση 3

Εάν $p(a)=p(b)=0$, δηλαδή η δ.ε. είναι ιδιάζουσα, τότε είναι προφανές (από το θεώρημα 3.1) ότι οι x_1, x_2 είναι ορθογώνιες. Το αντίστοιχο π.σ.τ. ονομάζεται ιδιάζων πρόβλημα Sturm-Liouville.

Για τις περιπτώσεις 1 και 2, ποδεικνύουμε τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 3.2

Θεωρούμε το π.σ.τ. (τύπου Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες)

$$\begin{cases} L[x]=(px')'+qx=-\lambda rx, & p, p', q, r \in C([a, b]), \quad p, r > 0 \\ a_1 x(a) + a_2 x'(a) = 0, & |a_1| + |a_2| > 0 \\ \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0, & |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \end{cases}$$

Εάν x_i, x_j είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j , τότε οι x_i, x_j είναι ορθογώνιες στο $[a, b]$ με συνάρτηση βάρους r .

Απόδειξη

Αφού x_i, x_j είναι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. θα ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στο άκρο a , δηλαδή:

$$\begin{cases} a_1 x_i(a) + a_2 x_i'(a) = 0 \\ a_1 x_j(a) + a_2 x_j'(a) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Το ομογενές γραμμικό σύστημα (3.7) έχει λύση $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, γιατί $|a_1| + |a_2| > 0$. Επομένως είναι

$$\begin{vmatrix} x_i(a) & x_i'(a) \\ x_j(a) & x_j'(a) \end{vmatrix} = 0$$

δηλαδή

$$W(a) = 0. \quad (3.8)$$

Με τον ίδιο τρόπο για το άκρο b βρίσκουμε:

VIII. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

$$W(\beta)=0. \tag{3.9}$$

Από τις (3.8), (3.9) και το θεώρημα (3.1) έπεται:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_a^\beta r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

και επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$, είναι

$$\int_a^\beta r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις x_i, x_j είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $r(t)$, $t \in [a, \beta]$.

Θεώρημα 3.3

Εάν x_i, x_j είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. (περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville)

$$\begin{cases} (px')' + q(x) = -\lambda r x, & p, p', q, r \in C([a, \beta]), \quad p, r > 0 \\ x(a) = x(\beta) & \text{με } p(a) = p(\beta) \\ x'(a) = x'(\beta) \end{cases}$$

που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j τότε οι x_i, x_j είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους την r .

Απόδειξη

Οι ιδιοσυναρτήσεις x_i, x_j ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{cases} x_i(a) = x_i(\beta) & x_j(a) = x_j(\beta) \\ x_i'(a) = x_i'(\beta) & x_j'(a) = x_j'(\beta) \end{cases}$$

Επομένως για την οριζουσα Wronski $W(x_i, x_j)(t)$ ισχύει

$$W(a) = W(\beta) \tag{3.10}$$

Από την (3.10), την υπόθεση $p(a) = p(\beta)$ και το θεώρημα (3.1) έπεται

$$(\lambda_i - \lambda_j) \int_a^\beta r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

και επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$, θα είναι

$$\int_a^\beta r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις x_i, x_j είναι ορθογώνιες στο $[a, \beta]$ με συνάρτηση βάρους r .

Παράδειγμα 3.1.

Να επιλυθεί το ακόλουθο π.σ.τ.:

$$\begin{cases} x'' + 4x' + (4 + 9\lambda)x = 0 \\ x(0) = 0, x(a) = 0, a > 0 \end{cases}$$

Το π.σ.τ. γράφεται

$$\begin{cases} (e^{4t}x')' + 4e^{4t}x = -\lambda(9e^{4t})x \\ x(0) = 0, x(a) = 0 \end{cases}$$

που είναι ένα πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες (περίπτωση 1) και σύμφωνα με το θεώρημα (3.2) έχει ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις με συνάρτηση βάρους $r(t) = 9e^{4t}$. Για την εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $\lambda < 0$: Η γενική λύση της δ.ε. είναι:

$$x(t) = c_1 \exp\left[(-2 + 3\sqrt{-\lambda})t\right] + c_2 \exp\left[(-2 - 3\sqrt{-\lambda})t\right]$$

και η απαίτηση να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες δίνει $(c_1, c_2) = (0, 0)$ δηλαδή το π.σ.τ. δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

(ii) $\lambda = 0$: Η γενική λύση είναι:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$$

και από τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε $(c_1, c_2) = (0, 0)$ δηλαδή και η $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή.

(iii) $\lambda > 0$: Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t) = e^{-2t} \left(c_1 \operatorname{cosh} 3\sqrt{\lambda}t + c_2 \operatorname{sh} 3\sqrt{\lambda}t \right)$$

Η συνοριακή συνθήκη $x(0) = 0$ δίνει $c_1 = 0$, και η $x(a) = 0$ δίνει $c_2 \operatorname{sh} 3\sqrt{\lambda}a = 0$.

Το πρόβλημα έχει λύσεις (γνήσιες) τότε και μόνο τότε αν

$$\operatorname{sh} 3\sqrt{\lambda}a = 0$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{9a^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$x_n(t) = c e^{-2t} \operatorname{sh} \frac{n\pi t}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Θεώρημα 3.4.

Κάθε πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες έχει μόνο απλές ιδιοτιμές (με πολλαπλότητα 1).

Απόδειξη

VIII. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Έστω φ_1, φ_2 ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή λ . Οι φ_1, φ_2 ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες για $t=a$, δηλαδή:

$$\begin{cases} a_1\varphi_1(a) + a_2\varphi_1'(a) = 0 \\ a_1\varphi_2(a) + a_2\varphi_2'(a) = 0 \end{cases}$$

και επειδή $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ θα είναι

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_1'(a) \\ \varphi_2(a) & \varphi_2'(a) \end{vmatrix} = 0$$

δηλαδή:

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(a) = 0.$$

Άρα οι φ_1, φ_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επομένως η ιδιοτιμή λ είναι απλή.

Παράδειγμα 3.2.

Θεωρούμε το σύστημα Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 & , 0 \leq t \leq 1 \\ x(0) = 0 \\ x(1) + hx'(1) = 0, h > 0 : \text{σταθ.} \end{cases}$$

Εδώ είναι $p=1, q=0, r=1$.

Για $\lambda \leq 0$ το πρόβλημα δεν έχει ιδιοσυναρτήσεις.

Για $\lambda > 0$ η λύση της εξίσωσης Sturm-Liouville είναι:

$$\varphi(t) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} t + c_2 \eta \mu \sqrt{\lambda} t$$

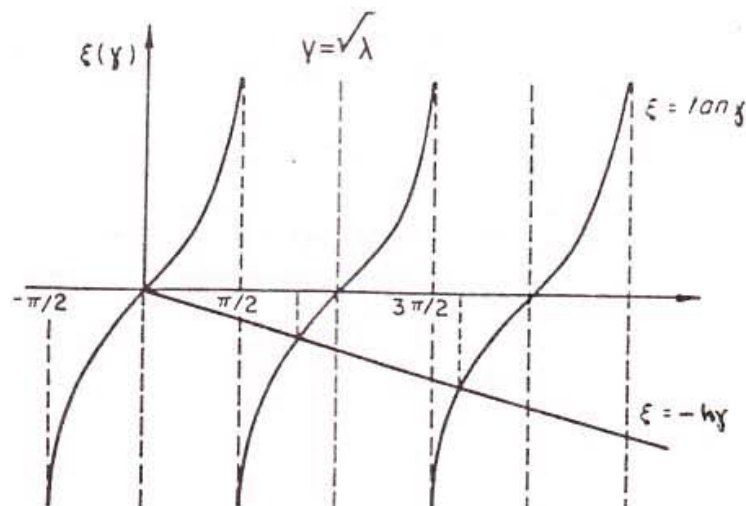
$$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \text{ οπότε } \varphi(t) = c_2 \eta \mu \sqrt{\lambda} t$$

$$x(1) + hx'(1) = 0 \Rightarrow \eta \mu \sqrt{\lambda} + h \sqrt{\lambda} \sigma \upsilon \nu \sqrt{\lambda} = 0 \text{ για } c_2 \neq 0$$

που γράφεται

$$\epsilon \varphi \gamma = -h \gamma$$

όπου



Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης δεν εκφράζονται με ένα απλό τρόπο, μπορούμε όμως να σχεδιάσουμε τις συναρτήσεις

$$\xi = \varepsilon \varphi \gamma$$

$$\text{και } \xi = -h \gamma$$

Οι ρίζες βρίσκονται από τις τομές των δύο καμπυλών, (όπως φαίνεται στο σχήμα) και μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχουν απείρου πλήθους ρίζες γ_n , $n=1,2,\dots$

Σε κάθε γ_n αντιστοιχεί μία ιδιοτιμή

$$\lambda_n = \gamma_n^2, \quad n=1,2,\dots$$

Έτσι υπάρχει μία ακολουθία ιδιοτιμών:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

με:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\varphi_n(t) = \eta \mu \sqrt{\lambda_n} t$.

Παρατήρηση 3.1

Τα περιοδικά προβλήματα Sturm-Liouville μπορεί να έχουν και διπλές ιδιοτιμές, όπως φαίνεται στο επόμενο

Παράδειγμα 3.3.

Το περιοδικό πρόβλημα:

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 \\ x(-a) = x(a) \\ x'(-a) = x'(a) \end{cases}$$

έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2, \quad n=1,2,\dots$$

και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$y_n(t) = A_n \sin \frac{n\pi t}{a}, \quad \varphi_n(t) = B_n \eta \mu \frac{n\pi t}{a}, \quad n=1,2,\dots$$

όπου κάθε y_n είναι γραμμικά ανεξάρτητη με κάθε φ_n στο διάστημα $[-a, a]$. Δηλαδή κάθε ιδιοτιμή λ_n είναι διπλή.

Θεώρημα 3.5.

Όλες οι ιδιοτιμές ενός προβλήματος Sturm-Liouville είναι πραγματικές.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda = k + i\mu$, $k, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mu \neq 0$ και έστω $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Τότε ισχύει:

$$[p(t)(u(t) + iv(t))']' + (q(t) + (k + i\mu)r(t))(u(t) + iv(t)) = 0 \quad (3.11)$$

και παίρνοντας τη συζυγή παράσταση της (3.11) συμπεραίνουμε ότι η $\bar{\varphi}(t) = u(t) - iv(t)$ είναι μία ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\bar{\lambda} = k - i\mu$. Επειδή $\lambda \neq \bar{\lambda}$, οι ιδιοσυναρτήσεις $\varphi, \bar{\varphi}$ είναι ορθογώνιες (θεώρημα 3.3), δηλαδή

$$\int_a^b r(t)(u(t) + iv(t))(y(t) - iv(t)) dt = \int_a^b r(t) [(u(t))^2 + (v(t))^2] dt = 0$$

που είναι άτοπο γιατί, $r(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$ και η φ είναι διάφορη της μηδενικής αφού είναι ιδιοσυνάρτηση. Επομένως δεν υπάρχει μιγαδική ιδιοτιμή.

Θεώρημα 3.6.

Κάθε κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες δυναμικές συνθήκες, έχει μία ακολουθία πραγματικών ιδιοτιμών

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \quad \text{με} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Για κάθε m η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση φ_m έχει ακριβώς m ρίζες στο (a, b) .

Θεώρημα 3.7.

Κάθε περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville έχει μία ακολουθία πραγματικών ιδιοτιμών $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots$ με $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty$.

Η απόδειξη των θεωρημάτων 3.6 και 3.7 μπορεί να βρεθεί στο [16].