Διαφορικές εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης

1.1 Εξισώσεις της μορφής : $F(t, y, y') = 0$, όπου $F : D \to \mathbb{R}$.
Ζητούνται όλες οι $\varphi(t) \in C^1(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$, που ικανοποιούν ταυτοτικά την εξίσωση.

Ορισμός : Η συνάρτηση $y = \varphi(t)$, $t \in I$, είναι λύση της δ.ε. $F(t, y, y') = 0$ αν

(i) $\varphi(t) \in C^1(I)$

(ii) $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in D \quad \forall t \in I$

(iii) $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

Εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης κανονικής (λυμένης) μορφής :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

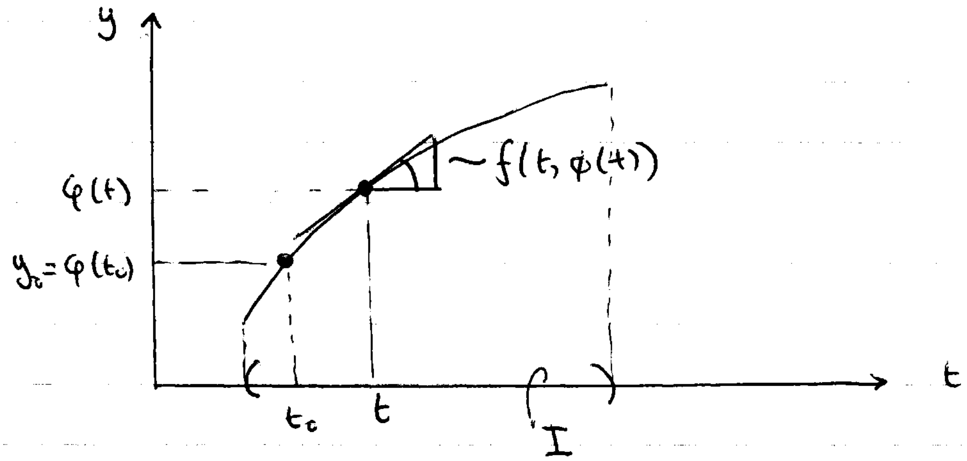
οπου f συνεχής . Η δ.ε. μαζί με αρχικές συνθήκες ορίζει ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ) :

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ , \ y(t_0) = y_0 \quad (t_0 \in I)$$

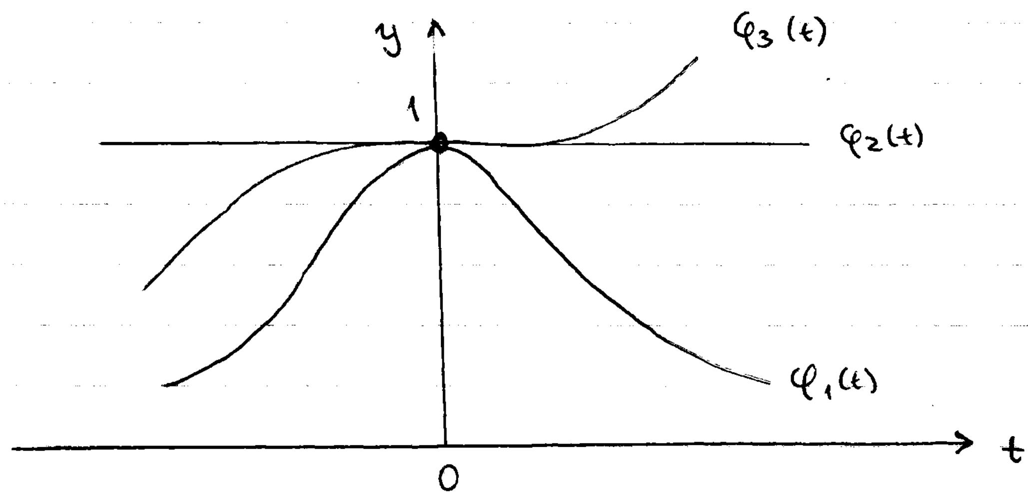
Ορισμός: Λύση του Π.Α.Τ στο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, όπου $t_0 \in I$, ορίζεται συνάρτηση $\varphi(t) \in C^1(I)$: $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I$ και $\varphi(t_0) = y_0$.

Ορισμός: Πεδίο ορισμού του Π.Α.Τ. είναι το μεγαλύτερο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται λύση και για τι οποίο $t_0 \in I$.

Γεωμετρική ερμηνεία Π.Α.Τ $1^{ης}$ τάξης: Αν η συνάρτηση $y = \varphi(t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ , τότε (i) η λύση του γραφήματο της σε κάθε σημείο $(t, \varphi(t))$, $t \in I$, είναι ιση μέ την τιμή της συνάρτησης $f(t, \varphi(t))$, καί (ii) Το γράφημα διέρχεται από τό σημείο (t_0, y_0)



Παράδειγμα: Εστω το Π.Α.Τ. $y'(t) = -t\, y(t)$, $y(0) = 1$.
Ποιά από τά παρακάτω γραφήματα αντιστοιχεί σε πιθανή λύση;



Καί τά τρία γραφήματα ικανοποιούν την αρχική συνθήκη $\varphi_i(0) = 1$, $i = 1,2,3$. Γιά $t=0$ έχουμε επίσης $\varphi_i'(0) = 0$ πού είναι επίσης συμβατό μέ τήν διαφορική εξίσωση ($y'(0) = 0$). Γιά $t>0$ από το διάγραμμα έχουμε $\varphi_i(t) > 0$ καί επομένως αν η $\varphi_i(t)$ είναι λύση πρέπει νά έχουμε (από την δ.ε.) $\varphi_i'(t) < 0$. Η μόνη φθίνουσα συνάρτηση στό $[0, \infty)$ είναι η $\varphi_1(t)$. (Η λύση του Π.Α.Τ είναι $\varphi(t) = \exp(-t^2/2)$; $\varphi'(t) = -t\exp(-t^2/2) = -t\,\varphi(t)$, $\varphi(0) = 1$).

1.2 Εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών

Διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(t)\,h(y) \qquad (*)$$

g, h ορισμένες και συνεχείς σε συγκεκριμένα ανοικτά διαστήματα.
Αν $h(y) \neq 0$ στο πεδίο ορισμού της h, η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy(t)}{dt} = g(t)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{h(y)} \frac{dy(t)}{dt}\, dt = \int g(t)\, dt + c$$

Με την αντικατάσταση: $y = y(t) \Rightarrow dy = y'(t)\, dt$ και επομένως η $(*)$ γράφεται:

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(t)\, dt + c$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε την δ.ε. $y'(t) = y^2$. Διαχωρίζοντας τις μεταβλητές (για $y \neq 0$):

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{t+c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση $y(t) \equiv 0$ είναι επίσης λύση!

Για προβλήματα αρχικών τιμών $(y' = g(t)\,h(y),\ y(t_0) = y_0)$ η αρχική συνθήκη ορίζει την αυθαίρετη σταθερά c.

Είναι επίσης δυνατόν νά ολοκληρώσουμε με όρια:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)\,dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dr}{h(r)} = \int_{t_0}^{t} g(\sigma)\,d\sigma$$

Αν $\int \frac{dr}{h(r)} =: F(r)$, τότε

$$F(y) - F(y_0) = \int_{t_0}^{t} g(\sigma)\,d\sigma$$

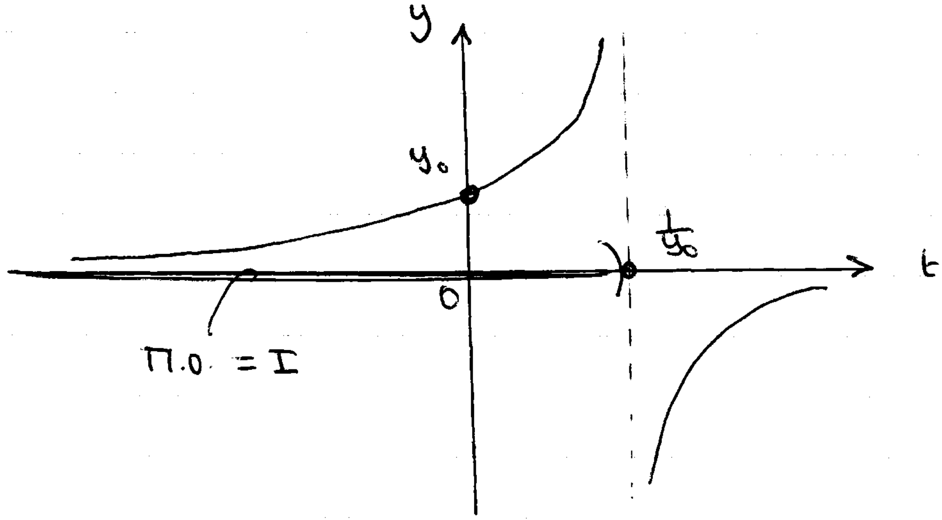
$$\Rightarrow \quad F(y) = F(y_0) + \int_{t_0}^{t} g(\sigma)\,d\sigma$$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω τό Π.Α.Τ. : $y'(t) = y^2$, $y(0) = y_0 > 0$.
Η λύση της Δ.Ε είναι (από προηγούμενα)

$$y(t) = -\frac{1}{t+c} \Rightarrow y(0) = y_0 = -\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{y_0}$$

καί επομένως η (μοναδική) λύση του ΠΑΤ : $y(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$



Η λύση "εκρήγνυται" καθώς $t \to 1/y_0$. Πεδίο ορισμού:
$I = (-\infty, 1/y_0)$ – τό μεγαλύτερο διάστημα I στό οποίο η λύση είναι συνεχής καί $0 \in I$.

<u>Παράδειγμα</u>: Νά βρεθεί η λύση του Π.Α.Τ.:

$$e^{y}\frac{dy}{dt} - (t+t^{3}) = 0 \quad , \quad y(0)=1$$

<u>Λύση</u> (<u>μέθοδος 1η</u>): Μέ χωρισμό των μεταβλητών

$$e^{y}\,dy = (t+t^{3})\,dt$$

$$\Rightarrow \int e^{y}\,dy = \int (t+t^{3})\,dt \quad + c$$

$$\Rightarrow e^{y} = \frac{t^{2}}{2} + \frac{t^{4}}{4} + c$$

$y(0)=1 \Rightarrow e^{1} = c$. Επομένως

$$e^{y} = \frac{t^{4}}{4} + \frac{t^{2}}{2} + e \Rightarrow y(t) = \ln\left(\frac{t^{4}}{4}+\frac{t^{2}}{2}+e\right)$$

<u>Μέθοδος 2η</u>: Ολοκλήρωση μέ όρια.

$$\int_{1}^{y} e^{r}\,dr = \int_{0}^{t} (\sigma+\sigma^{3})\,d\sigma$$

$$\Rightarrow \left[e^{r}\right]_{1}^{y} = \left[\frac{\sigma^{2}}{2}+\frac{\sigma^{4}}{4}\right]_{0}^{t}$$

$$\Rightarrow e^{y} - e = \frac{t^{2}}{2} + \frac{t^{4}}{4}$$

$$\Rightarrow e^{y} = \frac{t^{4}}{4} + \frac{t^{2}}{2} + e$$

$$\Rightarrow y = \ln\left(\frac{t^{4}}{4} + \frac{t^{2}}{2} + e\right)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω το Π.Α.Τ

$$y'(t) = \frac{t\,y(4-y)}{1+t}, \quad y(0) = y_0 > 0$$

(α) Να βρεθεί η λύση του· (β) Να μελετηθεί η λύση όταν $y(t) \to \infty$.

<u>Λύση</u>: Παρατηρούμε ότι $y=0$ και $y=4$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Επίσης $y=4$ είναι λύση του Π.Α.Τ αν $y_0 = 4$. Γιά $y \neq 0$, $y \neq 4$ με διαχωρισμό μεταβλητών:

$$\frac{dy}{y(4-y)} = \frac{t\,dt}{1+t}$$

Έχουμε:

$$\frac{1}{y(4-y)} = \frac{1/4}{y} + \frac{1/4}{4-y}$$

$$\frac{t}{1+t} = \frac{t+1-1}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$$

Επομένως

$$\frac{1}{4}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y-4} = \int dt - \int \frac{dt}{t+1} + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\ln|y| - \frac{1}{4}\ln|y-4| = t - \ln|t+1| + c_1$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y-4}\right|^{1/4} = t - \ln|t+1| + c_1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y}{y-4}\right|^{1/4} = e^{c_1} e^{t-\ln|t+1|} = \frac{e^{c_1} e^t}{|t+1|}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{y}{y-4} \right| = e^{4c_1} \frac{e^{4t}}{(t+1)^4}$$

Η συνάρτηση στο δεξιό μέλος είναι θετική $\forall t \in \mathbb{R}$ (δεν ορίζεται γιά $t=-1$) Λόγω συνέχειας της λύσης:

$$\frac{y}{y-4} = \underbrace{\pm e^{4c_1}}_{c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{e^{4t}}{(t+1)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{y-4}{y} = \frac{(t+1)^4}{c e^{4t}} \Rightarrow 1 - \frac{4}{y} = \frac{(t+1)^4}{c e^{4t}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{y} = 1 - \frac{(t+1)^4}{c e^{4t}} = \frac{c e^{4t} - (t+1)^4}{c e^{4t}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{4 c e^{4t}}{c e^{4t} - (t+1)^4} = \frac{4}{1 - \frac{1}{c} \frac{(t+1)^4}{e^{4t}}}$$

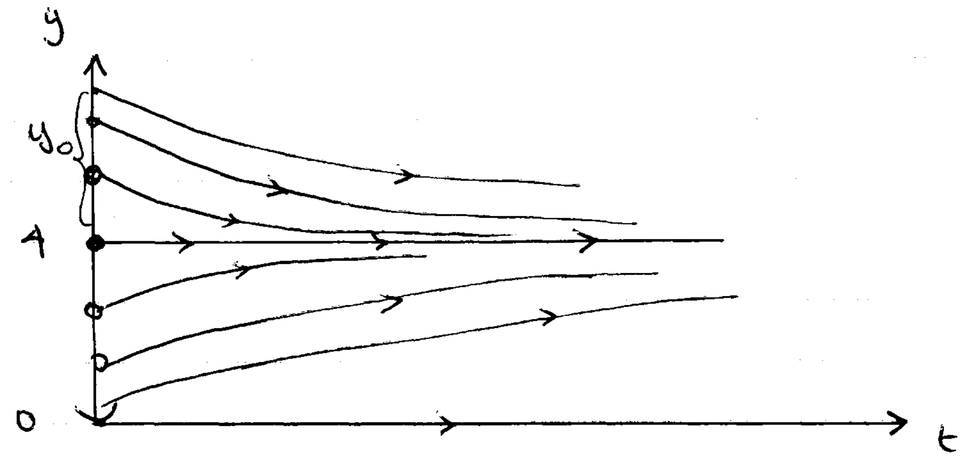
Αρχική συνθήκη:

$$\frac{y(0)}{y(0)-4} = c \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{y_0 - 4}{y_0}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{4}{1 - \left(\frac{y_0-4}{y_0}\right) \frac{(t+1)^4}{e^{4t}}}$$

Παρατηρούμε: $\lim_{t\to\infty} \frac{(t+1)^4}{e^{4t}} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = 4.$

Επίσης: $\left.\begin{array}{l} y_0 > 4 \Rightarrow y(t) > 4 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ (0 <) y_0 < 4 \Rightarrow 0 < y(t) < 4 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array}\right\}.$



<u>Παράδειγμα:</u> Έστω το Π.Α.Τ.

$$\frac{dy}{dt} + a(t)\,y(t) = 0 \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

Με διαχωρισμό των μεταβλητών

$$\frac{dy(t)}{y(t)} = -a(t)\,dt \qquad (y \neq 0)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dy(t)}{y(t)} = -\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma$$

$$\Rightarrow \Big[\ln|y(t)|\Big]_{t_0}^{t} = -\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma$$

$$\Rightarrow \ln|y(t)| - \ln|y_0| = -\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma$$

$$\Rightarrow |y(t)| = |y_0|\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma}$$

Εφόσον $\exp\left[-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma\right] > 0$ έχουμε:

$$y(t) = \pm y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma\right).$$

Γιά $t=0$: $y_0 = \pm y_0$. Η περίπτωση $y_0 = -y_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$ είναι αδύνατη (γιατί $y(t) \neq 0$ σε όλο το πεδίο ορισμού). Άρα

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)d\sigma}$$

Η περίπτωση $y_0 = 0$ ($\Rightarrow y(t) = 0 \ \forall t$) τελικά περιλαμβάνεται στον παραπάνω τύπο.

1.3 <u>Γραμμικές εξισώσεις</u> (1ης τάξης)

Της μορφής: $y'(t) = -p(t)y(t) + g(t)$, όπου $p, g \in C^0(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$.

<u>1η μέθοδος</u> (Ολοκληρωτικού παράγοντα). Η εξίσωση γράφεται

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y(t) = g(t)$$

$$\Rightarrow \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y(t) = \mu(t)g(t)$$

γιά κάθε συνάρτηση $\mu(t)$. Ερώτηση: Μπορούμε νά επιλέξουμε $\mu(t) \neq 0$ έτσι ώστε το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης νά γράφεται ως

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t) \qquad (*)$$

Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)g(t) \Rightarrow \mu(t)y(t) = \int \mu(t)g(t) + c$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \mu^{-1}(t)\left[c + \int \mu(t)\, g(t)\,dt\right].$$

Γιά νά ισχύει η (*) αρκεί:

$$\mu'(t) = \mu(t)\, p(t) \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = \mu(0)\, e^{\int p(t)\,dt}$$

Η αρχική τιμή $\mu(0)$ επιλέγεται αυθαίρετα ως 1 (ένας ολοκληρωτικός παράγων αρκεί). Επομένως:

$$y(t) = e^{-\int p(t)\,dt}\left[c + \int e^{\int p(t)\,dt}\, g(t)\,dt\right].$$

Το αντίστοιχο Π.Α.Τ είναι της μορφής:

$$y'(t) + p(t)\, y(t) = g(t) \quad , \qquad y(t_0) = y_0$$

Επομένως:

$$\big(\mu(t)\, y(t)\big)' = \mu(t)\, g(t) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \mu(t)\, y(t) - \mu(t_0)\, y_0 = \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\, g(\tau)\, d\sigma$$

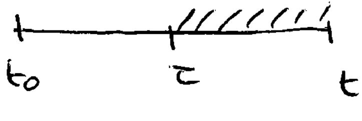
$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\mu(t_0)\, y_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau)\, g(\tau)\, d\tau\right].$$

Όμως:

$$\mu(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(\sigma)\,d\sigma} \qquad (\mu(t_0) = 1)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(\sigma)\,d\sigma}\, y_0 + e^{-\int_{t_0}^{t} p(\sigma)\,d\sigma} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{\tau} p(\sigma)\,d\sigma}\, g(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(\sigma)\,d\sigma}\, y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\left[\int_{t_0}^{t} p(\sigma)\,d\sigma + \int_{t_0}^{\tau} p(\sigma)\,d\sigma\right]}\, g(\tau)\,d\tau$$



$$\Rightarrow y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(\sigma)d\sigma} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{\tau}^{t} p(\sigma)d\sigma} g(\tau)\, d\tau$$

Στην ειδική περίπτωση που $p(t) = a$ (σταθερά).

$$\int_{t_0}^{t} p(\sigma)\, d\sigma = a(t-t_0)$$

και

$$y(t) = e^{-a(t-t_0)} y_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{-a(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau}_{e^{-at} * g(t)}$$

"συνέλιξη συναρτήσεων".

<u>2η μέθοδος</u> (μεταβολή παραμέτρων)

Δ.Ε: $y'(t) + p(t)y(t) = g(t)$.

Αρχικά θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή:

$$y'(t) + p(t)y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = c\, e^{-\int p(t)dt}$$

Για την επίλυση της μη-ομογενούς θεωρούμε ότι η σταθερά είναι συνάρτηση ~~του~~ του t ("περισσότεροι βαθμοί ελευθερίας") δηλ. δοκιμάζουμε λύση της μορφής

$$y(t) = c(t)\, e^{-\int p(t)dt}$$

$$\Rightarrow y'(t) = c'(t) e^{-\int p(t)dt} + c(t)\left(-p(t) e^{-\int p(t)dt}\right)$$

Αντικαθιστώντας στην δ.ε:

$$c'(t) e^{-\int p(t)dt} - \cancel{c(t)p(t)e^{-\int p(t)dt}} + \cancel{p(t)c(t)e^{-\int p(t)dt}} = g(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dc(t)}{dt} = e^{\int p(t)\,dt} g(t)$$

$$\Rightarrow c(t) = c_1 + \int e^{\int p(t)\,dt} g(t)\,dt$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\int p(t)\,dt}\left[c_1 + \int e^{\int p(t)\,dt} g(t)\,dt\right]$$

όπως πριν!

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί το Π.Α.Τ

$$y'(t) + \underbrace{\frac{1}{t}}_{p(t)} y(t) = \underbrace{1}_{g(t)}, \quad y(1) = 0, \; t > 0$$

Ολοκληρωτικός παράγων: $\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int \frac{dt}{t}} =$

$$= e^{\ln t} = t$$

Πολ/ντας με $\mu(t) = t$:

$$t y'(t) + y(t) = t \Rightarrow (t y(t))' = t$$

$$\Rightarrow t\, y(t) = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow y(t) = \frac{t}{2} + \frac{c}{t}$$

Αρχική συνθήκη: $y(1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

Επομένως η λύση του ΠΑΤ είναι: $y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}$ $(t > 0)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Νά βρεθεί γενικευμένη λύση (συνεχής καί κατά τμήματα διαφορίσιμη) του Π.Α.Τ:

$$y'(t) + 2y(t) = g(t), \quad y(0) = 0$$

όπου: $g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

Το Π.Α.Τ στό διάστημα $0 \le t \le 1$ είναι: $y' + 2y = 1, \quad y(0) = 0$
Η λύση είναι:

$$y(t) = e^{-2t} \cancelto{0}{y_0} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{-2t}\left[\frac{e^{2\tau}}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2} e^{-2t}\left(e^{2t} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad (0 \le t \le 1).$$

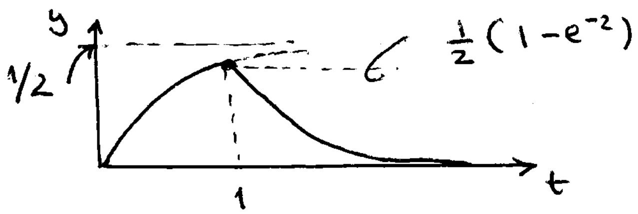
καί επομένως: $y(1) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)$. Στό διάστημα $(1, \infty)$ τό ΠΑΤ είναι:

$$y(t) = e^{-2(t-1)} y(1) + \int_1^t \cancelto{0}{e^{-2(t-\tau)}}\, 0\, d\tau$$

$$= e^{2} \cdot e^{-2t} y(1) = \frac{1}{2} e^{2}\left(1 - e^{-2}\right) e^{-2t}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2} - 1\right) e^{-2t} \qquad (t > 1).$$

Υποθέσαμε ότι $y(1) = y(1^-) = y(1^+)$ λόγω συνέχειας της λύσης.



Παράδειγμα: Νά λυθεί το Π.Α.Τ

$$y'(t) + ay = \int_0^b y(t)\,dt \quad , \quad y(0) = c$$

Θέτουμε $m := \int_0^b y(t)\,dt$. Επομένως τό Π.Α.Τ. είναι της μορφής: $y' + ay = m$, $y(0) = c$. Η λύση είναι:

$$y(t) = e^{-a(t-0)} \underbrace{y_0}_{c} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} m\,d\tau$$

$$= e^{-at} c + e^{-at} m \int_0^t e^{a\tau} d\tau$$

$$= e^{-at} c + m e^{-at} \left[\frac{e^{a\tau}}{a} \right]_0^t$$

$$= e^{-at} c + \frac{m}{a} e^{-at} \left(e^{at} - 1 \right)$$

$$= e^{-at} c + \frac{m}{a} \left(1 - e^{-at} \right)$$

$$= \frac{m}{a} + \left(c - \frac{m}{a} \right) e^{-at}$$

Συνεπώς: $$m =: \int_0^b \left(\frac{m}{a} + \left(c - \frac{m}{a} \right) e^{-at} \right) dt$$

$$\Rightarrow m = \frac{mb}{a} + \left(c - \frac{m}{a} \right) \left[\frac{e^{-at}}{a} \right]_b^0 =$$

$$\Rightarrow m = \frac{mb}{a} + \left(\frac{c}{a} - \frac{m}{a^2} \right) \left(1 - e^{-ab} \right)$$

$$\Rightarrow m \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{1 - e^{-ab}}{a^2} \right) = \frac{c(1 - e^{-ab})}{a}$$

$$\Rightarrow m \left(a^2 - ab + (1 - e^{-ab}) \right) = ac(1 - e^{-ab})$$

$$\Rightarrow m = \frac{ac(1 - e^{-ab})}{a^2 - ab + (1 - e^{-ab})}$$

1.4 <u>Παράδειγμα</u>

Θεωρούμε την δ.ε: $y' + a(t)y = 0$, $a(t) \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$.
Η λύση $\varphi(t) = 0$ $\forall t \in I$ ονομάζεται "τετριμμένη λύση".

(α) Έστω ότι $\varphi(t)$ είναι λύση της δ.ε στο I και $\varphi(t_0) = 0$, $t_0 \in I$. Τότε $\varphi(t)$ είναι η τετριμμένη λύση

(β) Αν $\varphi(t)$ και $\psi(t)$ δύο λύσεις τέτοιες ώστε $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ $t_0 \in I$, τότε $\varphi(t) = \psi(t)$ $\forall t \in I$

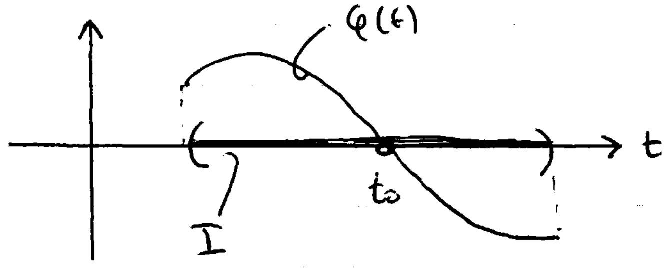
(γ) Αν $\varphi(t)$ μη τετριμμένη λύση και ψ τυχούσα λύση τότε $\exists C \in \mathbb{R} : \psi(t) = C\varphi(t)$ $\forall t \in I$ (δηλ. ο χώρος λύσεων είναι μονοδιάστατος.

(α) Η λύση του Π.Α.Τ: $y' + a(t)y = 0$, $y(t_0) = y_0$ είναι:

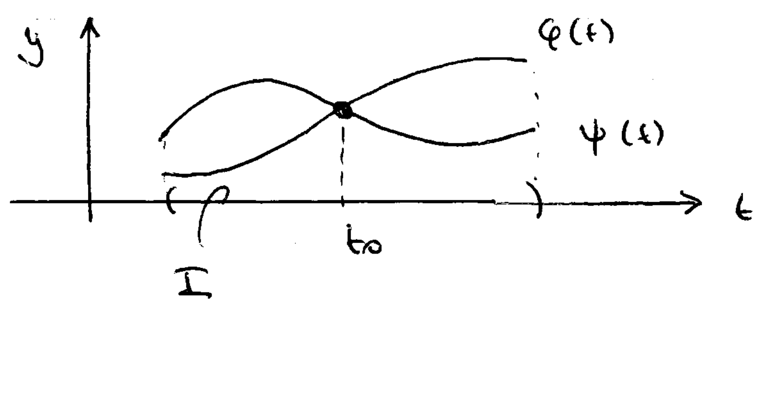
$$y(t) = y(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\, d\sigma}$$

Συνεπώς αν $\varphi(t)$ λύση με $\varphi(t_0) = 0$, $t \in I$, τότε $\varphi(t) = 0$ $\forall t \in I$.

$\varphi(t_0) = 0 \Rightarrow \varphi(t) \equiv 0$ $\forall t \in I$



(β) Αν $\varphi(t)$ και $\psi(t)$ είναι λύσεις της δ.ε με $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$, $t_0 \in I$, τότε $z = \varphi - \psi$ είναι επίσης λύση και $z(t_0) = 0$
Από το (α), $z(t) = 0$ $\forall t \in I \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t)$ $\forall t \in I$



$\varphi(t_0) = \psi(t_0) \Rightarrow$
$\varphi(t) = \psi(t)$
$\forall t \in I$.

(γ) Αν $\varphi(t)$ μή τετριμμένη λύση, τότε $\varphi(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$. (λόγω (α)). Εστω $\psi(t)$ τυχούσα λύση. Ορίζουμε

$$z(t) = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \quad t \in I$$

$$\Rightarrow \quad z'(t) = \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{\psi'(t)\varphi(t) - \psi(t)\varphi'(t)}{\varphi^2(t)}$$

Από τήν δ.ε : $\psi'(t) = -a(t)\psi(t)$ καί $\varphi'(t) = -a(t)\varphi(t)$

Επομένως :

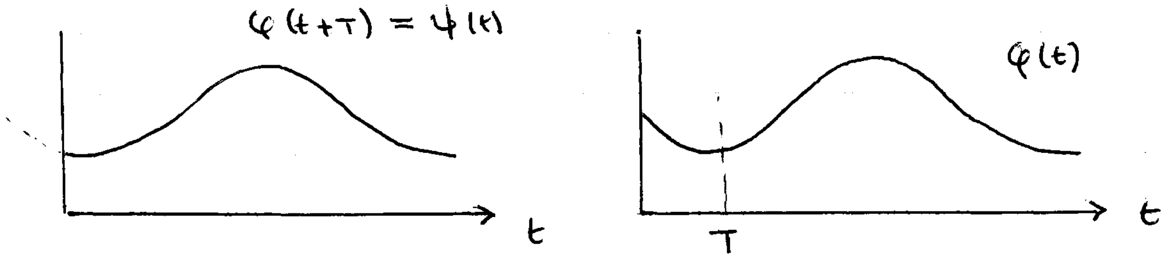
$$z'(t) = \frac{-a(t)\cancel{\psi(t)\varphi(t)} + \psi(t)\cancel{a(t)\varphi(t)}}{\varphi^2(t)} = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = c \cdot \varphi(t), \quad t \in I.$$

<u>Παράδειγμα (T-περιοδικές λύσεις)</u>

Θεωρούμε τήν δ.ε. $y' + a(t)y = 0$, $a(t) \in C(\mathbb{R})$ καί $a(t+T) = a(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(α) Εστω $\varphi(t)$ μή τετριμμένη λύση (στό $\mathbb{R}$) καί $\psi(t) = \varphi(t+T)$. Τότε η $\psi(t)$ είναι επίσης λύση.



(β) $\exists\, c \in \mathbb{R}$ (ανεξάρτητο της φ) : $\varphi(t+T) = c\,\varphi(t)$

(γ) Νά βρεθεί ικανή καί αναγκαία συνθήκη ώστε νά υπάρχει T-περιοδική μή τετριμμένη λύση.

(α) Έστω $\varphi(t)$ λύση : $\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \varphi'(t+T) + a(t+T)\varphi(t+T) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varphi'(t+T) + a(t)\varphi(t+T) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

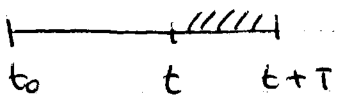
$\Rightarrow \psi(t) := \varphi(t+T)$ επίσης λύση.

(β) Η λύση της δ.ε. με $\varphi(t_0) = \varphi_0$ είναι :

$$\varphi(t) = \varphi_0 \, e^{-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma}$$

$$\Rightarrow \varphi(t+T) = \varphi_0 \, e^{-\int_{t_0}^{t+T} a(\sigma)\,d\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(t+T)}{\varphi(t)} = \frac{\exp\left(-\int_{t_0}^{t+T} a(\sigma)\,d\sigma\right)}{\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma\right)}$$



$$= \exp\left(-\int_{t_0}^{t+T} a(\sigma)\,d\sigma + \int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma\right)$$

$$= \exp\left(-\int_{t}^{t+T} a(\sigma)\,d\sigma\right)$$

$$= \exp\left(-\int_{0}^{T} a(\sigma)\,d\sigma\right) := c \in \mathbb{R}.$$

(γ) Από την (β), $\varphi(t) = \varphi(t+T) \ \forall t \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $c = 1 \Leftrightarrow \int_0^T a(\sigma)\,d\sigma = 0$.

1.5 **Εξίσωση Bernoulli:**

Εξίσωση της μορφής : $y' + a(t)y = b(t)y^r$, όπου $a(t), b(t) \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$.

- Αν $r=0$ ή $r=1$ η εξίσωση είναι γραμμική

- Αν $r>0$ η $y(t)=0$, $t\in I$, είναι λύση της εξίσωσης.

- Έστω ότι $r\neq 0, r\neq 1$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό :

$$u(t) = y^{1-r}(t) \Rightarrow u'(t) = (1-r)\, y^{-r}(t)\, y'(t)$$

Πολλαπλασιάζοντας την δ.ε. με $(1-r)y^{-r}$:

$$\underbrace{(1-r)y^{-r}y'}_{u'} + (1-r)a(t)\underbrace{y^{1-r}}_{u} = (1-r)\, b(t)$$

$$\Rightarrow u'(t) + (1-r)\, a(t)\, u(t) = (1-r)\, b(t)$$

που είναι γραμμική εξίσωση.

<u>Παράδειγμα</u> : Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$t\frac{dy}{dt} + 6y = 3t\, y^{4/3}$$

Για $t\neq 0$ η δ.ε. γράφεται :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{6}{t}y = 3y^{4/3}$$

(Εξίσωση Bernoulli με $r=\frac{4}{3} \Rightarrow 1-r = 1-\frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$).

Ορίζουμε: $u(t) = y^{-1/3} \Rightarrow u'(t) = -\frac{1}{3} y^{-\frac{4}{3}} y'(t)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} y^{-4/3} y' + \left(-\frac{1}{3} y^{-4/3}\right) 6t^{-1} y = \left(-\frac{1}{3} y^{-4/3}\right) 3 y^{4/3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{3} y^{-4/3} y'}_{u'} - 2t^{-1} \underbrace{y^{-1/3}}_{u} = -1$$

$$\Rightarrow u' \underbrace{-2t^{-1}}_{p(t)} u(t) = \underbrace{-1}_{g(t)} \qquad \text{(γραμμική)}$$

Ορίζουμε: $\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int -2t^{-1}\,dt} = e^{-2\ln|t|}$

$$= \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow t^{-2} u'(t) - 2t^{-3} u(t) = -t^{-2}$$

$$\Rightarrow \left(t^{-2} u(t)\right)' = -t^{-2} \Rightarrow t^{-2} u(t) = -\int \frac{dt}{t^2} + c$$

$$\Rightarrow t^{-2} u(t) = t^{-1} + c \Rightarrow u(t) = t^2 (t^{-1} + c)$$

$$\Rightarrow u(t) = ct^2 + t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{(ct^2 + t)^3} \qquad t > 0 \text{ ή } t < 0$$

Εξίσωση Riccati

Μη-γραμμική εξίσωση της μορφής:

$$y'(t) + p(t)\,y(t) + q(t)\,y^2(t) = f(t)$$

$p, q, f \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Έστω ότι μια ειδική λύση της εξίσωσης $y_1(t)$ είναι γνωστή. Με αλλαγή μεταβλητής:

$$y(t) = y_1(t) + u(t)$$

η εξίσωση μετασχηματίζεται σε εξίσωση Bernoulli ως προς $u(t)$: Με αντικατάσταση:

$$y_1' + u' + p(y_1+u) + q(y_1+u)^2 = f$$

$$\Rightarrow \cancel{y_1'} + u' + p(\cancel{y_1}+u) + q(\cancel{y_1^2} + 2y_1u + u^2) = \cancel{f}$$

$$\Rightarrow u'(t) + p(t)u(t) + 2q(t)y_1(t)u(t) + q(t)u^2(t) = 0$$

αφού η $y_1(t)$ είναι λύση. Επομένως:

$$u'(t) + [\underbrace{p(t) + 2q(t)y_1(t)}_{a(t)}]u(t) = -b(t)u^2$$

(εξίσωση Bernoulli με $r=2$).

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y' + \underbrace{2t}_{p}y - \underbrace{y^2}_{q=-1} = \underbrace{1+t^2}_{f(t)}$$

Η εξίσωση γράφεται $y' = 1+t^2 - 2ty + y^2$

$$\Rightarrow y' = 1 + (t-y)^2$$

και επομένως η $y(t) = t$ είναι λύση. Ορίζουμε:

$$y(t) = t + u(t)$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\cancel{1} + u'(t) + 2t(t+u(t)) - (t+u(t))^2 = \cancel{1} + t^2$$

$$\Rightarrow u'(t) + \cancel{2t^2} + \cancel{2tu(t)} - \cancel{t^2} - \cancel{2tu(t)} - u^2(t) = \cancel{t^2}$$

$$\Rightarrow u'(t) = u^2(t) \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int dt + c$$

$$\Rightarrow -u^{-1} = t + c \Rightarrow u(t) = -\frac{1}{t+c}$$

$$\Rightarrow y(t) = t - \frac{1}{t+c}$$ είναι η γενική λύση.

1.6 Εξισώσεις ομογενείς / αναγόμενες σε ομογενείς

Εξισώσεις της μορφής: $y'(t) = f(at+by)$, $a, b \in \mathbb{R}$
Μὲ τὸν μετασχηματισμό: $z = at + by$:

$$z'(t) = a + by'(t) = a + bf(z) \Rightarrow \frac{dz}{a+bf(z)} = dt$$

(χωριζόμενων μεταβλητών).

Παράδειγμα: Νά βρεθεί η γενική λύση της δ.ε. $y' = 2t + y$.
Θέτουμε $z = 2t + y \Rightarrow z' = 2 + y' = 2 + z$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z+2} = \int dt + c_1 \Rightarrow \ln|z+2| = t + c_1$$

$$\Rightarrow |z+2| = e^{c_1+t} = e^{c_1} \cdot e^t \Rightarrow z + 2 = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{c} e^t$$

$$\Rightarrow z = ce^t - 2 \quad (c \in \mathbb{R}) \Rightarrow y(t) = ce^t - 2t - 2.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t-y} + 1$$

Θέτουμε:

$$z = t - y \Rightarrow z' = 1 - y' = \cancel{1} - \frac{1}{z} - \cancel{1}$$

$$\Rightarrow \int z\,dz = -\int dt + c_1 \Rightarrow \frac{z^2}{2} = -t + c_1$$

$$\Rightarrow z^2 = \underbrace{2c_1}_{c} - 2t = (t-y)^2 \Rightarrow (y-t)^2 = c - 2t.$$

Ομογενείς εξισώσεις

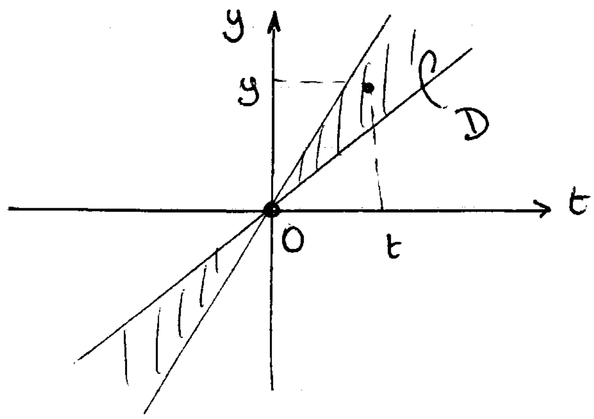
Έστω διαφορική εξίσωση 1ης τάξης της μορφής:

$$y' = f(t,y) \quad \text{όπου} \quad f(t,y) = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}, \quad N(t,y) \neq 0$$

Η εξίσωση γράφεται στη διαφορική μορφή:

$$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$$

Ορισμός: Μια συνεχής συνάρτηση $f(t,y)$, $(t,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ ονομάζεται ομογενής βαθμού n ως προς t και y, αν $\forall (t,y) \in D$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $(\lambda t, \lambda y) \in D$ και $f(\lambda t, \lambda y) = \lambda^n f(t,y)$.



Παράδειγμα: $f(t,y) = t^2 + 3ty + y^2$

$$f(\lambda t, \lambda y) = (\lambda t)^2 + 3(\lambda t)(\lambda y) + (\lambda y)^2$$
$$= \lambda^2 (t^2 + 3ty + y^2)$$
$$= \lambda^2 f(t,y)$$

(ομογενής βαθμού $n=2$)

Θεώρημα: Αν οι συντελεστές $M(t,y)$ και $N(t,y)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού, τότε η διαφορική εξίσωση $M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$ ανάγεται σε εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών μέσω του μετασχηματισμού: $v = y/t$.

Απόδειξη: Έστω M και N ομογενείς συναρτήσεις βαθμού k. Τότε:

$$M(t,y) = M(t,vt) = t^k M(1,v)$$

$$N(t,y) = N(t,vt) = t^k N(1,v)$$

$$y = vt \Rightarrow \frac{dy}{dt} = v + t\frac{dv}{dt} = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)} = -\frac{\cancel{t^k} M(1,v)}{\cancel{t^k} N(1,v)}$$

$$= -f(1,v)$$

$$\Rightarrow v + f(1,v) = -t\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v+f(1,v)} = -\frac{dt}{t}$$

που είναι εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

Παράδειγμα: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y'(t) = \frac{t+y}{t-y}$$

Οι συναρτήσεις $t+y$, $t-y$ είναι ομογενείς $1^{ου}$ βαθμού, άρα κάνουμε τον μετασχηματισμό $y = tv$

$$\frac{t+y}{t-y} = \frac{t+tv}{t-tv} = \frac{1+v}{1-v} \qquad (t \neq 0)$$

Άρα:

$$y = vt \Rightarrow y' = v + t\frac{dv}{dt} = \frac{1+v}{1-v} \Rightarrow t\frac{dv}{dt} = \frac{1+v}{1-v} - v$$

$$\Rightarrow t\frac{dv}{dt} = \frac{1+\cancel{v}-\cancel{v}+v^2}{1-v} \Rightarrow \int \frac{(1-v)\,dv}{1+v^2} = \int \frac{dt}{t} + c_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{1+v^2} - \frac{1}{2}\int \frac{2v\,dv}{1+v^2} = \int \frac{dt}{t} + c_1$$

$$\Rightarrow \arctan(v) - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln|t| + c_1$$

$$\Rightarrow 2\arctan\left(\frac{y}{t}\right) - \ln\left(1+\frac{y^2}{t^2}\right) = \ln(t^2) + \underbrace{2c_1}_{c}$$

$$\Rightarrow 2\arctan\left(\frac{y}{t}\right) = \ln(y^2+t^2) + c$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y^2\,dt - t(t+y)\,dy = 0$$

Οι συναρτήσεις y^2 και $t(t+y)$ είναι ομογενείς βαθμού $n=2$ ως προς t και y. Επομένως αν ~~v=t/y~~ $y = vt$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{t(t+y)} = \frac{v^2t^2}{t(t+vt)} = \frac{v^2}{1+v} \qquad (t\neq 0)$$

$$\Rightarrow v + t\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{1+v} \Rightarrow t\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{1+v} - v = \frac{\cancel{v^2}-v-\cancel{v^2}}{1+v}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1+v}{v}\right)dv = -\int\frac{dt}{t} + c_1 \Rightarrow \ln|v| + v = -\ln|t| + c_1$$

$$\Rightarrow \ln|tv| = c_1 - v \Rightarrow |tv| = e^{c_1}e^{-v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tv = ce^{-v} \Rightarrow \cancel{t}\frac{y}{\cancel{t}} = ce^{-y/t} \Rightarrow y = ce^{-y/t}$$

$$(c\in\mathbb{R})$$

Εξισώσεις πού ανάγονται σέ ομογενείς

Εξισώσεις της μορφής :

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right)$$

όπου $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ ανάγονται σέ ομογενείς μέσω μετασχηματισμού μεταφοράς της αρχής των συντεταγμένων στό σημείο τομής των ευθειών $a_1 t + b_1 y + c_1 = 0$ καί $a_2 t + b_2 y + c_2 = 0$.

(α) Αν $c_1 = c_2 = 0$ (ευθείες τέμνονται στό σημείο αρχής των αξόνων) η εξίσωση είναι της μορφής

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y}{a_2 t + b_2 y}\right)$$

καί η $f(\cdot)$ είναι ομογενής βαθμού $n=0$.

(β) Στή γενική περίπτωση $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ καί $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ (ευθείες δέν είναι παράλληλες καί τέμνονται σέ σημείο πού δέν ταυτίζεται μέ την αρχή των αξόνων). Εστω (t_1, y_1) η μοναδική λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} a_1 t + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 t + b_2 y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Ορίζουμε: $T = t - t_1$, $Y = y - y_1$. Τότε

$$\frac{dY}{dT} = \frac{dy}{dt} = f\left(\frac{a_1(T + \cancel{t_1}) + b_1(Y + \cancel{y_1}) + \cancel{c_1}}{a_2(T + \cancel{t_1}) + b_2(Y + \cancel{y_1}) + \cancel{c_2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dY}{dT} = f\left(\frac{a_1T + b_1Y}{a_2T + b_2Y}\right)$$

Πού είναι ομογενής εξίσωση βαθμού 0.

Στην περίπτωση πού η ευθείες είναι παράλληλες η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται. Στην περίπτωση όμως αυτή:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

και η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1y + c_1}{k(a_1t + b_1y) + c_2}\right) := F(a_1t + b_1y)$$

Πού ανάγεται σε εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών μέσω του μετασχηματισμού $z := a_1t + b_1y$.

<u>Παράδειγμα</u>: Νά λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t-y+1}{t+y-3}$$

Λύνουμε τό σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} t-y+1 &= 0 \\ t+y-3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2t-2 &= 0 \\ 2y-4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} t_0 &= 1 \\ y_0 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

και ορίζουμε τόν μετασχηματισμό: $T = t-1$, $Y = y-2$

Επομένως:

$$\frac{dY}{dT} = \frac{T+1-(Y+2)+1}{T+1+(Y+2)-3} = \frac{T-Y}{T+Y}$$

Θέτουμε $v = Y/T \Rightarrow Y = T\,v(T)$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dT} = v + \frac{dv}{dT}T = \frac{1-v}{1+v} \Rightarrow T\frac{dv}{dT} = \frac{1-v}{1+v} - v$$

$$\Rightarrow T\frac{dv}{dT} = \frac{1-v-v-v^2}{1+v} = \frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+v)\,dv}{1-2v-v^2} = \frac{dT}{T} \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{-2(1+v)}{1-v^2-2v}\,dv = +\int\frac{dT}{T} + c_1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|1-2v-v^2| = +\ln|T| + c_1$$

$$\Rightarrow -\ln|1-2v-v^2| = +2\ln|T| + 2c_1$$

$$\Rightarrow \ln|T^2(1-2v-v^2)| = -2c_1$$

$$\Rightarrow |T^2(1-2v-v^2)| = e^{-2c_1} = c_2 \qquad (c_2>0)$$

$$\Rightarrow T^2(1-2v-v^2) = \pm c_2 = c \qquad (c\in\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow T^2(1-2v-v^2) = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2\left(1-\frac{2Y}{T}-\frac{Y^2}{T^2}\right) = c \Rightarrow T^2-2YT-Y^2 = c$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 - 2(y-2)(t-1) - (y-2)^2 = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-2t+1-2(yt-y-2t+2)-(y^2-4y+4) = c$$

$$\Rightarrow t^2-2ty-y^2+6y+2t = c+7 =: c' \qquad (c'\in\mathbb{R})$$

1.7 Εξισώσεις 2ης τάξης (πού ανάγονται σέ εξισώσεις 1ης τάξης)

Οι εξισώσεις της μορφής: $y'' = h(y, y')$ εμφανίζονται συχνά στην Φυσική (y'' επιτάχυνση αντικειμένου που κινείται σέ μονοδιάστατο ~~μέσο~~ ελαστικό μέσο μέ τριβή). Η εξίσωση είναι αυτόνομη, δηλ η συνάρτηση h δέν εξαρτάται απότην μεταβλητή t. Μέ τόν μετασχηματισμό:

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}v$$

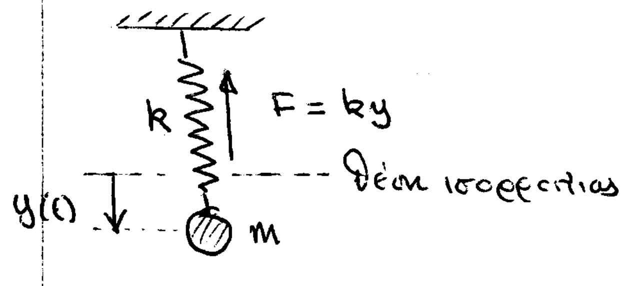
καί επομένως:

$$v\frac{dv}{dy} = h(y, v) \qquad \text{(εξίσωση 1ης τάξης)}$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η y καί η εξαρτημένη μεταβλητή η v, δηλ $v = v(y)$. Η αλλαγή ~~του~~ μεταβλητών προυποθέτει ότι μπορούμε νά αντιστρέψουμε την συνάρτηση $t \to y(t)$. Αυτό είναι δυνατόν σέ περιοχή οπου $y'(t) \neq 0$. Από τήν λύση της εξίσωσης $v(y)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε την $y(t)$ από τήν

$$\frac{dy}{dt} = v(y) \qquad \text{(εξίσωση 1ης τάξης, χωριζόμενων μεταβλητών).}$$

Παράδειγμα: Γραμμικός αρμονικός ταλαντωτής



$y > 0$ (επιμήκυνση)

$y < 0$ (συρρίκνωση)

σταθερά ελαστικότητας = k

Από τόν νόμο του Νεύτωνα

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} y(t) = 0$$

Μέ τόν μετασχηματισμό $v = y'(t)$

$$m v \frac{dv}{dy} = -ky \Rightarrow m v\, dv = -ky\, dy$$

Ολοκληρώνοντας:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{K.E.} + \underbrace{\frac{1}{2} k y^2}_{\Delta E.} = E_0 \quad (\text{σταθερά})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = E_0 - \frac{1}{2} k y^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m} y^2$$

$$\Rightarrow v(y) = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m} y^2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\underbrace{\frac{2E_0}{k}}_{\alpha^2} - y^2}$$

Επομένως:

$$\frac{dy}{dt} = v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\alpha^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\, dt$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{y(t)}{\alpha}\right) = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi$$

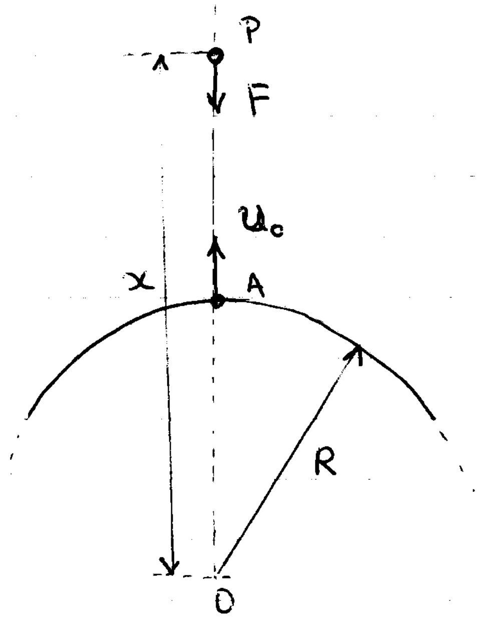
$$\Rightarrow y(t) = \alpha \sin\left(\pm \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi\right)$$

Γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$

$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ (συχνότητα ταλάντωσης)

$= 1/T$

<u>Παράδειγμα</u>: Εκτόξευση σώματος



Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα υ_0. Αν τη χρονική στιγμή t τό σώμα βρίσκεται στη θέση P στην οποία η απόσταση από τό κέντρο της γης είναι x, η δύναμη που ασκείται στό σώμα είναι

$$F = F(x) = \frac{m g R^2}{x^2}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης. Από τον νόμο του Νεύτωνα:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -F = -\frac{m g R^2}{x^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g R^2}{x^2}$$

Αντικαθιστούμε: $\quad \upsilon = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\upsilon$

$$\Rightarrow \upsilon \frac{d\upsilon}{dx} = -g R^2 \frac{1}{x^2} \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon \, d\upsilon = -g R^2 \int_R^x \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon^2 - \frac{1}{2}\upsilon_0^2 = g R^2 \left[\frac{1}{x}\right]_R^x = g R^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \; v^2 = v_0^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right) = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x}$$

$$\Rightarrow \; v(x) = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x}}$$

(Θετικό πρόσημο γιά άνοδο του σώματος, αρνητικό γιά κάθοδο)
Η "ταχύτητα διαφυγής" προκύπτει παίρνοντας το όριο

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - 2gR + \lim_{x\to\infty}\frac{2gR^2}{x}} = \sqrt{v_0^2 - 2gR}$$

και θέτοντας $v_\infty = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR}$.

1.8 Ακριβείς Εξισώσεις

Έστω η διαφορική εξίσωση: $y' = f(t,y)$, $(t,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$
Αν

$$f(t,y) = -\frac{M(t,y)}{N(t,y)}, \qquad N(t,y) \neq 0$$

η εξίσωση γράφεται

$$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$$

Είναι γνωστό ότι αν συνάρτηση $F(t,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε υπάρχει το (ολικό) διαφορικό της F:

$$dF(t,y) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

<u>Ορισμός</u>: Η διαφορική μορφή $M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy$, όπου M και N είναι συναρτήσεις ορισμένες σε ένα τόπο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ και συνεχείς στο D, ονομάζεται ακριβής, αν υπάρχει $F(t,y)$ ορισμένη στον D με συνεχείς μερικές παραγώγους τέτοια ώστε:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M \quad \text{καί} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

Τότε έχουμε:

$$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = \frac{\partial F}{\partial t}\,dt + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = dF(t,y)$$

Επομένως, αν η δ.ε. είναι ακριβής, τότε γράφεται ως

$$dF(t,y) = 0 \Rightarrow F(t,y) = c$$

είναι η λύση της οπου $c \in \mathbb{R}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Νά λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\underbrace{(2ty + ye^t)}_{M(t,y)}\,dt + \underbrace{(t^2 + e^t)}_{N(t,y)}\,dy = 0$$

Η δ.ε. είναι ακριβής γιατί υπάρχει συνάρτηση

$$F(t,y) = t^2 y + ye^t$$

τέτοια ωστε:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2ty + ye^t = M(t,y), \quad \text{καί}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = t^2 + e^t = N(t,y)$$

Συνεπώς η λύση της είναι:

$$F(t,y) = t^2 y + ye^t = c \Rightarrow y(t) = \frac{c}{t^2 + e^t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Πότε η διαφορική μορφή $Mdt+Ndy$ είναι ακριβής; Αν είναι πώς υπολογίζουμε την $F(t,y)$;

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $M(t,y)$, $N(t,y)$ συνεχείς με συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς t και y στο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (απλά συνεκτικό). Τότε υπάρχει $F(t,y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M \quad \text{καί} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

αν καί μόνο αν

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

<u>Απόδειξη</u>: ($\Rightarrow$). Έστω ότι υπάρχει $F(t,y)$ με $F_t = M$ καί $F_y = N$. Τότε

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial t}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{καί} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων (Θεώρημα Clairaut)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

($\Leftarrow$). Έστω ότι ισχύει: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$. Θά δείξουμε ότι υπάρχει $F(t,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M \quad \text{καί} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

Αναζητούμε αρχικά την $F(t,y)$ σαν λύση της $F_t = M$:
Με ολοκλήρωση ως προς t:

$$F(t,y) = \int M\,dt + h(y)$$

Παραγωγίζοντας ως πρός y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dt + h'(y) = \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt + h'(y)$$

λόγω συνέχειας της M. Από την απαίτηση $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ έχουμε:

$$\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt + h'(y) = N$$

$$\Rightarrow \quad h'(y) = N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt \qquad (*)$$

Εφόσον η $h'(y)$ είναι συνάρτηση μόνο της y, τό ίδιο συμβαίνει μέ τό δεξιό μέλος, δηλ.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

Ολοκληρώνοντας τήν (*) ως πρός την y έχουμε:

$$h(y) = \int \left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt\right] dy$$

$$\Rightarrow \quad F(t,y) = \int M\,dt + \int\left[N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dt\right] dy$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(3y + e^t) + (3t + \cos y)\frac{dy}{dt} = 0$$

Η εξίσωση γράφεται:

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 3t^2 - 3ty^2 + h'(y) = 4y + 3t^2 - 3ty^2$$

$$\Rightarrow h'(y) = 4y \Rightarrow h(y) = 2y^2 + c_1 \qquad (c_1 \in \mathbb{R})$$

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι:

$$F(t,y) = 3t^2 y - ty^3 + 2y^2 = c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά βρεθούν όλες οι διαφορίσιμες συναρτήσεις f μέ $f(0) = -2$ γιά τίς οποίες η εξίσωση

$$1 + y^2 \sin t + f(t) y y' = 0$$

είναι ακριβής. Στή συνέχεια νά λυθεί η δ.ε.

Η εξίσωση γράφεται:

$$\underbrace{(1 + y^2 \sin t)}_{M(t,y)} dt + \underbrace{f(t) y}_{N(t,y)} dy = 0$$

Η εξίσωση είναι ακριβής αν καί μόνο αν:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow 2y \sin t = f'(t) y$$

$$\Leftrightarrow f'(t) = 2 \sin t \qquad (y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow f(t) = -2\cos t + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Επειδή $f(0) = -2$ έχουμε $f(0) = -2 = -2 + c \Rightarrow c = 0$ καί $f(t) = -2\cos t$. Η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\underbrace{(3y+e^t)}_{M(t,y)}\,dt + \underbrace{(3t+\cos y)}_{N(t,y)}\,dy = 0$$

Έχουμε: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3 = \dfrac{\partial N}{\partial t} = 3$, άρα η εξίσωση είναι ακριβής. Άρα $\exists\, F(t,y)$:

$$(*)\quad \frac{\partial F}{\partial t} = 3y + e^t \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3t + \cos y \quad (**)$$

Ολοκληρώνοντας την (*) ως προς t:

$$F(t,y) = 3ty + e^t + h(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 3t + h'(y) \overset{(**)}{=} 3t + \cos y$$

$$\Rightarrow h'(y) = \cos y \Rightarrow h(y) = \sin y + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

και η λύση της εξίσωσης είναι

$$F(t,y) = 3ty + e^t + \sin y = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\underbrace{(6ty - y^3)}_{M(t,y)}\,dt + \underbrace{(4y + 3t^2 - 3ty^2)}_{N(t,y)}\,dy = 0$$

Έχουμε: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 6t - 3y^2 = \dfrac{\partial N}{\partial t} = 6t - 3y^2$ και επομένως η εξίσωση είναι ακριβής. Άρα υπάρχει $F(t,y)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 6ty - y^3 \Rightarrow F(t,y) = 3t^2y - ty^3 + h(y)$$

$$\underbrace{(1+y^2\sin t)}_{M(t,y)}\,dt + \underbrace{(-2\cos t\cdot y)}_{N(t,y)}\,dy = 0$$

και υπάρχει $F(t,y)$: $F_t = M$ και $F_y = N$. Ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς t:

$$F(t,y) = t - y^2\cos \cancel{y}\,t + h(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(t,y) = -2y\cos t + h'(y) = -2y\cos t$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1 \quad , c_1\in\mathbb{R}.$$ Επομένως:

$$\cancel{y(t)=} \quad F(t,y) = t - y^2\cos t = c$$

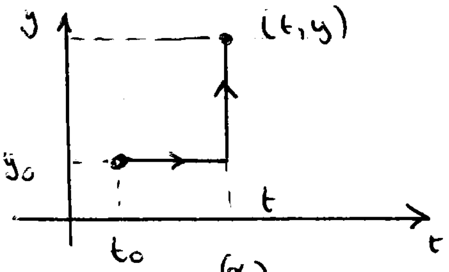
είναι η λύση της εξίσωσης.

$2^{ος}$ τρόπος υπολογισμού της $F(t,y)$

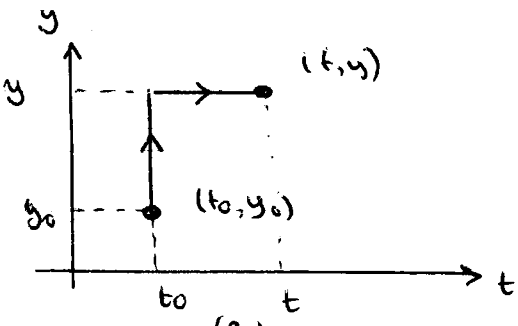
Η $F(t,y)$ μπορεί να υπολογισθεί από το ολικό διαφορικό της παίρνοντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μεταξύ ενός σταθερού σημείου (t_0,y_0) και ενός μεταβλητού σημείου (t,y) πάνω σε οποιοδήποτε δρόμο:

$$F(t,y) = \int_{(t_0,y_0)}^{(t,y)} M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy$$

Για ευκολία ο δρόμος ολοκλήρωσης ορίζεται ως πολυγωνική γραμμή με ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα με τους άξονες συντεταγμένων:



(α)



(β)

Γιά τόν δρόμο στό σχήμα (α):

$$F(t,y) = \int_{(t_0,y_0)}^{(t,y_0)} M\,dt + \int_{(t,y_0)}^{(t,y)} N\,dy$$

Γιά τόν δρόμο στό σχήμα (β):

$$F(t,y) = \int_{(t_0,y_0)}^{(t_0,y)} N\,dy + \int_{(t_0,y)}^{(t,y)} M\,dt$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά λυθεί (καί μέ τίς δύο μεθόδους) η εξίσωση

$$\underbrace{(t+y+1)}_{M(t,y)}\,dt + \underbrace{(t-y^2+3)}_{N(t,y)}\,dy = 0$$

<u>1η μέθοδος</u>. $M_y = 1 = N_t \Rightarrow \exists F(t,y) : F_t = M \ \& \ F_y = N$

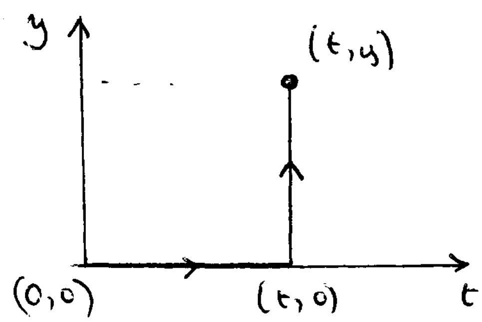
$$F_t = M \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = t + y + 1 \Rightarrow F(t,y) = \frac{1}{2}t^2 + yt + t + h(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = t + h'(y) = t - y^2 + 3 \Rightarrow h'(y) = -y^2 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(y) = -\frac{1}{3}y^3 + 3y + c'$$ καί επομένως η λύση της δ.ε.

είναι: $F(t,y) = \frac{1}{2}t^2 + yt + t - \frac{1}{3}y^3 + 3y = c \quad (c \in \mathbb{R})$

<u>2η μέθοδος</u>: Επιλέγοντας τόν δρόμο:



$$F(t,y) = \int_{(0,0)}^{(t,y)} (M\,dt + N\,dy)$$
$$= \int_{(0,0)}^{(t,0)} M\,dt + \int_{(t,0)}^{(t,y)} N\,dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(t,0)} (t+y+1)\,dt + \int_{(t,0)}^{(t,y)} (t-y^2+3)\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + yt + t\right]_{(0,0)}^{(t,0)} + \left[ty - \frac{y^3}{3} + 3y\right]_{(t,0)}^{(t,y)}$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) - 0 + \left(ty - \frac{y^3}{3} + 3y\right) - 0$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + ty + t - \frac{1}{3}y^3 + 3y = c.$$

<u>Παρατήρηση</u>:

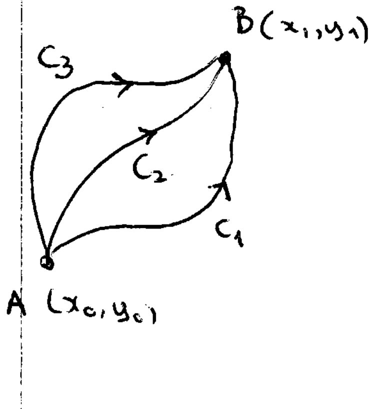
Έστω ακριβής διαφορική μορφή:

$$dE(x,y) = F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy$$

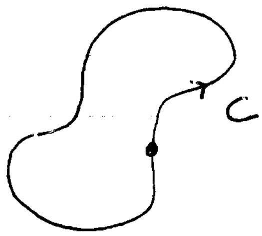
$$= \underline{F}(x,y)\cdot d\underline{r}$$

όπου $\underline{F}(x,y) = F_x(x,y)\,\underline{i} + F_y(x,y)\,\underline{j}$ καί $d\underline{r} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j}$.
Τότε, τό ολοκλήρωμα δρόμου ανάμεσα σέ δύο σταθερά σημεία $A(x_0,y_0)$ καί $B(x_1,y_1)$ είναι ανεξάρτητο από τήν καμπύλη πού ενώνει τά δύο σημεία, δηλ:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \underline{F}(x,y)\cdot d\underline{r} = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} F_x\,dx + F_y\,dy = E(x_1,y_1) - E(x_0,y_0)$$



καί εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες των δύο σημείων. Αν $\underline{F} = F_x\,\underline{i} + F_y\,\underline{j}$ είναι πεδίο δύναμης, τότε τό ολοκλήρωμα δρόμου είναι τό έργο πού παράγεται από τήν μεταφορά υλικού σημείου από το σημείο A στο σημείο B. Εφόσον το παραγόμενο έργο είναι ανεξάρτητο της καμπύλης που ενώνει τα δύο σημεία, το πεδίο είναι <u>συντηρητικό</u>. Ισοδύναμα, το ολοκλήρωμα δρόμου για κλειστές καμπύλες είναι μηδέν.



$$\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$$

<u>Ολοκληρωτικοί παράγοντες.</u>

<u>Εισαγωγικό παράδειγμα</u>. Έστω η διαφορική εξίσωση.

$$\underbrace{y}_{M}\,dt + \underbrace{(t^2 y - t)}_{N}\,dy = 0$$

Έχουμε $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \dfrac{\partial N}{\partial t} = 2ty - 1$ και επομένως η εξίσωση δεν είναι ακριβής. Αν όμως πολλαπλασιάσουμε με $1/t^2$, η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\underbrace{\frac{y}{t^2}}_{M}\,dt + \underbrace{\left(y - \frac{1}{t}\right)}_{N}\,dy = 0 \qquad (t \neq 0)$$

Έχουμε: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ και επομένως η εξίσωση είναι τώρα ακριβής.

<u>Ερώτημα</u>: Αν η εξίσωση $M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0$ <u>δεν</u> είναι ακριβής, κάτω από ποιές συνθήκες μπορεί να βρεθεί συνάρτηση $\mu(t,y)$ τέτοια ώστε η εξίσωση $\mu(t,y)\,M(t,y)\,dt + \mu(t,y)\,N(t,y)\,dy =$

νά είναι ακριβής; Αν υπάρχει τέτοια κατάλληλη(*) συνάρτηση $\mu(t,y)$ ονομάζεται ολοκληρωτικός παράγοντας. Στήν περίπτωση αυτή έχουμε:

$$\mu(t,y)M(t,y)\,dt + \mu(t,y)N(t,y)\,dy = dF(t,y) = 0$$

καί η λύση της εξίσωσης είναι: $F(t,y) = c$ (σταθερά). Διαφορίζοντας:

$$dF(t,y) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

καί επομένως

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mu(t,y)M(t,y) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \mu(t,y)N(t,y)$$

Αν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu(t,y)$ δέν είναι μοναδικός: Αν $f(F)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση του $F(t,y)$, τότε

$$\mu f(F)(M\,dt + N\,dy) = d\left[\int f(F)\,dF\right]$$

καί συνεπώς η συνάρτηση $\mu(t,y)f(F(t,y))$ είναι επίσης ολοκληρωτικός παράγοντας.

Από τήν προηγούμενη ανάλυση η συνάρτηση $\mu(t,y) \neq 0$ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας αν καί μόνο αν:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t} \quad \Rightarrow$$

(*) $\mu(t,y) \neq 0$, συνεχής καί με συνεχείς μερικές παραγώγους ώς προς t καί y.

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = N \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} \left(N \frac{\partial \mu}{\partial t} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \qquad (*)$$

Πού είναι πρόβλημα μερικών διαφορικών εξισώσεων (εν γένει πιό πολύπλοκο από το αρχικό). Γιά τον λόγο αυτό εξετάζουμε την ύπαρξη ολοκληρωτικών παραγόντων ειδικής μορφής.

1η περίπτωση: $\mu = \mu(t)$

Αν υπάρχει παράγοντας αυτής της μορφής έχουμε

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu'(t) \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$$

και η (*) γράφεται:

$$\frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) \qquad (N \neq 0)$$

Εφόσον η συνάρτηση στο αριστερό μέλος της ισότητας εξαρτάται μόνο από το t, αναγκαία συνθήκη γιά την ύπαρξη ολοκλ. παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t)$ είναι

$$\frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right) = g(t)$$

γιά κάποια συνάρτηση $g(\cdot)$. Επομένως έχουμε

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dt} = g(t) \quad \Leftarrow \quad \mu(t) = e^{\int g(t)\,dt}$$

είναι κατάλληλος ολοκληρωτικός παράγοντας.

<u>Παράδειγμα</u>: Εξετάζουμε πάλι την εξίσωση:

$$\underbrace{y}_{M}\,dt + \underbrace{(t^2y - \overset{t}{\cancel{y}})}_{N}\,dy = 0$$

Έχουμε: $\quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 \;, \quad \dfrac{\partial N}{\partial t} = 2ty - 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{1-(2ty-1)}{t(ty-1)} = \frac{2(1-ty)}{t(ty-1)}$$

$$= -\frac{2}{t} := g(t) \qquad t \neq 0,\; ty \neq 1$$

και επομένως: $\mu(t) = e^{-\int \frac{2dt}{t}} = e^{-2\ln|t|} = \dfrac{1}{t^2}$ είναι κατάλληλος ολοκληρωτικός παράγοντας (που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα).

<u>2η περίπτωση: $\mu = \mu(y)$</u>

Αν υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(y) \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

οπότε:

$$\frac{1}{\mu(y)}\,\frac{d\mu}{dy} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right) := g(y)$$

γιά κάποια συνάρτηση $g(y)$. Επομένως:

$$\frac{1}{\mu(y)}\frac{d\mu}{dy} = g(y) \Leftarrow \mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}$$

είναι κατάλληλος ολοκληρωτικός παράγοντας.

<u>3η περίπτωση: $\mu = \mu(ty)$</u>

Προφανώς η περίπτωση αυτή είναι γενικότερη από τις (1) και (2). Έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu(ty) = \mu'(ty)\,y \qquad\qquad \mu \;—\; z := ty \begin{matrix} \nearrow t \\ \searrow y \end{matrix}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(ty) = \mu'(ty)\,t$$

Επομένως: $$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial\mu}{\partial t} - M\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu(ty)}\left(N y\,\mu'(ty) - M t\,\mu'(ty)\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu'(ty)}{\mu(ty)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{Ny - Mt} := g(ty)$$

για κάποια συνάρτηση $g(\cdot)$. Θέτοντας $z = ty$ έχουμε

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = g(z) \Leftarrow \mu(z) = e^{\int g(z)\,dz} := e^{G(z)}$$

και επομένως $\mu(ty) = e^{G(ty)}$ είναι κατάλληλος ολοκληρωτικός παράγοντας, όπου $G'(z) = g(z)$.

1.9 <u>Παράδειγμα</u> : Τό σύστημα Lotka - Volterra

Οικολογικό δυναμικό μοντέλο θηραμάτων (x) / θηρευτών (y):

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= (\alpha-\beta y)x(t) \\ y'(t) &= (\delta x-\gamma)y(t) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &x(0)=x_0>0\ ,\ y(0)=y_0>0 \\ &\alpha,\beta,\gamma,\delta>0 \end{aligned}$$

Απαλείφοντας τήν μεταβλητή χρόνου (t):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{(\delta x-\gamma)y}{(\alpha-\beta y)x} \Rightarrow \underbrace{-(\delta x-\gamma)y}_{M}\,dx+\underbrace{(\alpha-\beta y)x}_{N}\,dy=0$$

Παρατηρούμε ότι $\partial M/\partial y=-(\delta x-\gamma)\neq \partial N/\partial x=\alpha-\beta y$ καί επομένως η εξίσωση δέν είναι ακριβής. Έχουμε όμως:

$$\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{Ny-Mx}=\frac{-(\delta x-\gamma)-(\alpha-\beta y)}{(\alpha-\beta y)xy+(\delta x-\gamma)yx}=-\frac{1}{xy}$$

καί επομένως έχουμε ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής:

$$g(s)=-1/s\quad (s=xy)\ ,\ \mu(s)=e^{\int g(s)ds}=e^{-\int\frac{ds}{s}}=e^{-\ln s}=\frac{1}{s}=\frac{1}{xy}$$

Πολ/ντας με $1/xy$:

$$-\frac{1}{x\cancel{y}}(\delta x-\gamma)\cancel{y}\,dx+\frac{1}{\cancel{x}y}(\alpha-\beta y)\cancel{x}\,dy=0$$

$$\Rightarrow -\left(\delta-\frac{\gamma}{x}\right)dx+\left(-\beta+\frac{\alpha}{y}\right)dy=0$$

πού είναι ακριβής μέ $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\left(\delta-\dfrac{\gamma}{x}\right)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=-\beta+\dfrac{\alpha}{y}$

Ολοκληρώνοντας: $F(x,y)=-\delta x+\gamma\ln x+h(y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = h'(y) = -\beta + \frac{\alpha}{y} \Rightarrow h(y) = -\beta y + \alpha \ln y$$

Επομένως η λύση του συστήματος είναι:

$$F(x,y) = -\delta x + \gamma \ln x - \beta y + \alpha \ln y = c$$

εφ' όσον:

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

$$= -\left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(-\beta + \frac{\alpha}{y}\right)\frac{dy}{dt} = 0$$

οι λύσεις του συστήματος βρίσκονται πάνω σε καμπύλες στάθμης της συνάρτησης $F(x,y) = c$, δηλ:

$$-\delta x + \gamma \ln x - \beta y + \alpha \ln y = -\delta x_0 + \gamma \ln x_0 - \beta y_0 + \alpha \ln y_0$$

$$\Rightarrow -\delta(x - x_0) - \beta(y - y_0) + \gamma \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + \alpha \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\gamma} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\alpha} = e^{\delta(x - x_0)} \cdot e^{\beta(y - y_0)}$$

Είναι δυνατόν να δείξουμε ότι οι καμπύλες στάθμης

$$F_c = \{(x,y) : x > 0, y > 0, F(x,y) = c\}$$

είναι κλειστές κυρτές καμπύλες που περιέχουν το σημείο $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$. Ιδιαίτερα, αν $x_0 > 0$ και $y_0 > 0$, τότε $x(t) > 0$ και $y(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$ που δικαιολογεί εκ των υστέρων τη χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα $\mu = 1/xy$.