Ύπαρξη καί μοναδικότητα λύσης

Θεωρούμε τό πρόβλημα: $y'(t) = f(t,y)$, ~~f(t0)=~~ $y(t_0) = y_0$. Έστω ότι $f(t,y)$ καί $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις καί $y(t)$ λύση του προβλήματος σε διάστημα $(t_0-\delta, t_0+\delta)$. Ολοκληρώνοντας

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds \Leftrightarrow y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$$

Που αντιστοιχεί στό ισοδύναμο πρόβλημα σε ολοκληρωτική μορφή.

Μέθοδος Picard

Μέ τήν μέθοδο αυτή κατασκευάζονται διαδοχικά βελτιωμένες προσεγγίσεις της λύσης. Η ακολουθία ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \\ y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))\,ds \\ &\vdots \\ y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))\,ds \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $y_n(t_0) = y_0$ γιά $n \in \mathbb{N}_0$. Θά δείξουμε ότι κάτω από γενικές προυποθέσεις η ακολουθία $\{y_n(t)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στή λύση του Π.Α.Τ.

Παράδειγμα:

Η ακολουθία Picard γιά το Π.Α.Τ : $y' = y$, $y(0) = 1$ (μέ λύση $y(t) = e^t$) κατασκευάζεται ως εξής. Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο μέ την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s)\,ds$$

καί έχουμε:

$$y_0(t) = 1,$$
$$y_1(t) = 1 + \int_0^t y_0(s)\,ds = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1+t$$
$$y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2!}$$
$$\vdots$$
$$y_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

Η $y_n(t)$ αντιστοιχεί με μερικό άθροισμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

Η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη για $t \in \mathbb{R}$ σε κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$.

Παράδειγμα: Νά υπολογισθούν οί τρείς πρώτες προσεγγίσεις του Π.Α.Τ. $y' = 1 + y^3$, $y(1) = 1$; Έχουμε

$$y(t) = 1 + \int_1^t (1 + y^3(s))\,ds$$

και επομένως: $y_0(t) = 1$,

$$y_1(t) = 1 + \int_1^t 2\,dt = 1 + 2(t-1) = 2t-1$$

$$y_2(t) = 1 + \int_1^t \left[1 + (2s-1)^3\right] ds = 1 + \left[s\right]_1^t + \left[\frac{(2s-1)^4}{8}\right]_1^t$$

$$= 1 + (t-1) + \frac{1}{8}\left[(2t-1)^4 - 1\right]$$

Σύγκλιση προσεγγίσεων Picard - Θεώρημα τοπικής ύπαρξης Picard - Lindelöf.

Το θεώρημα εξασφαλίζει μοναδική ύπαρξη λύσης γύρω από τό σημείο $t = t_0$ μέσω της σύγκλισης των προσεγγίσεων Picard.

Προκαταρτικά: Σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ και (f_n), $n \in \mathbb{N}$, μια ακολουθία συναρτήσεων, όπου $f_n : E \to \mathbb{R}$.

Ορισμός: Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει κατά-σημείο στην συνάρτηση f στο E αν $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ για κάθε $t \in E$, δηλ. αν για κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ (που μπορεί να εξαρτάται από το ε και το t, δηλ. $N = N(\varepsilon, t)$), τέτοιος ώστε $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$.

Ορισμός: Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση f στο E αν για κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ (που μπορεί να εξαρτάται από το ε αλλά κοινός για όλα τα t, δηλ. $N = N(\varepsilon)$), τέτοιος ώστε: $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$ και κάθε $t \in E$.

Προφανώς ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται σύγκλιση κατά σημείο, αλλά όχι αντίστροφα. Παράδειγμα: Η ακολουθία $(f_n) = (t^n)$, $0 \leq t \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στην συνάρτηση $f(t) = 0$, $0 \leq t < 1$; $f(1) = 1$, $t = 1$. Παρατηρούμε από το παράδειγμα ότι το όριο κατά σημείο ακολουθίας συναρτήσεων που είναι συνεχείς, δεν είναι κατ' ανάγκην συνεχής συνάρτηση, σε αντίθεση με την περίπτωση ομοιόμορφης σύγκλισης:

Θεώρημα: Αν (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, $f_n : E \to \mathbb{R}$ (δηλ. $f_n \in C(E, \mathbb{R})$), και η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση f στο E, τότε $f \in C(E, \mathbb{R})$.

Απόδειξη: Έστω $t_0 \in E$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$ δηλ ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$: $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ όταν $|t - t_0| < \delta$.

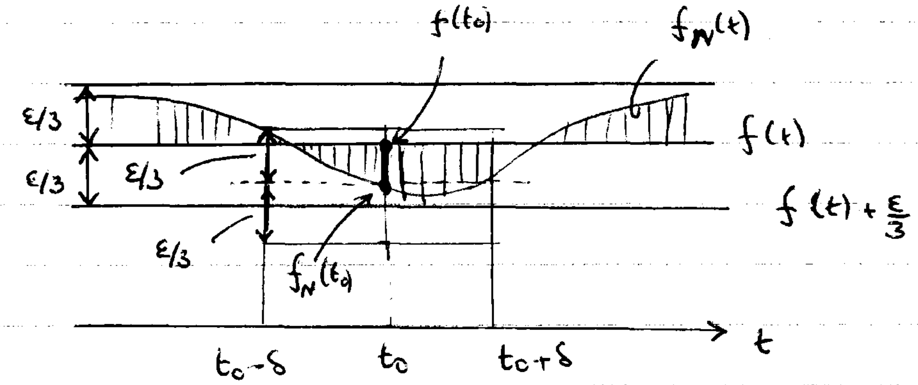
Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E, τότε δοθέντος $\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$

τέτοιο ώστε $|f_N(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall t \in E$. Επίσης, αφού $f_N \in C(E,\mathbb{R})$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0) : |f_N(t) - f_N(t_0)| < \varepsilon/3$ όταν $|t-t_0|<\delta$. Επομένως, γιά $|t-t_0|<\delta$, έχουμε

$$|f(t)-f(t_0)| \leq |f(t)-f_N(t)| + |f_N(t)-f_N(t_0)| + |f_N(t_0)-f(t_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Καί επομένως η $f(t)$ είναι συνεχής στό t_0. Αφού τό $t_0 \in E$ ήταν αυθαίρετο, $f \in C(E,\mathbb{R})$. $\square$



$$\left.\begin{array}{ll} |f(t)-f_N(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t\in E \Rightarrow |f(t_0)-f_N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} & (\alpha) \\ |f_N(t)-f_N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta) & (\beta) \\ |f(t)-f_N(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t\in E & (\gamma) \end{array}\right\}$$

$$|f(t)-f(t_0)| \leq \underbrace{|f(t)-f_N(t)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ (\gamma)} + \underbrace{|f_N(t)-f_N(t_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ (\beta)} + \underbrace{|f_N(t_0)-f(t_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ (\alpha)}$$

$$\forall t\in E \qquad\qquad \forall t\in(t_0-\delta, t_0+\delta) \qquad\qquad t_0$$

$$\Rightarrow \quad |f(t)-f(t_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta).$$

Θεώρημα: Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο E αν και μόνο αν $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in E, n \geq N, m \geq N$.

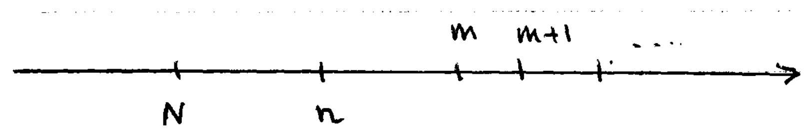
Απόδειξη: (i) Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E.
Άρα $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2 \quad \forall t \in E$.
Επομένως, $\forall t \in E, n \geq N, m \geq N$:

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n(t) - f(t)| + |f(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

(ii) Αντίστροφα, έστω ότι η συνθήκη Cauchy ικανοποιείται, δηλ. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \qquad \forall t \in E, n \geq N, m \geq N \qquad (*)$$

Εφόσον στο $\mathbb{R}$ κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει (πληρότητα), τότε $\forall t \in E$ η ακολουθία πραγματικών $(f_n(t))$ συγκλίνει σε κάποιο όριο $f_t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, $f(t) = f_t$. Τότε $f_n \to f$ κατά σημείο. Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Δοθέντος $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει η $(*)$. Έστω n αυθαίρετος ακέραιος, $n \geq N$ (σταθεροποιημένος!). Παίρνουμε το όριο $m \to \infty$ στην $(*)$. Εφόσον $f_m \to f$, τότε $\forall t \in E$: $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$.
(διότι αν για κάποιο t_0, $|f_n(t_0) - f(t_0)| \geq \varepsilon$ θα είχαμε αντίφαση!).
Εφόσον το $n \geq N$ ήταν αυθαίρετο, έχουμε: $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ $\forall n \geq N, \forall t \in E$, δηλ. $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. $\square$



Θεώρημα: Έστω $f_n \in C(E, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ και έστω E φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E, τότε:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(t)\,dt = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_E f(t)\,dt$$

Απόδειξη: Έχουμε:

$$\int_E f_n(t)\,dt - \int_E f(t)\,dt = \int_E [f_n(t) - f(t)]\,dt$$

Επίσης επιλέγουμε φραγμένο διάστημα $J = (a, \beta) \supseteq E$ και ορίζουμε $\mu(J) = b - a$. Εφόσον $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο (φραγμένο) σύνολο E, μπορούμε να επιλέξουμε για αυθαίρετο $\varepsilon > 0$ ακέραιο $N = N(\varepsilon)$: $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon / \mu(J)$ $\forall t \in E, n \geq N$. Επομένως:

$$\left| \int_E f_n(t)\,dt - \int_E f(t)\,dt \right| = \int_E |f_n(t) - f(t)|\,dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\mu(J)} \mu(J) = \varepsilon$$

$\forall n \geq N$. και επομένως $\int_E f_n(t)\,dt \to \int_E f(t)\,dt$. $\square$

Παράδειγμα: Δύο παραδείγματα στα οποία η εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος δεν ισχύει. (1) Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων:

$$\left.\begin{aligned} f_n(t) &= 1/n & 0 \leq t \leq n \\ &= 0 & t < 0,\ t > n \end{aligned}\right\}$$

για $n \in \mathbb{N}$ πού συγκλίνει ομαλόμορφα στην μηδενική συνάρτηση $f(t) = 0$, $t \in E = \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,dt = 1 \neq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$$

Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα δεν ισχύει γιατί ολοκληρώνουμε σε διάστημα που δεν είναι φραγμένο.

(2) Ορίζουμε την ακολουθία: $f_n(t) = n^2 t e^{-nt}$, $t \in E = [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, που συγκλίνει κατά σημείο στην μηδενική συνάρτηση $f(t) = 0$, $t \in E$. Έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt$$

Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα δεν ισχύει γιατί η σύγκλιση $f_n \to f$ δεν είναι ομοιόμορφη.

Εστω $(f_j(t)), j \in \mathbb{N}$ ακολουθία συναρτήσεων με $f_j : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)$ συγκλίνει κατά σημείο στην συνάρτηση $S(t)$ αν $\forall t \in E$:

$$\lim_{n\to\infty} | S(t) - S_n(t) | = 0 , \quad S_n(t) := \sum_{j=1}^{n} f_j(t)$$

Η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο E αν η ακολουθία $S_n(t) \to S(t)$ ομοιόμορφα. Το επόμενο θεώρημα είναι η συνθήκη σύγκλισης του Weierstrass.

Θεώρημα: Έστω $f: E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και έστω ότι υπάρχουν μή αρνητικές σταθερές M_n : $|f_n(t)| < M_n$ $\forall t \in E$ και $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Απόδειξη: Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε για αυθαίρετο $\varepsilon > 0$ υπάρχουν (αρκούντως μεγάλοι) ακέραια m, n με $m \geq n$ ώστε $\sum_{j=n}^{m} M_j < \varepsilon$. Επομένως:

$$\left| \sum_{j=1}^{m} f_j(t) - \sum_{j=1}^{n} f_j(t) \right| = \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(t) \right| \leq \sum_{j=n}^{m} |f_j(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=n}^{m} M_j < \varepsilon$$

και η ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς προκύπτει από προηγούμενο θεώρημα (Cauchy) □

Θεώρημα (Picard-Lindelöf)

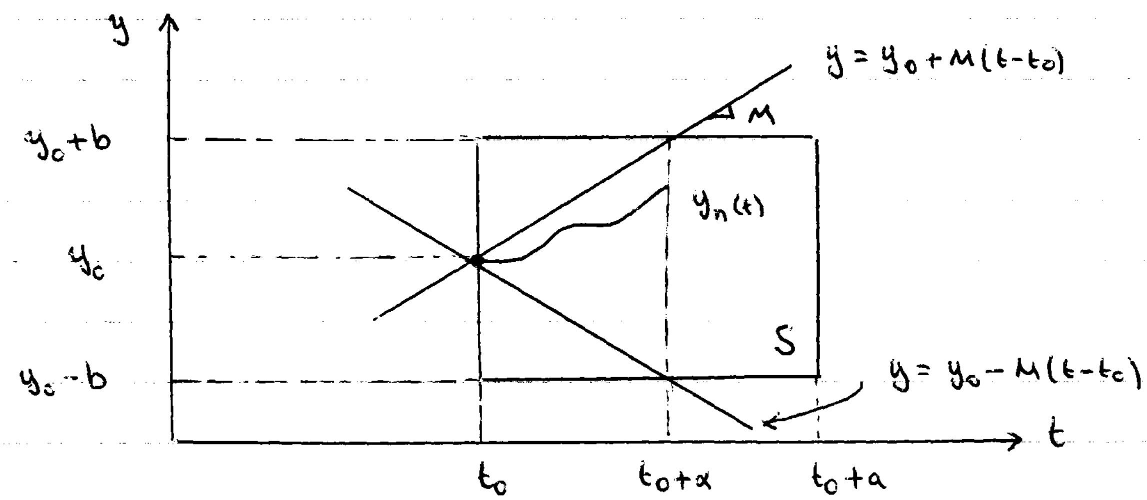
Έστω ότι $f(t,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ συνεχείς συναρτήσεις στο ορθογώνιο:

$$S = \{ (t,y) : t_0 \leq t \leq t_0 + a \ , \ |y-y_0| \leq b \}$$

Έστω ακόμα: $M = \max\{ |f(t,y)| : (t,y) \in S \}$, $\alpha = \min(a, b/M)$.
Τότε το Π.Α.Τ:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ , \quad y(t_0) = y_0$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα $[t_0, t_0+\alpha)$.



Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία Picard:

$$y_0(t) = y_0 \ , \quad y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds \ , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Βήμα 1ο: Οι συναρτήσεις $y_n(t)$ ικανοποιούν την εκτίμηση:

$$|y_n(t) - y_0| \leq M\,|t-t_0| \ , \quad t_0 \leq t \leq t_0+\alpha \ , \quad n \geq 0 .$$

Η γεωμετρική ερμηνεία της εκτίμησης είναι: $(t, y_n(t)) \in S \cap C$ $(t_0 \leq t \leq t_0+\alpha)$ όπου C είναι ο κώνος $C = \{ (t,y) : y \leq y_0 + M(t-t_0)$, $y \geq y_0 - M(t-t_0)$, $t \geq t_0 \}$.

Η απόδειξη είναι επαγωγική. Η εκτίμηση προφανώς ισχύει γιά $n=0$ $(y_0(t)=y_0)$. Έστω ότι ισχύει γιά $n=j$, δηλ.

$$|y_j(t)-y_0| \leq M(t-t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_0+\alpha$$

Θά δείξουμε ότι η εκτίμηση ισχύει γιά $n=j+1$. Γιά $t\in[t_0,t_0+\alpha]$ έχουμε

$$|y_{j+1}(t)-y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y_j(s))\,ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,y_j(s))|\,ds$$
$$\leq M(t-t_0)$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει καθώς από τήν επαγωγική υπόθεση έχουμε $(s,y_j(s))\in S\cap C$ (γιά $s\in[t_0,t]$, $t_0\leq t\leq t_0+\alpha$) καί επομένως (από τήν υπόθεση του Θεωρήματος) $|f(s,y_j(s))|\leq M$. Συνεπώς $|y_n(t)-y_0|\leq M(t-t_0)$ στό διάστημα $t_0\leq t\leq t_0+\alpha$ γιά κάθε $n\in\mathbb{N}_0$. Επομένως οι συναρτήσεις $y_n(t)$ είναι καλά-ορισμένες καί συνεχείς στό διάστημα $[t_0,t_0+\alpha]$ (συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες κατά Rieman σέ πεπερασμένο διάστημα καί το ολοκλήρωμά τους στό διάστημα αυτό ορίζει συνεχή συνάρτηση) καί $(t,y(t))\in S\cap C$ γιά κάθε $t\in[t_0,t_0+\alpha]$.

<u>Βήμα 2°</u>: Οι συναρτήσεις $y_n(t)$ ικανοποιούν στό διάστημα $t_0\leq t\leq t_0+\alpha$ τήν εκτίμηση:

$$|y_n(t)-y_{n-1}(t)| \leq \frac{ML^{n-1}(t-t_0)^n}{n!}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad L:=\max_{(t,y)\in S}\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right|$$

Το επιχείρημα είναι πάλι επαγωγικό. Γιά $n=1$ η εκτίμηση είναι:

$$|y_1(t)-y_0| \leq M(t-t_0)$$

που ισχύει από το Βήμα 1. Έστω ότι η εκτίμηση ισχύει για $n=j$, δηλ

$$|y_j(t) - y_{j-1}(t)| \leq \frac{ML^{j-1}(t-t_0)^j}{j!}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad t_0 \leq t \leq t_0+\alpha$$

Θα δείξουμε ότι η εκτίμηση ισχύει επίσης για $n=j+1$. Για $t \in [t_0, t_0+\alpha]$:

$$\begin{aligned}
|y_{j+1}(t) - y_j(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(s, y_j(s)) - f(s, y_{j-1}(s)) \right] ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_j(s)) - f(s, y_{j-1}(s))| \, ds \\
&= \int_{t_0}^{t} \left| \int_{y_{j-1}(s)}^{y_j(s)} |f_y(s,y)| \, dy \right| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \left| \int_{y_{j-1}(s)}^{y_j(s)} L \, dy \right| ds
\end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση του γεγονότος ότι για $s \in [t_0, t]$ $(t_0 \leq t \leq t_0+\alpha)$ $y \in [y_{j-1}(s), y_j(s)]$, έχουμε $(s,y) \in S \cap C$ (Βήμα 1) και τον ορισμό της παραμέτρου L. Συνεχίζοντας την εκτίμηση:

$$\begin{aligned}
|y_{j+1}(t) - y_j(t)| &\leq L \int_{t_0}^{t} |y_j(s) - y_{j-1}(s)| \, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \frac{ML^{j-1}(s-t_0)^j}{j!} \, ds \\
&= \frac{ML^j}{j!} \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^j \, ds \\
&= \frac{ML^j (t-t_0)^{j+1}}{(j+1)!}
\end{aligned}$$

και επομένως η εκτίμηση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

<u>Βήμα 3</u>: Η ακολουθία συναρτήσεων $(y_n(t))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[t_0, t_0+\alpha]$ σε συνεχή συνάρτηση $y(t)$.

Εκφράζουμε την $y_n(t)$ ως "τελεσκοπική σειρά", δηλ.:

$$y_n(t) = y_0 + (y_1(t) - y_0) + \cdots + (y_n(t) - y_{n-1}(t))$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (y_k(t) - y_{k-1}(t)), \quad y_{-1} := 0$$

Η σύγκλιση της ακολουθίας είναι επομένως ισοδύναμη με την σύγκλιση της σειράς, ικανή συνθήκη της οποίας είναι η απόλυτη σύγκλιση της σειράς. Συμβολικά:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (y_k(t) - y_{k-1}(t)) = A$$

$$\Leftarrow \sum_{k=0}^{n} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| = B$$

γιά κάποια (πεπερασμένα) A και B $(A \leq B < \infty)$. Για νά δείξουμε απόλυτη σύγκλιση γράφουμε γιά $t_0 \leq t \leq t_0+\alpha$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| = |y_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \quad (y_{-1}=0$$

$$\leq |y_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M L^{k-1} (t-t_0)^k}{k!}$$

$$\leq |y_0| + \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^k \alpha^k}{k!}$$

$$= |y_0| + \frac{M}{L} (e^{\alpha L} - 1)$$

όπου κάναμε χρήση του αναπτύγματος εκθετικής συνάρτησης.

Από την χρήση του κριτηρίου Weirstrass συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{n} (y_k(t) - y_{k-1}(t))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στό $[t_0, t_0+\alpha]$. Έπεται ότι: $y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t)$, όπου $y(t)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων

<u>Βήμα 4</u>: Η $y(t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ, δηλ (ισοδύναμα) ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_0+\alpha$$

Παίρνοντας όρια στά δύο μέλη της n-οστής προσέγγισης Picard:

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds \right)$$

έχουμε:

$$y(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds$$

Εφόσον $f(t,y)$ είναι συνεχής στό ~~[illegible]~~ S καί $y_n(t) \to y(t)$ ομοιόμορφα στό διάστημα $[t_0, t_0+\alpha]$, τότε καί $f(t, y_n(t)) \to f(t, y(t))$ ομοιόμορφα στό $[t_0, t_0+\alpha]$ καί από προηγούμενο Θεώρημα:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds = \int_{t_0}^{t} \lim_{n\to\infty} f(s, y_n(s))\, ds$$
$$= \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

Επομένως: $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \quad , \quad t \in [t_0, t_0+\alpha]$
καί η $y(t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ.

<u>Βήμα 5</u>: (Μοναδικότητα λύσης): Έστω $z(t)$ λύση του Π.Α.Τ. Τότε έχουμε:

$$z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, ds \quad , \quad t_0 \leq t \leq t_0+\alpha$$

Θα δείξουμε επαγωγικά την εκτίμηση:

$$|y_n(t) - z(t)| \leq \frac{ML^n (t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [t_0, t_0+\alpha]$$

Γιά $n=0$:

$$|y_0 - z(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, ds \right| \leq M \int_{t_0}^{t} ds = M(t_0 - t_0)$$

Εστω ότι η εκτίμηση ισχύει γιά $n=j$. Γιά $n=j+1$ έχουμε:

$$|y_0 - z(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, y_j(s)) - f(s, z(s)) \Big)\, ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} L\, |y_j(s) - z(s)|\, ds \right|$$

$$\leq L \frac{ML^j}{(j+1)!} \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{j+1}\, ds$$

$$= \frac{ML^{j+2}}{(j+2)!} (t-t_0)^{j+2}$$

που αποδεικνύει την εκτίμηση. Παίρνοντας τό όριο:

$$\lim_{n\to\infty} |y_n(t) - z(t)| = |y(t) - z(t)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{ML^n (t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

γιά κάθε $t \in [t_0, t_0+\alpha]$, δηλ. $y(t) = z(t)$ $\forall t \in [t_0, t_0+\alpha]$.
Στον υπολογισμό του ορίου έγινε χρήση του παρακάτω αποτελέσματος:

<u>Λήμμα</u>: Η ακολουθία $(k^n/n!)$, $k>0$, συγκλίνει στό 0 καθώς $n\to$

<u>Απόδειξη</u>: Δοθέντος $\alpha<1$ επιλέγουμε αρκούντως μεγάλο ακέραιο N ώστε $k/N < \alpha$ γιά $n > N$. Γιά αυθαίρετο $j>0$:

$$\frac{k^j}{j!} = \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdots \frac{k}{N-1} \frac{k}{N} \cdots \frac{k}{j} < \frac{k^N}{N!} \alpha^{j-N} \to 0 \text{ καθώς } j\to\infty. \quad \square$$

Παρατήρηση: Είναι σαφές ότι ένα αντίστοιχο Θεώρημα προκύπτει αν το S αντικατασταθεί με το $[t_0 - a, t_0] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Αποτά δύο αυτά "πλευρικά" Θεωρήματα είναι σαφές ότι αν το S αντικατασταθεί από το $[t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ τότε το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση στό διάστημα $|t - t_0| < \alpha$.

Παρατήρηση: Η υπόθεση του Θεωρήματος σχετικά με την συνέχεια της $f_y(t,y)$ στό S μπορεί νά αντικατασταθεί από συνθήκη λιγότερο περιοριστική (συνθήκη Lipschitz):

Ορισμός: Η συνάρτηση f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στό S αν υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε γιά κάθε $(t, y_1), (t, y_2) \in S$ να έχουμε:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \qquad (*)$$

(η L λέγεται σταθερά Lipschitz).

Έστω ότι $f_y(t,y)$ συνεχής στό S καί $L := \max_{(t,y)\in S} |f_y(t,y)|$ (τό μέγιστο είναι καλά-ορισμένο εφόσον η f_y είναι συνεχής στό συμπαγή σύνολο S). Τότε,

$$\begin{aligned} |f(t,y_1) - f(t,y_2)| &= \left| \int_{y_1}^{y_2} f_y(t,y)\, dy \right| \\ &\leq \int_{y_1}^{y_2} |f_y(t,y)|\, dy \\ &\leq L\,|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Η υπόθεση γιά την $f_y(t,y)$ είναι δυνατόν νά αντικατασταθεί από τήν συνθήκη Lipschitz $(*)$ που είναι λιγότερο περιοριστική χωρίς καμία αλλαγή στό συμπέρασμα.

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί το Π.Α.Τ : $y' = -e^{y+t+1}$, $y(0) = -1$

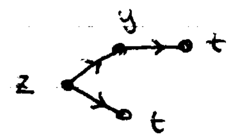
<u>α' τρόπος</u>: Η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών:

$$\frac{dy}{dt} = -e^{y}\cdot e^{t+1} \Rightarrow \int e^{-y}\,dy = -\int e^{t+1}\,dt + c$$

$$\Rightarrow -e^{-y} = -e^{t+1} + c \Rightarrow e^{-y} = e^{t+1} - c$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow e^{1} = e - c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = -(t+1).$$

<u>β' τρόπος</u>: Θέτουμε $z = y + t + 1$



Τότε $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dz} + \frac{\partial z}{\partial t} \Rightarrow z' = 1\cdot y' + 1 \Rightarrow z' = y' + 1$

$$\Rightarrow y' = z' - 1 = -e^{z} \Rightarrow z' = 1 - e^{z}\ ,\ z(0) = y(0) + 1 = 0.$$

Λόγω του μονοσήμαντου της λύσης του ΠΑΤ: $z' = 1 - e^{z}$, $z(0)=0$
η λύση είναι $z = 0 \Rightarrow y = -(t+1)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t,y) = y\cos t$ που ορίζεται στο $\mathbb{R}^2$. Για κάθε $(t,y_1),(t,y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(t,y_1) - f(t,y_2) = y_1\cos t - y_2\cos t = (y_1 - y_2)\cos t$$

$$\Rightarrow |f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |\cos t|\cdot|y_1 - y_2| \le |y_1 - y_2|$$

και η f είναι Lipschitz (με σταθερά Lipschitz $L=1$).

<u>Παράδειγμα</u>: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t,y) = y^{2/3}$ που ορίζεται σε περιοχή $D \subseteq \mathbb{R}^2$ με $(0,0) \in D$.

Έχουμε: $|f(t,0) - f(t,y)| = |y|^{2/3}$

Αναγκαία συνθήκη γιά νά είναι η f Lipschitz στό D είναι η ύπαρξη $L \in \mathbb{R}$:

$$|y|^{2/3} \leq L|y|, \qquad (t,y)\in D$$

~~Επιλέγοντας/τα~~ $\Rightarrow \quad L|y|^{1/3} \geq 1, \quad (t,y) \in D.$

Επιλέγοντας το $|y|$ αυθαίρετα μικρό δείχνει ότι δεν υπάρχει τέτοια σταθερά L και επομένως η f δεν είναι Lipschitz.
(Ισοδύναμα:

$$\lim_{y\to 0} \frac{|y|^{2/3}}{|y|} = +\infty$$

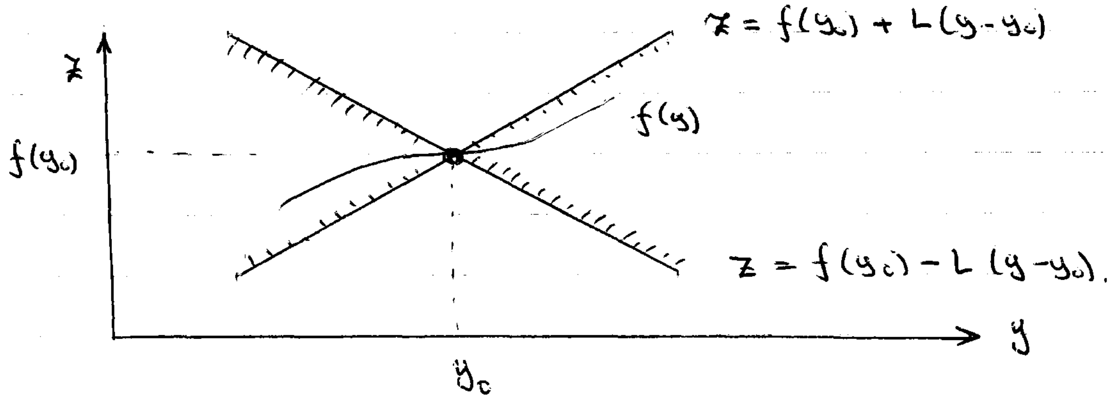
και επομένως δεν υπάρχει κατάλληλη σταθερά L).

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω συνάρτηση $z = f(y)$ που ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz :

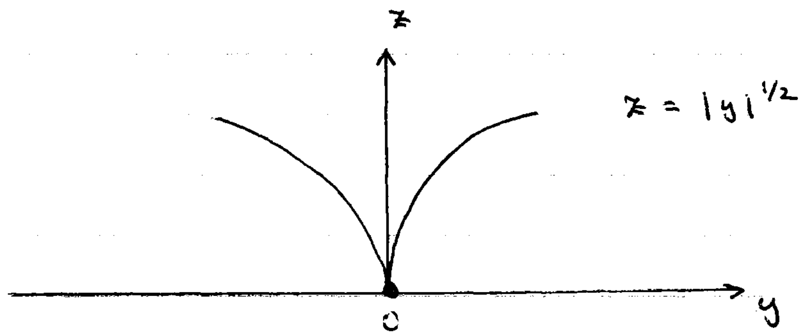
$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

γιά $y \in [a,b]$.
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $(y_0, f(y_0))$ πάνω στό γράφημα της f, τότε τό γράφημ[α] περιέχεται εντός του διπλού κώνου :

$$|z - f(y_0)| \leq L|y - y_0|$$

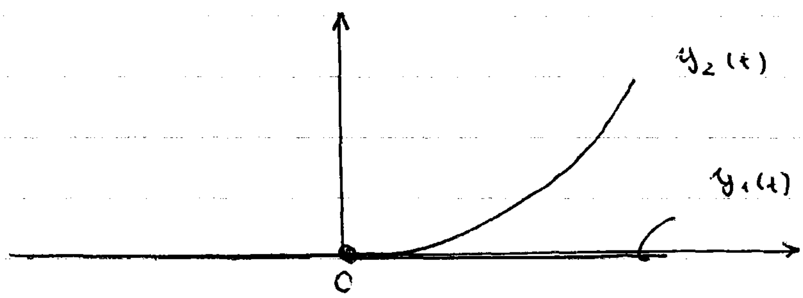


Παράδειγμα. Τό παράδειγμα αυτό δείχνει ότι μοναδικότητα λύση του Π.Α.Τ μπορεί νά χαθεί αν η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. : Το πρόβλημα ορίζεται ως $y' = |y|^{1/2}$, $y(0)=0$. Το γράφημα της $f(y) = |y|^{1/2}$ δείχνει ότι η f δεν είναι Lipschitz:



Δύο διακεκριμμένες λύσεις είναι: $y_1(t) = 0$ $(t \in \mathbb{R})$ καί

$$y_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$



Παρατηρούμε ότι $y_2'(t) = 0$ $(t<0)$, $y_2'(t) = \frac{1}{2} t^2$ $(t \geq 0)$ καί επομένως $y_2 \in C^1(\mathbb{R})$.

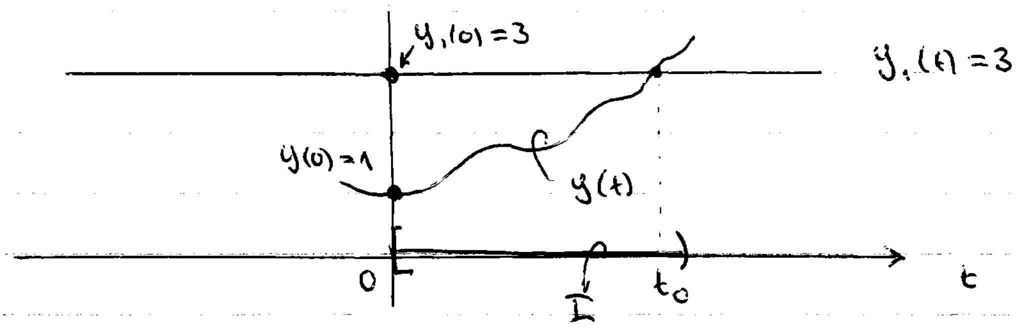
Παράδειγμα: (α) Το Π.Α.Τ : $y'(t) = -t\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=1$ έχει δύο λύσεις στό $[0,\infty)$: $y_1(t) = 1$ καί $y_2(t) = \cos(t^2/2)$ ($\Rightarrow y_2' = -t\sin(t^2/2) = -t\sqrt{1-y_2^2}$). Η έλλειψη μονοσήμαντης λύσης δεν παραβαίνει το Θεώρημα Picard-Lindelöf γιατί η $f_y(t,y) = -\frac{1}{2} t(1-y^2)^{-1/2}(-2y) = yt(1-y^2)^{-1/2}$ δεν ορίζεται στο σημείο $(0,1)$.

(β) Αντίθετα τό Π.Α.Τ : $y'(t) = t\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=1$,

έχει μοναδική λύση στό $[0,\infty)$, $y(t)=1$, παρόλο που η f δέν είναι Lipschitz: Αν $y(t)$ είναι λύση τότε $y'(t)\geq 0$ γιά $t\geq 0$ και συνεπώς $y(t)\geq 1$ γιά $t\geq 0$. Ταυτόχρονα ~~λόγω θετικότητας της $y(t)$~~ $1-y^2\geq 0 \Rightarrow y^2\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq y(t)\leq 1$.
Επομένως αναγκαστικά έχουμε $y(t)=1 \quad \forall t\geq 0$.

Το παράδειγμα δείχνει ότι η συνθήκη Lipschitz δέν είναι αναγκαία γιά το μονοσήμαντο της λύσης.

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $y'(t)=f(t,y)$ της οποίας μια λύση είναι η $y_1(t)=3$, $t\in\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f εξασφαλίζει μονοσήμαντο λύσης σέ κάθε Π.Α.Τ της μορφής $y'=f(t,y)$, $y(t_0)=y_0$. Τι συμπέρασμα προκύπτει γιά την λύση που ικανοποιεί αρχική συνθήκη $y(0)=1$;

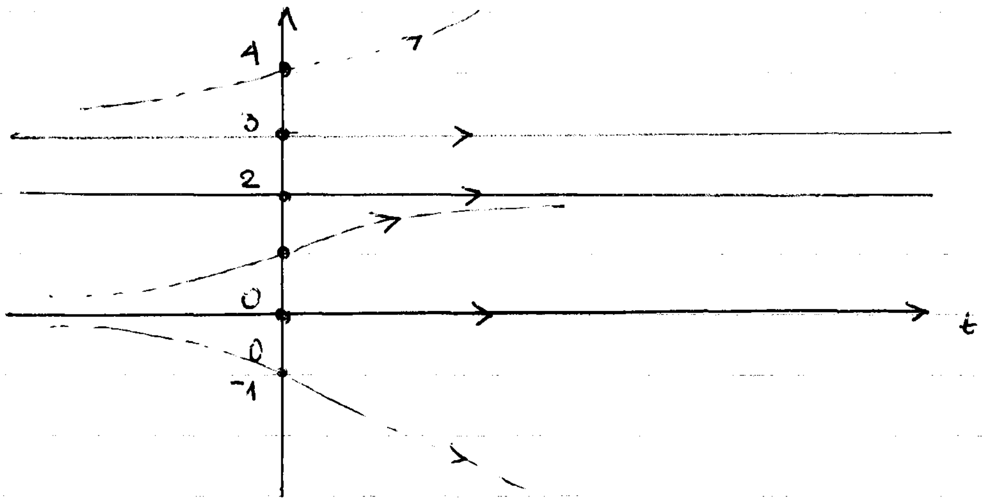


Η λύση $y(t)$, $y(0)=1$ είναι C^1 στό πεδίο ορισμού της, άρα και συνεχής. Αν υπήρχε t_0: $y(t_0)=3$, τότε τό μονοσήμαντο δέν θά ίσχυε γιά τό Π.Α.Τ: $y'=f(t,y)$, $y(t_0)=3$. Επομένως $y(t)<3 \quad \forall t\in\mathbb{R}$.

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση:

$$y'(t)=(y-2)(y-3)y := f(y)$$

Τι συμπέρασμα προκύπτει από τό θεώρημα υπαρξης-μοναδικότητας γιά τις λύσεις πού ικανοποιούν: (α) $y(0)=4$, (β) $y(0)=3$, (γ) $y(0)=1$, (δ) $y(0)=$



$y(0) = 0, 2, 3 \Rightarrow y(t) = 0, 2, 3$ γιά κάθε t λόγω μονοσήμαντο

$y(0) = 4 \Rightarrow y(t) \geq 3$ γιά κάθε t, $y(0) = 1 \Rightarrow 0 < y(t) < 2$

γιά κάθε t, $y(0) = -1 \Rightarrow y(t) < 0$ γιά κάθε t

Aν $y(0) = 4$ καί $y(t) > 3$ τότε $y'(t) > 0$ καί $y(t) \uparrow$

Aν $y(0) = 1$, $y'(t) > 0$ καί $y(t) \to 2$. Aν $y(0) = -1 \Rightarrow y'(t) < 0$

καί $y \downarrow$, $y \to -\infty$