Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Εξετάζουμε εξισώσεις της μορφής:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b(t)$$

(συμβολικά: $L(y) = b$, όπου $L(\cdot)$ ο τελεστής $L(y) := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y$) και της αντίστοιχης ομογενούς: $L(y) = 0$. Απλοποιούμε με την μελέτη εξισώσεων $2^{ης}$ τάξης πριν την παρουσίαση της γενικής περίπτωσης.

Ομογενής εξίσωση $2^{ης}$ τάξης:

Μελετάμε την ομογενή εξίσωση: $L(y) := y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Θέτοντας $y = e^{rt}$ έχουμε:

$$L(e^{rt}) = (r^2 + a_1 r + a_2)e^{rt} = 0$$

Άρα, η συνάρτηση e^{rt} είναι λύση αν η r είναι ρίζα της εξίσωσης $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$. Ορίζουμε ως $p(r) = r^2 + a_1 r + a_2$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης. Το πολυώνυμο $p(r)$ έχει πάντοτε δύο ρίζες, r_1 και r_2 (πραγματικές ή μιγαδικές).

Αν $r_1 \neq r_2$ οι συναρτήσεις $e^{r_1 t}$ και $e^{r_2 t}$ είναι δύο διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης $L(y) = 0$.

Αν $r_1 = r_2$, τότε έχουμε $L(e^{rt}) = p(r)e^{rt}$ όπου $p(r) = (r - r_1)^2$ και έχουμε $p(r_1) = 0$ και $p'(r_1) = 0$. Έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial r} \underbrace{L(e^{rt})}_{p(r)e^{rt}} = L\left(\frac{\partial}{\partial r}(e^{rt})\right) = L(t e^{rt})$$

$$= (p'(r) + r\, p(r))e^{rt} = 0$$

Θέτοντας $r=r_1$ έχουμε $L(te^{r_1 t}) = (\underbrace{p'(r_1)}_{0} + r_1 \underbrace{p(r_1)}_{0})e^{r_1 t} = 0$
και επομένως $e^{r_1 t}$ και $te^{r_1 t}$ είναι δύο διαφορετικές λύσεις.

<u>Θεώρημα</u>: Θεωρούμε την εξίσωση:

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

(α) Αν οι r_1, r_2 είναι διακεκριμένες λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$p(r) = r^2 + a_1 r + a_2$$

τότε οι συναρτήσεις $y_1(t) = e^{r_1 t}$, $y_2(t) = e^{r_2 t}$ είναι λύσεις της $L(y)=0$.

(β) Αν r_1 είναι διπλή ρίζα του $p(r)$, δηλ $p(r) = (r-r_1)^2$, τότε οι συναρτήσεις $y_1(t) = e^{r_1 t}$ και $y_2(t) = te^{r_1 t}$ είναι λύσεις της $L(y)=0$.

Αν y_1 και y_2 είναι λύσεις της $L(y)=0$, τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ είναι επίσης λύση:

$$L(y) = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1 (c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_2 (c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

$$= c_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + c_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0$$

Γιά $c_1 = c_2 = 0$ έχουμε $y(t) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (τετριμμένη λύση).

<u>Ορισμός</u>: Το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.) γιά την εξίσωση $L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ είναι τό πρόβλημα εύρεσης λύσης $y = \varphi(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $\varphi(t_0) = \alpha$, $\varphi'(t_0) = \beta$ όπου $t_0 \in \mathbb{R}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα</u> (ύπαρξης). Γιά κάθε $t_0 \in \mathbb{R}$ καί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ υπάρχει μία λύση $y = \varphi(t)$ του ΠΑΤ: $L(y)=0$, $y(t_0)=\alpha$, $y'(t_0)=\beta$ στό διάστημα $(-\infty, \infty)$.

<u>Απόδειξη</u>: Αν y_1, y_2 οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς πού παρουσιάστηκαν στό προηγούμενο θεώρημα θά δείξουμε ότι υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ νά είναι λύση του Π.Α.Τ $\forall$ γιά κάθε (α, β, t_0). Η y ικανοποιεί τίς αρχικές συνθήκες αν

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= \alpha \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= \beta \end{aligned}\right\}.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Υπάρχει (μοναδική) λύση ως πρός c_1, c_2 (γιά κάθε α, β) αν καί μόνο αν

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0$$

Επαληθεύουμε τη σχέση αυτή γιά $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = e^{r_2 t}$ $(r_1 \neq r_2)$ καί $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = t e^{r_1 t}$ $(r_1 = r_2)$. Στήν πρώτη περίπτωση

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{bmatrix} =$$

$$= (r_2 - r_1)\, e^{r_1 t_0} \cdot e^{r_2 t_0} \neq 0 \qquad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$$

Στήν δεύτερη περίπτωση:

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 t_0} & t_0 e^{r_1 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & e^{r_1 t_0} + r_1 t_0 e^{r_1 t_0} \end{bmatrix}$$

$$= e^{2r_1 t_0} + \cancel{r_1 t_0} e^{2r_1 t_0} - \cancel{r_1 t_0} e^{2r_1 t_0}$$

$$= e^{2r_1 t_0} \neq 0 \qquad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}.$$

Άρα υπάρχει μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των λύσεων της ομογενούς $L(y)=0$, y_1 και y_2, πού ικανοποιούν το Π.Α.Τ.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\varphi(t)$ μία λύση της $L(y)=0$. Ορίζουμε την νόρμα της $\varphi(t)$ ως: $\|\varphi(t)\| = \left[\varphi^2(t) + (\varphi'(t))^2\right]^{1/2}$.

<u>Λήμμα</u>: Έστω $\varphi(t)$ λύση της εξίσωσης $L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ ορισμένη σε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in I$. Τότε για κάθε $t \in I$:

$$\|\varphi(t_0)\| e^{-k|t-t_0|} \leq \|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| e^{k|t-t_0|}$$

όπου $\|\varphi(t)\|^2 = \varphi^2(t) + (\varphi'(t))^2$ και $k = 1 + |a_1| + |a_2|$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varphi(t)$ λύση της $L(y)=0$. Θέτουμε $u(t) = \|\varphi(t)\|^2$.
Τότε

$$u' = 2\varphi(t)\varphi'(t) + 2\varphi'(t)\varphi''(t)$$

$$\Rightarrow |u'(t)| \leq 2|\varphi(t)|\,|\varphi'(t)| + 2|\varphi'(t)|\cdot|\varphi''(t)|$$

Επειδή $L(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi'' = -\alpha_1\varphi' - \alpha_2\varphi$, οπότε:

$$|\varphi''(t)| \leq |\alpha_1|\,|\varphi'(t)| + |\alpha_2|\,|\varphi(t)|$$

και επομένως:

$$|u'(t)| \le \underbrace{2|\varphi(t)||\varphi'(t)|}_{\le |\varphi|^2+|\varphi'|^2} + 2|\varphi'(t)|\left(|\alpha_1|\,|\varphi'(t)|+|\alpha_2|\,|\varphi(t)|\right)$$

$$\le |\varphi|^2+|\varphi'|^2+2|\alpha_1|\,|\varphi'|^2+\underbrace{2|\alpha_2|\,|\varphi||\varphi'|}_{\le \cancel{2}|\alpha_2|(\varphi^2+(\varphi')^2)}$$

$$\le (1+|\alpha_2|)\varphi^2 + (1+2|\alpha_1|+\cancel{2}|\alpha_2|)(\varphi')^2$$

$$\le 2(\underbrace{1+\cancel{2}|\alpha_1|+\cancel{2}|\alpha_2|}_{k})(\underbrace{\varphi^2+\varphi'^2}_{u^2})$$

ή $\quad |u'(t)| \le 2k\,u(t) \iff -2k\,u(t) \le u'(t) \le 2k\,u(t)$

Η δεξιά ανισότητα γράφεται: $u'-2ku \le 0$. Πολλαπλασιάζοντας με e^{-2kt}:

$$e^{-2kt}(u'-2ku) \le 0 \Rightarrow (e^{-2kt}u)' \le 0.$$

Ολοκληρώνοντας από t_0 έως t (όπου $t_0<t$)

$$\int_{t_0}^{t}(e^{-2k\tau}u(\tau))'\,d\tau = e^{-2kt}u(t) - e^{-2kt_0}u(t_0) \le 0.$$

$$\Rightarrow u(t) \le u(t_0)\,e^{2k(t-t_0)}$$

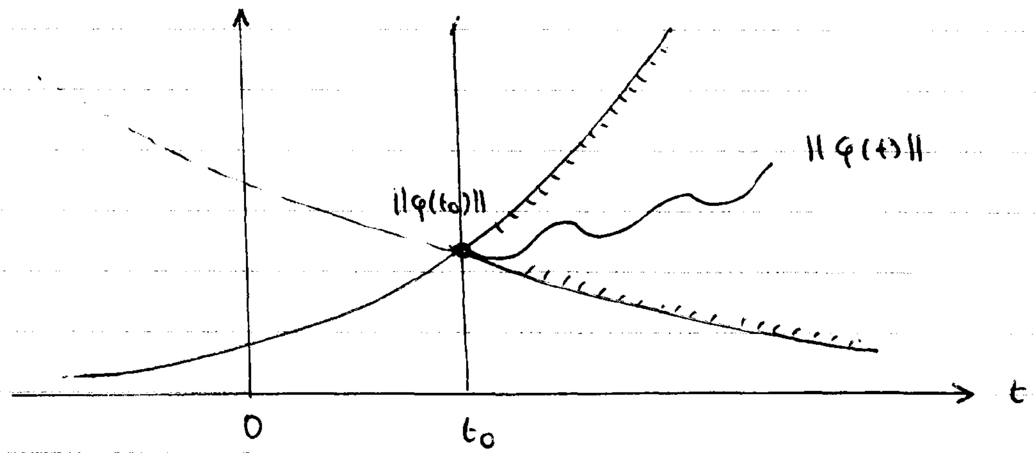
$$\Rightarrow \|\varphi(t)\| \le \|\varphi(t_0)\|\,e^{k(t-t_0)} \qquad t \ge t_0.$$

Ανάλογα, η αριστερή ανισότητα γιά $t \ge t_0$ δίνει:

$$\|\varphi(t_0)\|\,e^{-k(t-t_0)} \le \|\varphi(t)\| \qquad t \ge t_0.$$

Συνεπώς για $t \geq t_0$ έχουμε

$$\|\varphi(t_0)\| e^{-k(t-t_0)} \leq \|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| e^{k(t-t_0)} \qquad t \geq t_0$$



Ολοκληρώνοντας τις δύο ανισότητες από t έως t_0 $(t \leq t_0)$ προκύπτει η δεύτερη ανισότητα. □

<u>Θεώρημα</u> (Μοναδικότητα): Έστω $\alpha, \beta, t_0 \in \mathbb{R}$. Σε κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ με $t_0 \in I$ υπάρχει το πολύ μία λύση του Π.Α.Τ

$$L(y) = 0 \ , \ y(t_0) = \alpha \ , \ y'(t_0) = \beta .$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω φ, ψ δύο λύσεις του Π.Α.Τ. Ανθέτουμε $x = \varphi - \psi$, τότε

$$L(x) = L(\varphi - \psi) = L(\varphi) - L(\psi) = 0$$

$$x(t_0) = \varphi(t_0) - \psi(t_0) = \alpha - \alpha = 0 \ , \ x'(t_0) = \varphi'(t_0) - \psi'(t_0) = 0$$

Συνεπώς $\|x(t_0)\| = 0$ και από το προηγούμενο Θεώρημα:
$\|x(t)\| = 0 \quad \forall t \in I \implies x(t) = 0 \quad \forall t \in I \implies \varphi(t) = \psi(t)$
$\forall t \in I$. □

Θεώρημα: Έστω y_1, y_2 δύο λύσεις της $L(y)=0$ πού δίδονται από προηγούμενο θεώρημα στίς περιπτώσεις $r_1 \neq r_2$ και $r_1 = r_2$. Αν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $\varphi = c_1 y_1 + c_2 y_2$ είναι μία λύση της $L(y)$ στό διάστημα $(-\infty, \infty)$. Αντίστροφα, αν φ είναι λύση της $L(y)=0$ στό $(-\infty,\infty)$, τότε υπάρχουν μοναδικά σταθερά c_1, c_2 έτσι ώστε $\varphi = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Απόδειξη: Το πρώτο σκέλος προκύπτει από τήν σχέση:

$$L(\varphi) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$$

Γιά τό αντίστροφο, έστω μία λύση φ γιά $t_0 \in I$ πού ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $\varphi(t_0)=\alpha$, $\varphi'(t_0)=\beta$. Στην απόδειξη του Θεωρήματος ύπαρξης κατασκευάσαμε λύση ψ της $L(y)=0$ που ικανοποιεί τίς συνθήκες $\psi(t_0)=\alpha$ καί $\psi'(t_0)=\beta$, της μορφής:

$$\psi = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

οπου c_1 και c_2 ορίζονται μονοσήμαντα. Οι λύσεις φ καί ψ ικανοποιούν την $L(y)=0$ καί τίς αρχικές συνθήκες, άρα λόγω του μονοσήμαντου συμπίπτουν καί άρα $\varphi = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Γενική Λύση: Τα βήματα πού απαιτούνται γιά τήν λύση της γενικής εξίσωσης

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση:

$$p(r) = r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

με ρίζες:

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

(α) Αν $a_1^2 - 4a_2 > 0$, οι ρίζες $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ με $r_1 \neq r_2$. Η γενική λύση είναι:

$$\psi(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

(β) Αν $a_1^2 - 4a_2 < 0$ οι ρίζες είναι μιγαδικές συζυγείς. Έστω $r_{1,2} = \sigma \pm i\omega$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$. Τότε η γενική λύση είναι

$$\psi(t) = k_1 e^{(\sigma + i\omega)t} + k_2 e^{(\sigma - i\omega)t}$$

$$= e^{\sigma t}\left[k_1 \cos\omega t + i k_1 \sin\omega t + k_2 \cos\omega t - i k_2 \sin\omega t\right]$$

$$= e^{\sigma t}\left[(k_1 + k_2)\cos\omega t + i(k_1 - k_2)\sin\omega t\right].$$

$$= e^{\sigma t}\left[c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\right]$$

όπου $c_1 = k_1 + k_2$, $c_2 = i(k_1 - k_2)$, αυθαίρετες σταθερές.

(γ) Αν $a_1^2 - 4a_2 = 0$, τότε $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$ και η γενική λύση είναι

$$\psi(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$
$\Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 2 \Rightarrow \psi(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$.

Παράδειγμα: Νά βρεθή η γενική λύση της εξίσωσης:

$$y'' + y' + y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 + r + 1 = \left(r+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ με ρίζες:

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Συνεπώς: $\psi(t) = e^{-t/2}\left[c_1 \cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right]$. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα: Νά βρεθή η γενική λύση της εξίσωσης:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (r-3)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 3$ (διπλή ρίζα). Συνεπώς:

$$\psi(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα: Νά λυθή τό Π.Α.Τ

$$y'' - 6y' + 25y = 0 \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = 1$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - 6r + 25 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (r-3)^2 + 4^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 3 \pm i4$ Επομένως:

$$\psi(t) = c_1 e^{3t}\cos 4t + c_2 e^{3t}\sin 4t = e^{3t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t).$$

$$\Rightarrow \psi'(t) = \cancel{3c_1 e^{3t}\cos 4t}\ 3e^{3t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t) + e^{3t}(-4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t)$$

$$\Rightarrow \psi'(t) = e^{3t}(3c_1+4c_2)\cos 4t + e^{3t}(3c_2-4c_1)\sin 4t.$$

Επομένως:

$$\psi(0) = \underline{c_1 = 3}$$

$$\psi'(0) = 3c_1 + 4c_2 = 1 \Rightarrow 9 + 4c_2 = 1 \Rightarrow \underline{c_2 = -2}$$

Επομένως: $\psi(t) = e^{3t}(3\cos 4t - 2\sin 4t)$

Γραμμική ανεξαρτησία

Ορισμός: Οι συναρτήσεις $y_1, y_2, \dots, y_n$, $y_i : I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ ονομάζονται γραμμικά ανεξάρτητες επί του I (ως προς το σώμα $\mathbb{C}$) αν υπάρχουν $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) = 0 \qquad \forall\, t \in I.$$

Οι συναρτήσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $I \subseteq \mathbb{R}$ αν

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) = 0 \quad \forall\, t \in I \quad \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

Παράδειγμα: Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= t, \quad t \in [-1, 1] \\ y_2(t) &= |t|, \quad t \in [-1, 1] \end{aligned}\right\}$$

Οι y_1, y_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες στο διάστημα $[0, 1]$ και στο διάστημα $[-1, 0]$ αλλά γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $[-1, 1]$.

Από τό παράδειγμα προκύπτει ότι αν $\{y_i(t)\}_{i=1}^n$ γραμμικά ανεξάρτητες σέ διάστημα I, τότε οι $\{y_i(t)\}_{i=1}^n$ δέν είναι αναγκαστικά γραμμικά ανεξάρτητες σέ ένα υποσύνολο του I. Αντίστροφα αν $\{y_i(t)\}_{i=1}^n$ γραμμικά ανεξάρτητες στό I, τότε είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες σέ κάθε διάστημα $I^* \supseteq I$.

<u>Παράδειγμα:</u> Οι συναρτήσεις $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = e^{r_2 t}$ $(r_1 \neq r_2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες σέ κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$: Έστω ότι:

$$c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = 0 \qquad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \quad c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)t} = 0 \qquad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \quad \left(c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)t}\right)' = c_2 (r_2 - r_1) e^{(r_2 - r_1)t} = 0 \qquad \forall t \in I.$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

<u>Παράδειγμα:</u> Οι συναρτήσεις $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = t e^{r_1 t}$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες σέ κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$:

$$c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} = 0 \quad \forall t \in I \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 t = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

<u>Ορισμός:</u> Η ορίζουσα Wronski δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων $y_1(t)$, $y_2(t)$ που ορίζονται σέ διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, ορίζεται από τήν συνάρτηση:

$$W(y_1, y_2)(t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t)$$

<u>Θεώρημα:</u> Δύο λύσεις y_1, y_2 της $L(y) = 0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

σέ διάστημα I αν καί μόνο αν $W(y_1,y_2) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω ότι $W(y_1,y_2)(t) \neq 0 \ \forall t\in I$ καί έστω c_1, c_2 σταθερές ώστε $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \quad \forall t \in I$. Παραγωγίζοντας έχουμε ότι: $c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) = 0 \quad \forall t\in I$. Γιά κάποιο $t_0 \in I$ έχουμε

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underline{0} \qquad (*)$$

καί εφόσον $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$, η μοναδική λύση είναι $c_1 = c_2 = 0$.
Αρα οί λύσεις y_1 καί y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στό I.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $y_1(t)$ καί $y_2(t)$ είναι λύσεις γραμμικά ανεξάρτητες στό I. Θά δείξουμε ότι $W(y_1,y_2)(t) \neq 0 \ \forall t\in I$: Έστω (γιά αντίφαση) ότι υπάρχει $t_0 \in I$: $W(y_1,y_2)(t_0) = 0$. Τότε τό σύστημα $(*)$ έχει μή μηδενική λύση, $(c_1^*, c_2^*) \neq (0,0)$. Γιά μία τέτοια λύση θεωρούμε τήν συνάρτηση $y = c_1^* y_1 + c_2^* y_2$. Προφανώς $L(y) = 0$, $y(t_0) = c_1^* y_1(t_0) + c_2^* y_2(t_0) = 0$ καί $y'(t_0) = c_1^* y_1'(t_0) + c_2^* y_2'(t_0) = 0$. Από τό θεώρημα του μονοσήμαντου (γιά τό Π.Α.Τ : $L(y)=0$, $y(t_0)=0$, $y'(t_0)=0$) έχουμε ότι $y(t)=0$ $\forall t \in I \Rightarrow c_1^* y_1(t) + c_2^* y_2(t) = 0 \quad \forall t\in I$, μέ $(c_1^*, c_2^*) \neq (0,0)$. Η τελευταία σχέση αντιφάσκει στό ότι οι y_1 καί y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στό I. Συνεπώς δέν υπάρχει $t_0 \in I$: $W(y_1,y_2)(t_0) = 0$ δηλ. $W(y_1,y_2)(t) \neq 0 \quad \forall t\in I$. □

Τό επόμενο θεώρημα δείχνει ότι γιά νά αποφανθούμε γιά τήν γραμμική ανεξαρτησία δύο λύσεων της $L(y)=0$ αρκεί ο υπολογισμός της ορίζουσας Wronski σέ ένα μόνο σημείο $t_0 \in I$ (αντί γιά κάθε σημείο του I).

Θεώρημα: Έστω y_1, y_2 δύο λύσεις της $L(y)=0$ σε διάστημα I και $t_0 \in I$. Τότε, οι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I αν και μόνο αν $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$.

Απόδειξη: Αν y_1, y_2 λύσεις της $L(y)=0$ γραμμικά ανεξάρτητες στο I, τότε $W(y_1,y_2)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$. Ιδιαίτερα για $t=t_0$ $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$. Αντίστροφα, έστω ότι $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$. Θεωρούμε τον γραμμικό συνδυασμό $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0$, $t \in I$. Τότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) = 0 \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Εφόσον $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$ η μοναδική λύση είναι $c_1 = c_2 = 0$ και επομένως οι y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. □

Θεώρημα: Έστω y_1, y_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$ στο διάστημα I. Τότε κάθε λύση ψ της $L(y)=0$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως: $\psi = c_1^* y_1 + c_2^* y_2$ όπου c_1^*, c_2^* κατάλληλες σταθερές.

Απόδειξη: Έστω $t_0 \in I$. Επειδή y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις στο I, $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$. Έστω $\psi(t)$ λύση της $L(y)=0$ με $\psi(t_0)=\alpha$ $\psi'(t_0)=\beta$. Θεωρούμε τις εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= \alpha \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= \beta \end{aligned}\right\}$$

Επειδή $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$ το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση, έστω (c_1^*, c_2^*). Τότε η συνάρτηση $\varphi = c_1^* y_1 + c_2^* y_2$ ικανοποιεί τις σχέσεις $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = \alpha$, $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = \beta$, $L(\varphi) = L(\psi) = 0$. Από το

Θεώρημα του μονοσήμαντου ισχύει ότι $\varphi(t) = \psi(t)$ $\forall t \in I$ και συνεπώς $\psi(t) = c_1^* y_1 + c_2^* y_2$. $\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Το προηγούμενο Θεώρημα λέει με όρους γραμμικής άλγεβρας ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1, y_2 της $L(y)=0$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων.

<u>Θεώρημα</u>: Αν y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της $L(y)=0$ σε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in I$, τότε

$$W(y_1,y_2)(t) = e^{-a_1(t-t_0)} W(y_1,y_2)(t_0)$$

<u>Απόδειξη</u>: Αφού y_1, y_2 είναι λύσεις της $L(y)=0$, έχουμε:

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 \quad \text{και} \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με $-y_2$ τη δεύτερη με y_1 και προσθέτοντας προκύπτει:

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0$$

Είναι: $W(y_1,y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$, $W'(y_1,y_2) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$

Συνεπώς.

$$W' + a_1 W = 0 \Rightarrow W(t) = c e^{-a_1 t}$$

$$\Rightarrow W(t_0) = c e^{-a_1 t_0} \Rightarrow c = e^{a_1 t_0} W(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(t) = e^{-a_1(t-t_0)} W(t_0) \qquad \square$$

Συμπεραίνουμε ότι $W(t_0) = 0 \Rightarrow W(t) = 0$ $\forall t \in I$ και ότι $W(t_0) > 0 \Rightarrow W(t) > 0$ $\forall t \in I$, $W(t_0) < 0 \Rightarrow W(t) < 0$ $\forall t \in I$.

Η μή ομογενής εξίσωση τάξης 2

Θεωρούμε την εξίσωση: $L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = b(t)$, όπου $b \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Έστω $\psi_p(t)$ μία (ειδική) λύση. Αν $\psi(t)$ είναι άλλη τυχούσα λύση, τότε

$$L(\psi - \psi_p) = L(\psi) - L(\psi_p) = b(t) - b(t) = 0, \quad t \in I$$

δηλ. η $\psi - \psi_p$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Συνεπώς, αν y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y) = 0$, τότε υπάρχουν μοναδικές σταθερές c_1, c_2 ώστε:

$$\psi - \psi_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$\Rightarrow \quad \psi = \psi_p + c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (*)$$

Αντίστροφα, γιά κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής:

$$L(\psi) = L(\psi_p) + c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) = b(t)$$

Επομένως η γενική λύση της $L(y) = b$ είναι της μορφής $(*)$ όπου ψ_p είναι μία ειδική λύση της $(*)$ και y_1, y_2 δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y) = 0$.

Γενική μέθοδος υπολογισμού ειδικής λύσης της μή-ομογενούς (μέθοδος Lagrange).

Η γενική λύση της $L(y) = 0$ είναι της μορφής: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ όπου c_1, c_2 σταθερές. Η μέθοδος "μεταβολής παραμέτρων" προσπαθεί νά βρεί λύση της $L(y) = b(t)$ της μορφής $y(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t)$, δηλ. αντικαθιστά τίς σταθερές c_1, c_2 με συναρτήσεις της μεταβλητής t. Πρέπει να ισχύει:

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' + a_1 (c_1 y_1 + c_2 y_2)' + a_2 (c_1 y_1 + c_2 y_2) = b(t)$$

$\Rightarrow$ Είναι: $(c_1 y_1 + c_2 y_2)' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$

και:

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2)'' = c_1'' y_1 + c_1' y_1' + c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2'' y_2 + c_2' y_2' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

$$= c_1'' y_1 + 2c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2'' y_2 + 2c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

Επομένως:

$$c_1'' y_1 + 2c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2'' y_2 + 2 c_2' y_2' + c_2 y_2'' +$$
$$+ a_1 (c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2') + a_2 (c_1 y_1 + c_2 y_2) = b(t).$$

$$\Rightarrow c_1 \overset{0}{\cancel{L(y_1)}} + c_2 \overset{0}{\cancel{L(y_2)}} + 2(c_1' y_1' + c_2' y_2') + (c_1'' y_1 + c_2'' y_2) + a_1 \underbrace{(c_1' y_1 + c_2' y_2)}_{0} = b(t). \quad (*)$$

Έστω ότι $y_1 c_1' + y_2 c_2' = 0$. Παραγωγίζοντας:

$$y_1' c_1' + y_1 c_1'' + y_2' c_2' + y_2 c_2'' = 0.$$

Η (*) γράφεται ως:

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = b(t)$$

Θεωρούμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} y_1 c_1' + y_2 c_2' &= 0 \\ y_1' c_1' + y_2' c_2' &= b(t) \end{aligned}\right\}.$$

Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{bmatrix} y_2' & -y_1' \\ -y_2 & y_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

$$= \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1'(t) &= -\frac{y_2(t)\, b(t)}{W(y_1, y_2)(t)} \\ c_2'(t) &= \frac{y_1(t)\, b(t)}{W(y_1, y_2)(t)} \end{aligned}\right\}$$

Παρατηρούμε ότι $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ αφού y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Ολοκληρώνοντας

$$\left.\begin{aligned} c_1(t) &= -\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)\, b(s)}{W(y_1, y_2)(s)}\, ds \\ c_2(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)\, b(s)}{W(y_1, y_2)(s)}\, ds \end{aligned}\right\}$$

όπου $t_0 \in I$. Επομένως η ειδική λύση έχει τη μορφή:

$$\psi_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{[y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)]\, b(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\, ds$$

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε την $L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = b(t)$ όπου $p(r) = r^2 + a_1 r + a_2 = (r-r_1)(r-r_2)$. Έστω ότι $r_1 \neq r_2$. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$ είναι $y_1 = e^{r_1 t}$ και $y_2 = e^{r_2 t}$ και

$$W(y_1,y_2)(s) = \begin{vmatrix} e^{r_1 s} & e^{r_2 s} \\ r_1 e^{r_1 s} & r_2 e^{r_2 s} \end{vmatrix} =$$

$$= (r_2 - r_1)\, e^{(r_1+r_2)s}$$

Επίσης: $y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s) = e^{r_1 s}e^{r_2 t} - e^{r_1 t}e^{r_2 s}$

Επομένως:

$$\psi_p(s) = \int_{t_0}^{t} \frac{e^{r_1 s}e^{r_2 t} - e^{r_1 t}e^{r_2 s}}{(r_2-r_1)\, e^{(r_1+r_2)s}}\, b(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{r_2-r_1} \int_{t_0}^{t} \left(e^{r_2(t-s)} - e^{r_1(t-s)}\right) b(s)\, ds$$

και η γενική λύση της $L(y) = b(t)$ είναι

$$\psi(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{1}{r_1-r_2} \int_{t_0}^{t} \left(e^{r_1(t-s)} - e^{r_2(t-s)}\right) b(s)\, ds$$

όπου $t_0 \in I$ και c_1, c_2 σταθερές.

Παράδειγμα: Νά λυθεί η εξίσωση

$$y'' - y' - 2y = e^{-t}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $P(r) = r^2 - r - 2 = (r+1)(r-2)$
$\Rightarrow y_1 = e^{-t}$, $y_2 = e^{2t}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς. Ειδική λύση (μη ομογενούς της μορφής):

$$\psi_p = c_1(t)\, e^{-t} + c_2(t)\, e^{2t}$$

Τό σύστημα γιά c_1', c_2' είναι:

$$\left.\begin{aligned} e^{-t} c_1' + e^{2t} c_2' &= 0 \\ -e^{-t} c_1' + 2e^{2t} c_2' &= e^{-t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 3e^{2t} c_2' &= e^{-t} \\ c_1' &= -e^{3t} c_2' \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$c_2' = \frac{1}{3} e^{-3t}, \quad c_1' = -\frac{1}{3}$$

Επομένως: $c_1(t) = \int_0^t -\frac{1}{3}\, ds = -\frac{t}{3}$

$$c_2(t) = \frac{1}{3}\int_0^t e^{-3s}\, ds = \frac{1}{3}\left[\frac{e^{-3s}}{3}\right]_t^0 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(1 - e^{-3t}\right)$$

$$\Rightarrow \psi_p = -\frac{1}{3} t e^{-t} + \frac{1}{9}\left(1 - e^{-3t}\right) e^{2t}$$

$$\Rightarrow \psi_p = -\frac{1}{3} t e^{-t} + \frac{1}{9} e^{2t} - \frac{1}{9} e^{-t}$$

Επομένως η γενική λύση της μή ομογενούς είναι:

$$\psi = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{3} t e^{-t} + \frac{1}{9} e^{2t} - \frac{1}{9} e^{-t}$$

$$= \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{2t} - \frac{1}{3} t e^{-t} \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}).$$

<u>Ομογενής εξίσωση τάξης n</u>

Εξίσωση της μορφής:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y(t) = 0$$

Επιχειρούμε νά βρούμε λύσεις της μορφής: $y = e^{rt}$ Έχουμε

$$L(e^{rt}) = p(r) e^{rt}, \quad p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$$

(χαρακτηριστικό πολυώνυμο). Αν r_1 είναι ρίζα του $p(r)$, τότε $e^{r_1 t}$ είναι λύση της $L(y)=0$. Γενικότερα αν r_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας m_1, τότε

$$p(r_1) = 0, \ p'(r_1) = 0, \ \ldots, \ p^{(m_1-1)}(r_1) = 0$$

Παραγωγίζοντας k φορές:

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k}\left(L(e^{rt})\right) = \frac{\partial^k}{\partial r^k}\left(p(r) e^{rt}\right)$$

Το αριστερό μέλος (λόγω γραμμικότητας) γράφεται

$$L\left(\frac{\partial^k}{\partial r^k} e^{rt}\right) = L(t^k e^{rt}).$$

Τό δεξιό μέλος με χρήση διωνυμικού Θεωρήματος:

$$\left[p^{(k)}(r) + k\, p^{(k-1)}(r)\, t + \frac{k(k-1)}{2!}\, p^{(k-2)}(r)\, t^2 + \dots + p(r)\, t^k \right] e^{rt}$$

Αν $r = r_1$, $k = 0, 1, \dots, m_1 - 1$, τότε $L(t^k e^{r_1 t}) = 0$, δηλ οι συναρτήσεις $\{e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}, \dots, t^{m_1 - 1} e^{r_1 t}\}$ είναι λύσεις της $L(y) = 0$.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $L(y) = 0$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(r) = (r - r_1)^{m_1} (r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_s)^{m_s}$$

$r_i \neq r_j$ γιά $i \neq j$. Τότε οι λύσεις:

$$\left.\begin{array}{l} e^{r_1 t},\ t e^{r_1 t}, \dots, t^{m_1 - 1} e^{r_1 t} \\ e^{r_2 t},\ t e^{r_2 t}, \dots, t^{m_2 - 1} e^{r_2 t} \\ \vdots \\ e^{r_s t},\ t e^{r_s t}, \dots, t^{m_s - 1} e^{r_s t} \end{array}\right\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y) = 0$ σέ κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η δ. εξίσωση: $y''' - 3y' + 2y = 0$. Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$p(r) = r^3 - 3r + 2 = (r-1)(r^2 + r - 2)$$

$$= (r-1)(r-1)(r+2) = (r-1)^2 (r+2)$$

Οι συναρτήσεις $y_1 = e^t$, $y_2 = t e^t$, $y_3 = e^{-2t}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης. Η γενική λύση είναι:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-2t}$$