Πρόβλημα αρχικών τιμών.

Ορισμός: Ένα Π.Α.Τ γιά τήν εξίσωση:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \quad , t \in I$$

Είναι τό πρόβλημα εύρεσης λύσης $y = \varphi(t)$ πού ικανοποιεί τίς αρχικές συνθήκες $\varphi(t_0) = \xi_1$, $\varphi'(t_0) = \xi_2, \ldots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = \xi_n$, όπου $t_0 \in I$, ξ_i δοσμένες σταθερές.

Θεώρημα: Έστω φ λύση της εξίσωσης $L(y) = 0$ ορισμένη στό $I \subseteq \mathbb{R}$. Έστω $t_0 \in I$. Τότε, γιά κάθε $t \in I$:

$$\| \varphi(t_0) \| e^{-k|t-t_0|} \leq \| \varphi(t) \| \leq \| \varphi(t_0) \| e^{k|t-t_0|}$$

όπου: $\| \varphi(t) \| := \left[|\varphi(t)|^2 + |\varphi'(t)|^2 + \cdots + |\varphi^{(n-1)}(t)|^2 \right]^{1/2}$

καί $k = 1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

Απόδειξη: Παρόμοια μέ την περίπτωση $n=2$.

Θεώρημα (Μονοσήμαντο). Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ σταθερές καί $t_0 \in \mathbb{R}$. Σέ κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ μέ $t_0 \in I$ υπάρχει τό πολύ μία λύση ~~...~~ φ της εξίσωσης $L(y) = 0$ πού ικανοποιεί: $\varphi(t_0) = \xi_1$, $\varphi'(t_0) = \xi_2, \ldots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = \xi_n$.

Απόδειξη: Έστω φ καί ψ λύσεις του Π.Α.Τ. Τότε $x = \varphi - \psi$ ικανοποιεί τήν εξίσωση $L(x) = L(\varphi) - L(\psi) = 0$ καί τίς αρχικές συνθήκες $x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$. Συνεπώς $\| x(t_0) \| = 0 \Rightarrow \| x(t) \| = 0 \;\; \forall t \in I$ από τό προηγούμενο θεώρημα $\Rightarrow x(t) = 0 \;\; \forall t \in I \Rightarrow \varphi(t) = \psi(t) \;\; \forall t \in I$. $\square$

Ορισμός: Η ορίζουσα Wronski $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ των συναρτήσεων $y_i \in C^{(n-1)}(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$, ορίζεται ως:

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \quad t \in I.$$

Θεώρημα: Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ λύσεις της $L(y)=0$ στό $I \subseteq \mathbb{R}$. Οι λύσεις αυτές είναι ανεξάρτητες στό I αν καί μόνο αν $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Απόδειξη: Παρόμοια με την περίπτωση $n=2$. Το αποτέλεσμα και η απόδειξη δέν εξαρτάται από το γεγονός ότι η εξίσωση έχει σταθερούς συντελεστές.

Θεώρημα: Έστω ότι $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ σταθερές καί $t_0 \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει λύση φ της εξίσωσης $L(y)=0$ ορισμένη στό διάστημα $(-\infty, \infty)$ πού ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες: $\varphi(t_0) = \xi_1$, $\varphi'(t_0) = \xi_2$, $\dots$, $\varphi^{(n-1)}(t_0) = \xi_n$.

Απόδειξη: Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ η γραμμικά ανεξάρτητα λύσεις της $L(y)=0$ στό $(-\infty, \infty)$. Θά δείξουμε ότι υπάρχουν $c_1, c_2, \dots, c_n$ μοναδικά ορισμένες σταθερές ώστε $\varphi := c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n$ νά είναι λύση της $L(y)$ πού ικανοποιεί τις συνθήκες $\varphi(t_0) = \xi_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = \xi_n$.
Γιά την λύση φ ισχύουν

$$\left.\begin{aligned} c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0) &= \xi_1 \\ &\ \vdots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0) &= \xi_n \end{aligned}\right\}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών $W(\varphi_1, \dots \varphi_n)(t) \neq 0$ σύμφωνα με προηγούμενο

Θεώρημα και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση ως προς τους συντελεστές c_i $\square$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)$ στο $I \subseteq \mathbb{R}$. Αν $c_1, c_2, \dots c_n$ είναι σταθερές, τότε η $\varphi = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ είναι επίσης λύση της $L(y)=0$ και κάθε λύση εκφράζεται στη μορφή αυτή.

<u>Απόδειξη</u>: Είναι:

$$L(\varphi) = L(c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n) = c_1 L(\varphi_1) + \dots + c_n L(\varphi_n) = 0$$

και συνεπώς η φ είναι λύση. Έστω φ μια λύση της $L(y)=0$. Υποθέτουμε ότι $\varphi(t_0) = \xi_1$, $\varphi'(t_0) = \xi_2, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = \xi_n$. Στην προηγούμενη απόδειξη είδαμε ότι υπάρχει μοναδική n-άδα σταθερών ώστε η $y = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ να είναι λύση του Π.Α.Τ: $L(y)=0$, $y(t_0) = \xi_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = \xi_n$. Από το Θεώρημα του μονοσήμαντου $\varphi = y$ πού αποδεικνύει ότι η φ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των φ_i.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ είναι λύσεις της $L(y)=0$ σε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in I$, τότε:

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)(t) = e^{-a_1(t-t_0)} W(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)(t_0)$$

<u>Απόδειξη</u>: Παρόμοια με την περίπτωση $n=2$. $\square$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ λύσεις της $L(y)=0$ σε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in I$. Οι λύσεις $\varphi_1, \dots \varphi_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I αν και μόνο αν $W(\varphi_1, \dots \varphi_n)(t_0) \neq 0$.

Απόδειξη: Οι λύσεις $\{\varphi_1, \dots \varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν $W(\varphi_1, \dots \varphi_n)(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$. Από τι προηγούμενο Θεώρημα η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με $W(\varphi_1, \dots \varphi_n)(t_0) \neq 0$. □

Παράδειγμα: Θεωρούμε γραμμική ομογενή $3^{ης}$ τάξης με χαρακτηρ. πολυώνυμο $p(r) = (r - r_1)^3 = r^3 - 3r_1 r^2 + 3r_1^2 r - r_1^3$. Συνεπώς $L(y) = y''' - 3r_1 y'' + 3r_1^2 y' - r_1^3 y = 0$ και $a_1 = -3r_1$. Παίρνοντας γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1 = e^{r_1 t}$, $y_2 = te^{r_1 t}$, $y_3 = t^2 e^{r_1 t}$,

$$W(y_1, y_2, y_3)(t) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & te^{r_1 t} & t^2 e^{r_1 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & (1 + r_1 t)e^{r_1 t} & (2t + r_1 t^2)e^{r_1 t} \\ r_1^2 e^{r_1 t} & (2r_1 + r_1^2 t)e^{r_1 t} & (2 + 4r_1 t + r_1^2 t^2)e^{r_1 t} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow W(y_1, y_2, y_3)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & 1 & 0 \\ r_1^2 & 2r_1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Επομένως: $W(y_1, y_2, y_3)(t) = e^{3r_1 t} \underbrace{W(y_1, y_2, y_3)(0)}_{2} = 2e^{3r_1 t}$

Γενική λύση ομογενούς τάξης n

Έστω: $L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y(t) = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \dots, n$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$p(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

(α) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $r_1, r_2, \dots r_n$ (διακεκριμένες και πραγματικές) τότε οι συναρτήσεις

$$\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}\}$$ είναι n-ανεξάρτητες λύσεις.

(β) Σε κάθε πραγματική ρίζα r_i με αλγεβρική πολλαπλότητα $m \geq 1$ αντιστοιχούν m γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις:

$$\{ e^{r_i t}, \; t e^{r_i t}, \dots, \; t^{m-1} e^{r_i t} \}$$

(γ) Σε κάθε ζεύγος μιγαδικών συζυγών λύσεων $r_i = \sigma + i\omega$ και $\bar{r}_i = \sigma - i\omega$ με πολλαπλότητα $m \geq 1$ αντιστοιχούν οι παρακάτω $2m$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις:

$$\left.\begin{array}{l} e^{\sigma t}\cos\omega t, \;\; t e^{\sigma t}\cos\omega t, \dots, \; t^{m-1} e^{\sigma t}\cos\omega t \\ e^{\sigma t}\sin\omega t, \;\; t e^{\sigma t}\sin\omega t, \dots, \; t^{m-1} e^{\sigma t}\sin\omega t \end{array}\right\}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Νά βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης:

$$y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^4 + 3r^3 + 3r^2 + r = r(r+1)^3 \Rightarrow r_1 = 0$ $(m_1 = 1)$ καί $r_2 = -1$ $(m_2 = 3)$. Συνεπώς η γενική λύση είναι: $y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} + c_4 t^2 e^{-t}$, όπου c_i σταθερές.

<u>Παράδειγμα:</u> Νά βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης:

$$y''' + y' - 10y = 0$$

Είναι: $p(r) = r^3 + r - 10 = (r-2)(r^2 + 2r + 5) = (r-2)[(r+1)^2 + 2^2]$ με ρίζες $r_1 = 2$, $r_{2,3} = -1 \pm 2i$. Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}\cos 2t + c_3 e^{-t}\sin 2t.$$

Η εξίσωση του Euler

Ειδική κατηγορία γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μή σταθερούς συντελεστές των οποίων η επίλυση παραπέμπει στην διαδικασία επίλυσης γραμμικών εξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστές (μέσω χαρακτηριστικής εξίσωσης)

Ορισμός. Η διαφορική εξίσωση: $L(y) = t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ονομάζεται εξίσωση Euler.

Έστω $t > 0$. Αναζητούμε λύση της μορφής $y = t^r \Rightarrow y' = r t^{r-1}$ $\Rightarrow y'' = r(r-1) t^{r-2}$. Είναι:

$$L(t^r) = r(r-1) t^r + \alpha r t^r + \beta t^r = F(r) t^r$$

όπου $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = r^2 + (\alpha-1) r + \beta$. Συνεπώς $L(t^r) = 0$ αν καί μόνο αν $r^2 + (\alpha-1) r + \beta = 0$, δηλ.

$$r_{1,2} = \frac{-(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}\right]$$

Έχουμε τίς παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $(\alpha-1)^2 - 4\beta > 0 \Rightarrow r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$. Η γενική λύση είναι $y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}$, c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερ

(β) $(\alpha-1)^2 - 4\beta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1-\alpha}{2}$

καί μία λύση είναι $y_1 = t^{r_1}$. Γιά νά βρούμε δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση:

$$F(r) = (r-r_1)^2 \quad , \quad L(t^r) = (r-r_1)^2 t^r$$

$$\frac{\partial}{\partial r} L(t^r) = L\left(\frac{\partial}{\partial r} t^r\right) = L\left(\frac{\partial}{\partial r} e^{\ln t \cdot r}\right)$$

$$= L\left(\ln t \; e^{r \ln t}\right) = L\left(t^r \ln t\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left[(r-r_1)^2 t^r\right] = 2(r-r_1)t^r + (r-r_1)^2 \frac{\partial}{\partial r}(t^r).$$

$$= 2(r-r_1) t^r + t^r \ln t \,(r-r_1)^2$$

δηλαδή: $\quad L(t^r \ln t) = 2(r-r_1)t^r + (r-r_1)^2 t^r \ln t$

$\Rightarrow L(t^{r_1} \ln t) = 0 \quad \Rightarrow y_2 = t^{r_1} \ln t$ λύση, γραμμικά

ανεξάρτητη από την $y_1 = t^{r_1}$. Επομένως η γενική λύση είναι

$$y(t) = (c_1 + c_2 \ln t)\, t^{r_1} \qquad (t>0).$$

(γ) $(\alpha-1)^2 - 4\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \lambda + i\mu \quad , \quad r_2 = \lambda - i\mu$

όπου $\quad \lambda = \frac{1-\alpha}{2} \quad , \quad \mu = \frac{\sqrt{4\beta - (\alpha-1)^2}}{2}$

Η μιγαδική λύση $\varphi_1(t)$ που αντιστοιχεί στη ρίζα $r_1 = \lambda + i\mu$ είναι

$$\varphi_1(t) = t^{\lambda + i\mu} = t^\lambda t^{i\mu} = t^\lambda \left(e^{\ln t}\right)^{i\mu}$$

$$= t^\lambda e^{i\mu \ln t} = t^\lambda \left[\cos(\mu \ln t) + i \sin(\mu \ln t)\right]$$

Η λύση που αντιστοιχεί στη ρίζα $r_2 = \lambda - i\mu$ είναι (παρόμοι

$$\varphi_2(t) = t^{\lambda - i\mu} = t^{\lambda} \cdot t^{-i\mu} = t^{\lambda}\left(e^{\ln t}\right)^{-i\mu}$$

$$= t^{\lambda} e^{-i\mu \ln t} = t^{\lambda}\cos(\mu \ln t) - i\, t^{\lambda}\sin(\mu \ln t)$$

και επομένως η γενική λύση είναι:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = (c_1+c_2)\, t^{\lambda}\cos(\mu \ln t) +$$

$$+\, i(c_1 - c_2)\, t^{\lambda}\sin(\mu \ln t)$$

Ορίζοντας νέες αυθαίρετες σταθερές $\alpha_1 = c_1 + c_2$, $\alpha_2 = i(c_1 - c_2)$ έχουμε

$$\varphi(t) = t^{\lambda}\left[\alpha_1\cos(\mu \ln t) + \alpha_2 \sin(\mu \ln t)\right]$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η γενική μορφή της εξίσωσης:

$$L(y) = t^2 y'' - 5ty' + 9y = 0 \qquad (t>0).$$

Θέτοντας $y = t^r \Rightarrow y' = r t^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)t^{r-2}$:

$$L(y) = \left[r(r-1) - 5r + 9\right] t^r = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 t^3 + c_2 t^3 \ln t \qquad (t>0)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης:

$$L(y) = t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0 \qquad (t>0)$$

Θέτοντας $y = t^r \Rightarrow y' = r t^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)t^{r-2}$

$$\Rightarrow L(t^r) = [r(r-1) + 4r + 2]\, t^r = 0$$

$$\Rightarrow (r^2+3r+2)\, t^r = 0 \Rightarrow (r+1)(r+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = -1 \quad \text{καί} \quad r_2 = -2$$

Η γενική λύση είναι: $y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

<u>Παράδειγμα</u>: Νά βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$L(y) = t^2 y'' - 5t y' + 25 y = 0 \quad , \quad t>0$$

Θέτοντας $y = t^r \Rightarrow y' = r t^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1) t^{r-2}$:

$$L(t^r) = (r(r-1) - 5r + 25)\, t^r = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 - 6r + 25 = 0 \Rightarrow (r-3)^2 + 4^2 = 0$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = 3 \pm 4i$$

καί η γενική λύση είναι: $y(t) = t^3 [c_1 \cos(4\ln t) + c_2 \sin(4\ln t)]$
$t>0$

Στην περίπτωση πού αναζητάμε λύση στό διάστημα $(-\infty, 0)$, θέτουμε: $x := -t$, $x>0$; $u(x) = y(t)$, $u>0$. Τότε

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

καί η εξίσωση γράφεται:

$$(-x)^2 u'' + \alpha(-x)(-u') + \beta u = 0 \Rightarrow x^2 u'' + \alpha x u' + \beta u = 0$$
$(x>0)$.

Η μη ομογενής τάξης n

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(t)$$

όπου a_i σταθερές, $b(t) \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Αν y_p ειδική λύση της $L(y)=b$ και y οποιαδήποτε ~~άλλη~~ λύση, τότε

$$L(y-y_p) = L(y) - L(y_p) = b-b=0$$

Συνεπώς $y-y_p$ λύση της ομογενής και επομένως κάθε λύση της $L(y)=b$ είναι της μορφής

$$y = y_p + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n \qquad (*)$$

όπου $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y)=0$. Αντίστροφα κάθε συνάρτηση της μορφής $(*)$ είναι λύση της $L(y)=b$.

Μέθοδος μεταβολής παραμέτρων

Η μέθοδος γενικεύει την μέθοδο Lagrange (για $n=2$). Αναζητούμε λύση της $L(y)=b$ της μορφής:

$$y_p(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + u_2(t)\varphi_2(t) + \cdots + u_n(t)\varphi_n(t)$$

όπου οι $u_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ είναι απροσδιόριστες συναρτήσεις. Έχουμε

$$y_p' = \underbrace{\sum_{i=1}^n u_i'(t)\varphi_i(t)}_{0} + \sum_{i=1}^n u_i(t)\varphi_i'(t)$$

Θέτοντας $\sum_i u_i'\varphi_i = 0$ έχουμε $y_p' = \sum_i u_i\varphi_i'$. Επίσης

$$y_p'' = \underbrace{\sum_{i=1}^n u_i'(t)\varphi_i'(t)}_{0} + \sum_{i=1}^n u_i(t)\varphi_i''(t)$$

Θέτοντας: $\sum u_i' \varphi_i' = 0 \Rightarrow y_p'' = \sum u_i \varphi_i''$

Γενικότερα, αν $\sum_i u_i' \varphi_i^{(k-1)} = 0 \Rightarrow y_p^{(k)} = \sum_i u_i \varphi_i^{(k)}$

γιά $k=1,2,\dots,n-1$. Επομένως αν $u_1', u_2', \dots u_n'$ ικανοποιούν τίς σχέσεις

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} u_i' \varphi_i = 0 \\
&\sum_{i=1}^{n} u_i' \varphi_i' = 0 \\
&\quad\vdots \\
&\sum_{i=1}^{n} u_i' \varphi_i^{(n-2)} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{n} u_i' \varphi_i^{(n-1)} = b(t)
\end{aligned}\right\} \Sigma_1$$

έχουμε τίς σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned}
y_p &= \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i \\
y_p' &= \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i' \\
&\ \ \vdots \\
y_p^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i^{(n-1)} \\
y_p^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i^{(n)} + b(t)
\end{aligned}\right\} \Sigma_2$$

Καί συνεπώς: $L(y_p) = u_1 L(\varphi_1) + u_2 L(\varphi_2) + \dots + u_n L(\varphi_n) + b(t)$

$\Rightarrow L(y_p) = b(t)$. Τό πρόβλημα ανάγεται σέ λύση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων Σ_1 πού σέ μορφή πινακοεξίσωσης γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα συντελεστών του συστήματος είναι η ορίζουσα Wronski των $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ και έχουμε

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

γιατί οι φ_i είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο I. Έστω W_k η ορίζουσα πού προκύπτει από τήν W αν η k-στήλη αντικατασταθεί μέ $[0\ 0 \cdots 0\ 1]^T$. Τότε, αν $t_0 \in I$:

$$u_k(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{W_k(s)\, b(s)\, ds}{W(\varphi_1, \cdots \varphi_n)(s)} \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

και η ειδική λύση έχει τή μορφή :

$$y_p(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W_k(s)\, b(s)\, ds}{W(\varphi_1, \dots \varphi_n)(s)}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

Νά λυθεί τό Π.Α.Τ :

$$\left.\begin{array}{l} y''' + y'' + y' + y = 1 \\[2ex] y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι: $y''' + y'' + y' + y = 0$, με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(r) = r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r^2(r+1) + (r+1) = 0$$
$$\Rightarrow (r^2+1)(r+1) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i,\ r_3 = -1$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις $\varphi_1 = \cos t$, $\varphi_2 = \sin t$, $\varphi_3 = e^{-t}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Γιά να βρούμε ειδική λύση της μορφής $u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3$ λύνουμε τό σύστημα

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \varphi_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & e^{-t} \\ -\sin t & \cos t & -e^{-t} \\ -\cos t & -\sin t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επειδή $a_1 = -1$: $W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(t) = e^{-t}\, W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(0)$

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1(-1)(-1) = 2$$

$$\Rightarrow W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(t) = 2e^{-t}$$

Λύνοντας τό σύστημα :

$$u_1' = \frac{1}{2} e^{t} \begin{vmatrix} 0 & \sin t & e^{-t} \\ 0 & \cos t & -e^{-t} \\ 1 & -\sin t & e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{t} \left(-e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t \right)$$
$$= -\frac{1}{2}(\sin t + \cos t)$$

$$u_2' = \frac{1}{2} e^{t} \begin{vmatrix} \cos t & 0 & e^{-t} \\ -\sin t & 0 & -e^{-t} \\ -\cos t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \cos t & 0 & 1 \\ -\sin t & 0 & -1 \\ -\cos t & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \{ \cos t + (-\sin t) \} = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$$

$$u_3' = \frac{1}{2}e^t \begin{vmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}e^t$$

Επομένως

$$u_1' = -\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

$$u_2' = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t \Rightarrow u_2 = +\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t$$

$$u_3' = \frac{1}{2}e^t \Rightarrow u_3 = \frac{1}{2}e^t$$

Επομένως:

$$y_p = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 = \frac{1}{2}(\cos t - \cancel{\sin t})\cos t$$

$$+\frac{1}{2}(\sin t + \cancel{\cos t})\sin t + \frac{1}{2}e^t \cdot e^{-t}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{2} = 1$$

Η γενική λύση είναι:

$$y = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3 e^{-t} + 1 \qquad , c_i \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y' = -c_1\sin t + c_2\cos t - c_3 e^{-t}$$

$$\Rightarrow y'' = -c_1\cos t - c_2\sin t + c_3 e^{-t}$$

$y(0) = c_1 + c_3 + 1 = 0$, $y'(0) = c_2 - c_3 = 1$, $y''(0) = -c_1 + c_3 = 0$

$\Rightarrow c_1 + c_3 = -1$ $\qquad \Rightarrow c_2 - c_3 = 1$ $\qquad \Rightarrow c_1 = c_3$

$\Rightarrow c_1 = c_3 = -\frac{1}{2}$ $\qquad \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$ $\qquad \underline{y = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + 1}$

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

Μέθοδος εύρεσης ειδικής λύσης της μη-ομογενούς εξίσωσης $L(y)=b(t)$ όπου $L(y) := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$, όταν η $b(t)$ έχει ειδική μορφή, δηλ. είναι γραμμικός συνδιασμός από γινόμενα συναρτήσεων των παρακάτω τριών τύπων: (α) πολυώνυμο ως προς t, (β) εκθετική συνάρτηση e^{rt}, (γ) $\cos kt$ η $\sin kt$.

Έστω $L(y)=b(t)$ όπου $b(t)$ λύση ομογενούς γραμμικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές, δηλ. $M(b)=0$. Τότε

$$M[L(y)] = M[b(t)] = 0$$

και $L(y_p)=b \Rightarrow M[L(y_p)]=0$, δηλ. η y_p είναι ~~λύση της~~ γραμμικός συνδιασμός γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της $M[L(y)]=0$. Επειδή δεν ισχύει ότι κάθε γραμμικός συνδιασμός λύσεων της $M[L(y)]$ είναι λύση της $L(y)=b$, πρέπει να βρούμε τον κατάλληλο γραμμικό συνδιασμό;

Παράδειγμα: Θεωρούμε την εξίσωση:

$$L(y) = y'' - 2y' + y = \underbrace{2e^t + 2t}_{b}$$

Επειδή $b := 2e^t + 2t$ είναι λύση της $\underbrace{y''' - y''}_{M(y)} = 0$, τότε ~~και~~ η ειδική λύση y_p της $L(y)=b$ είναι και λύση της

$$M[L(y)] = (y''-2y'+y)''' - (y''-2y'+y)'' = 0$$

$$= y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y^{(3)} - y^{(2)} = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της $L(M(y))=0$ είναι:

$$p(r) = r^5 - 3r^4 + 3r^3 + r^2 = r^2(r^3 - 3r^2 + 3r + 1)$$

$$= r^2 (r-1)^3$$

Και επομένως η y_p είναι της μορφής

$$y_p = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 t e^t + c_5 t^2 e^t$$

Επειδή η $c_3 e^t + c_4 t e^t$ είναι λύση της $L(y)=0$ (χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $(r-1)^2=0$), έχουμε

$$L(y_p) = L(c_1 + c_2 t + c_5 t^2 e^t) + L(\underbrace{c_3 e^t + c_4 t e^t}_{0}) = b(t)$$

Και επομένως απαιτούμε η y_p να είναι της μορφής

$$y_p = c_1 + c_2 t + c_5 t^2 e^t \quad (\delta\eta\lambda\; c_3 = c_4 = 0).$$

Παραγωγίζοντας:

$$y_p' = c_2 + 2c_5 t e^t + c_5 t^2 e^t$$

$$y_p'' = 2c_5 e^t + 2c_5 t e^t + 2c_5 t e^t + c_5 t^2 e^t$$

$$= 2c_5 e^t + 4c_5 t e^t + c_5 t^2 e^t$$

Και αντικαθιστώντας στην $L(y)=b$:

$$2c_5 e^t + 4\cancel{c_5 t e^t} + \cancel{c_5 t^2 e^t} - 2(c_2 + 2\cancel{c_5 t e^t} + \cancel{c_5 t^2 e^t})$$
$$+ c_1 + c_2 t + \cancel{c_5 t^2 e^t} = 2e^t + 2t.$$

$$\Rightarrow \underbrace{(c_1 - 2c_2)}_{0} + \underbrace{c_2}_{2} t + \underbrace{2c_5}_{2} e^t = 2e^t + 2t$$

$$\Rightarrow c_2 = 2, \quad c_5 = 1, \quad c_1 = 4$$

$$\Rightarrow y_p = 4 + 2t + t^2 e^t$$

Στη συνέχεια αναλύουμε τις περιπτώσεις όπου $b(t)$ είναι εκθετική, πολυωνυμική, ημιτονοειδής, ή γραμμικός συνδυασμός των μορφών αυτών.

Έστω η εξίσωση $y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{at}$. Αναζητούμε ειδική λύση $y_p = Ae^{at} \Rightarrow y_p' = aAe^{at} \Rightarrow y_p'' = a^2Ae^{at}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση:

$$(a^2A + a_1Aa + a_2A)e^{at} = e^{at} \Rightarrow A = \frac{1}{a^2 + a_1a + a_2}$$

εκτός αν $a^2 + a_1a + a_2 = 0$, δηλ. αν a είναι ρίζα του χαρ. πολυωνύμου της $y'' + a_1y' + a_2y = 0$. Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε λύση $y_p = Ate^{at} \Rightarrow y_p' = Ae^{at} + aAte^{at} = A(1+at)e^{at}$

$\Rightarrow y_p'' = Aae^{at} + A(a + a^2t)e^{at} = \cancel{Aat}\,(2Aa + Aa^2t)e^{at}$

Επομένως:

$$[A(2a + a^2t) + a_1A(1+at) + a_2At]e^{at} = e^{at}$$

$$\Rightarrow A(2a + a_1)e^{at} + A\overbrace{(a^2 + a_1a + a_2)}^{0}te^{at} = e^{at}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2a + a_1}$$, εκτός αν $2a + a_1 = 0$, δηλ. αν

το a είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης δηλ αν

$$\frac{d}{dr}(r^2 + a_1r + a_2)\Big|_{r=a} = 0$$

Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε λύση $y_p = At^2 e^{at}$

$\Rightarrow \quad y_p' = (2At + aAt^2)e^{at}$

$\Rightarrow \quad y_p'' = (2A + 2aAt)e^{at} + a(2At + aAt^2)e^{at}$

$\qquad = A(2 + 4at + a^2t^2)e^{at}$

$\Rightarrow \quad A\left[(2 + 4at + a^2t^2) + a_1(2t + at^2) + a_2t^2\right]e^{at} = e^{at}$

$\Rightarrow \quad A\left[2 + 2t\cancelto{0}{(a_1 + 2a)} + t^2\cancelto{0}{(a^2 + a_1a + a_2)}\right]e^{at} = e^{at}$

$\Rightarrow \quad A = 1/2$

Ανακεφαλαιώνοντας: ~~Αν a ρίζα~~ Έστω $p(r) = r^2 + a_1r + a_2$ το χαρ. πολυώνυμο. Αν a δεν είναι ρίζα του $p(r)$ τότε $y_p = Ae^{at}$. Αν a απλή ρίζα του $p(r)$ τότε $y_p = Ate^{at}$ και αν a διπλή ρίζα του $p(r)$ τότε $y_p = At^2e^{at}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί ειδική λύση της εξίσωσης $y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}$
Χαρ. εξίσωση αντίστοιχης ομογενούς: $r^2 + 5r + 6 = (r+2)(r+3) \Rightarrow r_1 = -2,\ r_2 = -3$. Επειδή $a = -2$ είναι ρίζα της αντίστοιχης ομογενούς αναζητούμε λύσεις της μορφής $y_p = Ate^{-2t}$
Επομένως:

$$y_p' = Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t} = A(1-2t)e^{-2t}$$

$$y_p'' = -2Ae^{-2t} - 2A(1-2t)e^{-2t} =$$

$$= -4Ae^{-2t} + 4Ate^{-2t}$$

$$\Rightarrow \quad -4Ae^{-2t} + 4A\cancel{te^{-2t}} + 5Ae^{-2t} - 10A\cancel{te^{-2t}} + 6A\cancel{te^{-2t}} = e^{-2t}$$

$$\Rightarrow Ae^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_p = te^{-2t}$$

Στην περίπτωση που $b(t) = A\sin kt$, δηλ. η εξίσωση έχει τη μορφή:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = \sin kt$$

αναζητούμε ειδική λύση της μορφής $y_p = A\cos kt + B\sin kt$, εκτός αν μία τουλάχιστον από τις συναρτήσεις $\cos kt$ η $\sin kt$ είναι λύση της ομογενούς. Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε λύση: $y_p = t(A\cos kt + B\sin kt)$.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί μια ειδική λύση της εξίσωσης:

$$y'' + 4y = 3\cos 2t$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς είναι $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow \varphi_1 = \cos 2t,\ \varphi_2 = \sin 2t$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς. Επομένως η $b(t) = 3\cos 2t$ είναι λύση της ομογενούς και αναζητούμε ειδική λύση της μορφής:

$$y_p = t(A\sin 2t + B\cos 2t)$$

$$\Rightarrow y_p' = A\sin 2t + B\cos 2t + t(2A\cos 2t - 2B\sin 2t)$$

$$\Rightarrow y_p'' = 2A\cos 2t - 2B\sin 2t + (2A\cos 2t - 2B\sin 2t)$$

$$+ t(-4A\sin 2t - 4B\cos 2t)$$

$$= 4A\cos 2t - 4B\sin 2t - t(4A\sin 2t + 4B\cos 2t)$$

Επομένως:

$$4A\cos 2t - 4B\sin 2t - t\,(4A\sin 2t \cancel{+4B\cos 2t})$$

$$+\,4t\,(A\sin 2t \cancel{+B\cos 2t}) = 3\cos 2t.$$

$\Rightarrow A = 3/4$ και $B = 0$, δηλ. $y_p = \frac{3}{4}\, t \sin 2t$.

Τέλος θεωρούμε την περίπτωση πού $b(t)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση δηλ.:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής: $y_p = A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m$. Αν $a_2 = 0$ και η λύση y_p είναι αυτής της μορφής, τότε η μεγαλύτερη δύναμη του t στό αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι t^{m-1} - επομένως αναζητούμε λύσεις στην περίπτωση αυτή της μορφής

$$y_p = t\,(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) = A_0 t + \dots + A_m t^{m+1}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά βρεθεί ειδική λύση της εξίσωσης: $y'' + y' + y = t^2$

Αναζητούμε λύση $y_p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_p' = A_1 + 2A_2 t \Rightarrow y_p'' = 2A_2$. Αντικαθιστώντας στην δ.ε.:

$$2A_2 + A_1 + 2A_2 t + A_0 + A_1 t + A_2 t^2 = t^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{2A_2 + A_1 + A_0}_{0} + \underbrace{(2A_2 + A_1)}_{0}\,t + \underbrace{A_2}_{1}\,t^2 = t^2$$

$$\Rightarrow A_2 = 1,\quad A_1 = -2A_2 = -2,\quad A_0 = -2A_2 - A_1 = -2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow y_p = -2t + t^2$$

<u>Αρχή της υπέρθεσης</u>: Αν η εξίσωση είναι της μορφής $L(y) = b_1(t) + b_2(t)$ είναι αρκετό να βρούμε ξεχωριστά ειδική λύση των εξισώσεων $L(y) = b_1(t)$ και $L(y) = b_2(t)$. Λόγω γραμμικότητας προκύπτει ότι

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = b_1(t) + b_2(t)$$

και συνεπώς $y_p = y_1 + y_2$ είναι ειδική λύση.

Στη γενικότερη περίπτωση η $b(t)$ είναι άθροισμα όρων της μορφής:

$$P_m(t)\, e^{rt} \cos kt \quad \text{ή} \quad P_m(t)\, e^{rt} \sin kt$$

όπου P_m πολυώνυμο βαθμού m. Στην περίπτωση αυτή αναζητούμε ειδική λύση της μορφής:

$$y_p = t^s \left[(A_0 + A_1 t + \cdots + A_m t^m) e^{rt} \cos kt + (B_0 + \cdots + B_m t^m) e^{rt} \sin kt \right]$$

όπου s ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος ώστε η ειδική λύση να μην περιέχει όρους που είναι λύση της ομογενούς $L(y) = 0$.
Συγκεκριμένα:

$b(t)$	$y_p(t)$
$P_m(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m$	$t^s \left[A_0 + A_1 t + \cdots + A_m t^m \right]$
$c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$	$t^s \left[A \cos kt + B \sin kt \right]$
$e^{rt} (c_1 \cos kt + c_2 \sin kt)$	$t^s e^{rt} \left[A \cos kt + B \sin kt \right]$
$P_m(t)\, e^{rt}$	$t^s \left[A_0 + A_1 t + \cdots + A_m t^m \right] e^{rt}$
$P_m(t) (c_1 \cos kt + c_2 \sin kt)$	$t^s \left[(A_0 + \cdots + A_m t^m) \cos kt + (B_0 + \cdots + B_m t^m) \sin kt \right]$

Παράδειγμα.

Να βρεθεί ειδική λύση της εξίσωσης $y''-4y'+3y=2e^{2t}$.

Η χαρ. εξίσωση της ομογενούς είναι: $r^2-4r+3=(r-1)(r-3)$

$\Rightarrow \varphi_1=e^{t},\ \varphi_2=e^{3t}$ γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς.

Αναζητούμε ειδική λύση της μορφής: $y_p = Ae^{2t}$

$$\Rightarrow y_p' = 2Ae^{2t} \Rightarrow y_p'' = 4Ae^{2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4A-4\cdot 2A+3A)e^{2t} = 2e^{2t} \Rightarrow -Ae^{2t}=2e^{2t}$$

$$\Rightarrow A=-2 \Rightarrow y_p=-2e^{2t}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ειδική λύση της: $y''-4y'+3y=2\sin t$

Χαρ. εξίσωση ομογενούς $r^2-4r+3=0 \Rightarrow (r-1)(r-3)=0$. Επειδή $2\sin t$ δεν είναι λύση της ομογενούς:

$$y_p = A\sin t + B\cos t \Rightarrow y_p' = A\cos t - B\sin t$$

$$\Rightarrow y_p'' = -A\sin t - B\cos t$$

$$\Rightarrow -A\sin t - B\cos t - 4A\cos t + 4B\sin t + 3A\sin t + 3B\cos t = 2\sin t$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-A+4B+3A)}_{2}\sin t + \underbrace{(-B-4A+3B)}_{0}\cos t = 2\sin t.$$

$$\Rightarrow B=2A,\quad 2A+4B=2 \Rightarrow A+2B=1 \Rightarrow 5A=1 \Rightarrow A=1/5$$
$$\Rightarrow B=2/5$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}\cos t.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί μία ειδική λύση της εξίσωσης:

$y''-4y'+3y=e^{2t}\cos t$.

Χαρ. εξίσωση ομογενούς: $r^2-4r+3=(r-1)(r-3) \Rightarrow$
$\varphi_1=e^t$, $\varphi_2=e^{3t}$. Επειδή $b(t)=e^{2t}\cos t$ δεν είναι λύση της ομογενούς: $y_p = e^{2t}(A\sin t + B\cos t)$

$$\Rightarrow y_p' = 2e^{2t}(A\sin t + B\cos t) + e^{2t}(A\cos t - B\sin t)$$

$$= e^{2t}\left[(2A-B)\sin t + \cancel{e^{2t}}(2B+A)\cos t\right]$$

$$\Rightarrow y_p'' = 2e^{2t}\left[(2A-B)\sin t + (2B+A)\cos t\right] +$$

$$+ e^{2t}\left[(2A-B)\cos t - (2B+A)\sin t\right]$$

$$= e^{2t}\left[(4A-2B-2B-A)\sin t + (4B+2A+2A-B)\cos t\right]$$

$$= e^{2t}\left[(3A-4B)\sin t + (4A+3B)\cos t\right].$$

$$\Rightarrow e^{2t}\left[(3A-4B)\sin t + (4A+3B)\cos t\right] - 4e^{2t}\left[(2A-B)\sin t + (2B+A)\cos t\right]$$

$$+ 3e^{2t}\left[A\sin t + B\cos t\right] = e^{2t}\cos t$$

$$\Rightarrow e^{2t}\left[3A - \cancel{4B} - 8A + \cancel{4B} + 3A\right]\sin t + e^{2t}\left[\cancel{4A} + 3B - 8B - \cancel{4A} + 3B\right]\cos t = e^{2t}\cos t$$

$$\Rightarrow e^{2t}\underbrace{(-2A)}_{0}\sin t + e^{2t}\underbrace{(-2B)}_{1}\cos t = e^{2t}\cos t.$$

$$\Rightarrow A=0,\ B=-1/2 \Rightarrow y_p = -\frac{1}{2}e^{2t}\cos t.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί ειδική λύση της εξίσωσης:

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^{2t} + 2\sin t + e^{2t}\cos t$$

Σύμφωνα μέ τήν αρχή της παρέθεσης αρκεί νά λύσουμε τίς εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} y'' - 4y' + 3y &= 2e^{2t} \\ &= 2\sin t \\ &= e^{2t}\cos t \end{aligned}\right\}.$$

Μία ειδική λύση των εξισώσεων βρέθηκε στά προηγούμενα παραδείγματα. Συνεπώς

$$y_p = -2e^{2t} + \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{2}e^{2t}\sin t.$$

<u>Παράδειγμα:</u> Νά βρεθεί λύση της εξίσωσης: $y''' + y'' = 3e^t + 4t^2$

Η χαρ. εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι $r^3 + r^2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow r^2(r+1) \Rightarrow r_1 = 0$ (διπλή) καί $r_2 = -1$. Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς είναι $y_c = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$. Αναζητούμε (αρχική) λύση $y_p = Ae^t + (B + Ct + Dt^2)$. Η συνάρτηση Ae^t δέν είναι λύση της ομογενούς. Αντίθετα τό τμήμα της λύσης $B + Ct + Dt^2$ πρέπει νά πολλ/σεί με t^2. Άρα:

$$y_p = Ae^t + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4$$

$$\Rightarrow \quad y_p' = Ae^t + 2Bt + 3Ct^2 + 4Dt^3$$

$$\Rightarrow \quad y_p'' = Ae^t + 2B + 6Ct + 12Dt^2$$

$$\Rightarrow \quad y_p''' = Ae^t + 6C + 24Dt$$

$$\Rightarrow Ae^t + 6C + 24Dt + Ae^t + 2B + 6Ct + 12Dt^2 = 3e^t + 4t^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{2A}_{3}e^t + \underbrace{(6C + 2B)}_{0} + \underbrace{(24D + 6C)}_{0}t + \underbrace{12D}_{4}t^2 = 3e^t + 4t^2$$

$\Rightarrow D = 1/3 \ , \ A = 3/2 \ , \ B + 3C = 0 \ , \ C + 4D = 0$

$\Rightarrow C = -4D = -4/3 \ , \ B = -3C = 4$

$\Rightarrow y_p = \frac{3}{2} e^t + 4t^2 - \frac{4}{3} t^3 + \frac{1}{3} t^4$