Μέθοδος Δυναμοσειρών

Μέθοδος επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές οι οποίοι είναι αναλυτικές συναρτήσεις σε σημείο t_0.

Ορισμός: Μια σειρά της μορφής

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$$

όπου $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ και $t_0 \in \mathbb{R}$ είναι δυναμοσειρά με κέντρο t_0.
Η δυναμοσειρά συγκλίνει γιά κάθε $t \in (t_0 - r, t_0 + r)$ όπου r η ακτίνα σύγκλισης:

$$r = \lim_{n\to\infty} |a_n / a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{|a_n|}$$

Η $f(t)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (t-t_0)^{n-1}, \quad f''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (t-t_0)^{n-2}$$

Θεωρούμε την εξίσωση: $y'' + p(t) y' + q(t) y = 0$. Ένα σημείο $t_0 \in \mathbb{R}$ λέγεται ομαλό σημείο αν οι p και q είναι αναλυτική στο t_0 (αν μία τουλάχιστον από τις p και q δεν είναι αναλυτική στο t_0, τότε το t_0 είναι ιδιάζον σημείο της εξίσωσης).

Θεώρημα: Έστω p και q συναρτήσεις αναλυτικές στο $t_0 \in \mathbb{R}$, με αντίστοιχ σειρές

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (t-t_0)^n \quad \text{και} \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (t-t_0)^n$$

συγκλίνουσες γιά $|t-t_0| < R$. Τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $y'' + p(t) y' + q(t) y = 0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(t_0) = a_0$, $y'(t_0) = a_1$ είναι αναλυτική στο t_0 με σειρά Taylor πού συγκλίνει τουλάχιστον γιά $|t-t_0| < R$.

Παράδειγμα: Να λυθεί με την μέθοδο των δυναμοσειρών η διαφορική εξίσωση: $y''-y=0$.

Κάθε $t\in\mathbb{R}$ είναι ομαλό σημείο της εξίσωσης. Αναζητούμε λύση της μορφής

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Παραγωγίζουμε: $y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$, $y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, t^k - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \quad (\text{θέτοντας } k=n-2)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_n\right] t^n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \qquad n=0,1,2,\dots$$

Γιά $n=0,2,4,\dots$

$$(n=0) \qquad a_2 = \frac{a_0}{1\cdot 2}$$

$$(n=2) \qquad a_4 = \frac{a_2}{3\cdot 4} = \frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$(n=4) \qquad a_6 = \frac{a_4}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

$$\vdots$$

$$n=2k-2 \qquad a_{2k} = \frac{a_{2k-2}}{(2k-1)(2k)} = \frac{a_0}{(2k)!}$$

Γιά $n=1,3,5,\dots$

$$(n=1) \qquad a_3 = \frac{a_1}{2\cdot 3}$$

$$(n=3) \qquad a_5 = \frac{a_3}{4\cdot 5} = \frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$(n=5) \qquad a_7 = \frac{a_5}{6\cdot 7} = \frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

$$(n=2k-1) \qquad a_{2k+1} = \frac{a_{2k-1}}{(2k)(2k+1)} = \frac{a_1}{(2k+1)!}$$

Επομένως η γενική λύση:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} t^{2k+1}$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\left(= a_0 \cosh t + a_1 \sinh t\right)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά βρεθεί μέ τήν μέθοδο των δυναμοσειρών η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης: $y'' + ty' + y = 0$ γύρω από τό σημείο $t_0 = 0$.

Οι συντελεστές είναι συναρτήσεις αναλυτική στό $t_0=0$ καί επομένως ~~έχει~~ η εξίσωση έχει λύση αναλυτική στό $t_0=0$, δηλ.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Παραγωγίζοντας: $\quad y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}, \quad y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

Αντικαθιστώντας στήν εξίσωση:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + t\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_n\right]t^n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2} \qquad (n=0,1,2,\dots).$$

Για $n=0,2,4,\dots$

$$(n=0) \qquad a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$$(n=2) \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2\cdot 4}$$

$$\vdots$$

$$\cancel{(n=2k-2)\quad a_{2k}}$$

$$(n=4) \qquad a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6}$$

$$\vdots$$

$$(n=2k-2) \qquad a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2\cdot 4\cdots(2k)} = \frac{(-1)^k a_0}{2^k\, k!}$$

Για $n=1,3,5,\dots$

$$(n=1) \qquad a_3 = -\frac{a_1}{3}$$

$$(n=3) \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3\cdot 5}$$

$$(n=5) \qquad a_7 = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7}$$

$$\vdots$$

$$(n=2k-1) \qquad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)} = \frac{(-1)^k\, 2\cdot 4\cdots 2k}{(2k+1)!}\,a_1$$

$$= \frac{(-1)^k\, 2^k\, k!}{(2k+1)!}\,a_1$$

Καί συνεπώς:

$$y_R = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

όπου $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Νά βρεθεί η λύση της εξίσωσης:

$$(t^2-4)y'' + 3ty' + y = 0$$

πού ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=4$, $y'(0)=1$. Θεωρούμε λύση της μορφής:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

Επομένως:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - 4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left[n(n-1)+3n+1\right]a_n - 4(n+1)(n+2)a_{n+2}\right)t^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)^2 a_n - 4(n+1)(n+2)a_{n+2}\right]t^n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{(n+1)a_n}{4(n+2)} \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Γιά $n=0,2,4,\dots$

$$a_2 = \frac{a_0}{4\cdot 2}, \quad a_4 = \frac{3a_2}{4\cdot 4} = \frac{3a_0}{4^2\cdot 2\cdot 4}, \quad a_6 = \frac{5a_4}{4\cdot 6} = \frac{3\cdot 5\cdot a_0}{4^3\, 2\cdot 4\cdot 6}$$

καὶ γενικά :
$$a_{2k} = \frac{1\cdot 3 \cdots (2k-1)\, a_0}{4^k\, 2\cdot 4 \cdots (2k)} = \frac{1\cdot 3 \cdots (2k-1)}{4^k \cdot 2^k\, k!}\, a_0$$

$$= \frac{1\cdot 3 \cdots (2k-1)}{4^k\, 2^k\, k!}\; \frac{2\cdot 4 \cdots (2k)}{2\cdot 4 \cdots (2k)}\, a_0$$

$$= \frac{(2k)!}{4^k \cdot 2^k\, k!}\; \frac{1}{2^k\, k!}\, a_0 =$$

$$= \frac{(2k)!}{4^{2k}\,(k!)^2}\, a_0$$

Παρόμοια γιά $n = 1, 3, 5, \ldots$

$(n=1)$ $\quad a_3 = \dfrac{2\, a_1}{4\cdot 3}$

$(n=3)$ $\quad a_5 = \dfrac{4\cdot a_3}{4\cdot 5} = \dfrac{4\cdot 2\, a_1}{4^2\, 3\cdot 5}$

$(n=5)$ $\quad a_7 = \dfrac{6\, a_5}{4\cdot 7} = \dfrac{6\cdot 4\cdot 2\, a_1}{4^3\, 3\cdot 5\cdot 7}$

$\vdots$

$(n=2k-1)$ $\quad a_{2k+1} = \dfrac{2\cdot 4 \cdots (2k)\, a_1}{4^k\, 3\cdot 5 \cdots (2k+1)} = \dfrac{2^k\, k!\, a_1}{4^k\, 3 \ldots (2k+1)}$

$$= \frac{2^k\, k!\, a_1}{4^k\,(2k+1)!} \cdot 1\cdot 2 \cdots (2k)$$

$$= \frac{2^k\, k!\; 2^k\, k!}{4^k\,(2k+1)!}\, a_1$$

$$= \frac{\cancel{2^{2k}}\,(k!)^2}{\cancel{2^{2k}}\,(2k+1)!}\, a_1 = \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}\, a_1$$

$$\Rightarrow\; y(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^{2k}\,(k!)^2}\, t^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}\, \cancel{a_1}\, t^{2k+1}$$

$y(0) = a_0 = 4 \quad , y'(0) = a_1 = 1$

$$\Rightarrow \quad y(t) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^{2k}(k!)^2} t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$