Ομογενείς γραμμικές εξισώσεις - Γραμμικά Συστήματα

Θεωρούμε την ομογενή γραμμική εξίσωση

$$\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}(t)$$

όπου $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ (ανοικτό διάστημα), $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας με στοιχεία $a_{ij} \in C(I)$. Λύση της εξίσωσης είναι C^1-διαφορίσιμη συνάρτηση $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ ώστε $\underline{\varphi}'(t) = A(t)\,\underline{\varphi}(t)$, $t \in I$.

<u>Ορισμός</u>: Η λύση $\underline{\varphi}(t)$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $(t_0, \underline{y}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{y}_0$.

Έστω σύνολο λύσεων : $\mathcal{R}_0 = \{ \underline{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n : \underline{\varphi} \in C^1(I) \text{ και } \underline{\varphi}'(t) = A(t)\,\underline{\varphi}(t) \}$. Προφανώς $\mathcal{R}_0 \neq \emptyset$ γιατί $\underline{\varphi}(t) \equiv \underline{0}$ είναι λύση. Αν $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2 \in \mathcal{R}_0$, τότε κάθε γραμμικός συνδιασμός $c_1\underline{\varphi}_1(t) + c_2\underline{\varphi}_2(t) \in \mathcal{R}_0$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω πίνακας $A(t) = [a_{ij}](t)$, $1 \le i,j \le n$, και διανυσματική συνάρτηση $b(t) = [b_1(t), b_2(t) \cdots b_n(t)]^T$ συνεχείς στο $I = (\alpha, \beta)$. Τότε το Π.Α.Τ : $\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$, $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ έχει μοναδική λύση στο I.

<u>Απόδειξη</u>: Λόγω συνέχειας του $A(t)$ και $\underline{b}(t)$ υπάρχει τουλάχιστον μία λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$. Αν $\underline{\varphi}_1$ και $\underline{\varphi}_2$ δύο λύσεις στο I που ικανοποιούν το Π.Α.Τ. θα ισχύουν:

$$\underline{\varphi}_1(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\underline{\varphi}_1(s) + \underline{b}(s)]\,ds$$

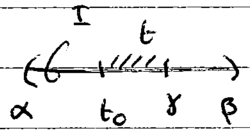
και

$$\underline{\varphi}_2(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\,\underline{\varphi}_2(s) + \underline{b}(s)]\,ds$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,[\underline{\varphi}_1(s) - \underline{\varphi}_2(s)]\,ds$$

$$\Rightarrow \|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t)\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|A(s)\|\,\|\underline{\varphi}_1(s) - \underline{\varphi}_2(s)\|\,ds \right|$$



Έστω $\gamma \in I$, $t_0 \le \gamma < \beta$ και $t \in [t_0, \gamma]$
Η συνάρτηση $\|A(t)\|$ είναι συνεχής στο $[t_0,\gamma]$ και συνεπώς υπάρχει $\max\limits_{t\in[t_0,\gamma]} \|A(t)\| =: M$ και επομένως:

$$\|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t)\| \le M \int_{t_0}^{t} \|\underline{\varphi}_1(s) - \underline{\varphi}_2(s)\|\,ds$$

Έστω $u(t) = \int_{t_0}^{t} \|\underline{\varphi}_1(s) - \underline{\varphi}_2(s)\|\,ds \Rightarrow u'(t) = \|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t)\|$, και

$$u'(t) \le M\,u(t), \quad t \in [t_0, \gamma]$$

$$\Rightarrow u'(t)\,e^{-Mt} \le M\,u(t)\,e^{-Mt} \Rightarrow [u(t)e^{-Mt}]' \le 0, \quad t \in [t_0,\gamma]$$

Άρα η συνάρτηση $u(t)e^{-Mt}$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $[t_0,\gamma]$ και αφού $u(t_0)=0$, $u(t)e^{-Mt} \le u(t_0)e^{-Mt} = 0$, $t\in[t_0,\gamma]$, δηλαδή $u(t) \le 0$, $t\in[t_0,\gamma]$. Από τον ορισμό της u έπεται ότι $u(t) \ge 0$ $\forall t\in[t_0,\gamma]$ και επομένως $u(t)=0$ $\forall t\in[t_0,\gamma]$, η ισοδύναμα $\|\underline{\varphi}_1(t) - \underline{\varphi}_2(t)\| = 0$ $\forall t\in[t_0,\gamma]$, δηλαδή $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$, $t\in[t_0,\gamma]$. Ανάλογα, αν επιλέξουμε $\delta\in I$, $\alpha<\delta\le t_0$, αποδεικνύεται ότι $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$ $\forall t\in[\delta,t_0]$. Επειδή τα γ και δ είναι αυθαίρετα συμπεραίνουμε ότι $\underline{\varphi}_1(t) = \underline{\varphi}_2(t)$ $\forall t\in(\alpha,\beta)$. □

Θεώρημα: Το σύνολο των λύσεων $\mathcal{L}_0$ της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ διάστασης n.

Απόδειξη: Έστω $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_0$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Τότε οι φ_1, φ_2 είναι διαφορίσιμες στο I και $\varphi_i' = A(t)\,\varphi_i(t)$, $i=1,2$. Επομένως η $\underline{\varphi} = c_1\underline{\varphi}_1 + c_2\varphi_2 \in C^1(I)$ και είναι: $\underline{\varphi}' = c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2' = c_1 A\underline{\varphi}_1 + c_2 A\varphi_2$

Ορισμός: Μια βάση $\mathcal{B} = \{\underline{\varphi}_1(t), \underline{\varphi}_2(t), \dots \underline{\varphi}_n(t)\}$ του $\mathcal{L}_0$ της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ λέμε ότι αποτελεί ένα Θεμελιώδες σύστημα λύσεων. Ο $n \times n$ πίνακας $\Phi(t) = [\underline{\varphi}_1(t)\ \underline{\varphi}_2(t) \dots \underline{\varphi}_n(t)]$ λέγεται Θεμελιώδης πίνακας λύσεων. Θα λέμε ότι ένας πίνακας $\Phi(t)$ της μορφής αυτής είναι πίνακας λύσεων αν $\{\underline{\varphi}_i(t)\}$ είναι λύσεις της εξίσωσης, όχι απαραίτητα γραμμικά ανεξάρτητες.

Αν $\Phi(t)$ είναι πίνακας λύσεων τότε

$$\Phi'(t) = [\underline{\varphi}_1'(t)\ \underline{\varphi}_2'(t) \dots \underline{\varphi}_n'(t)]$$

$$= [A(t)\underline{\varphi}_1(t)\quad A(t)\underline{\varphi}_2(t) \dots A(t)\underline{\varphi}_n(t)]$$

$$= A(t)[\underline{\varphi}_1(t) \dots \underline{\varphi}_n(t)] = A(t)\,\Phi(t)$$

Αντίστροφα, αν $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ τότε οι στήλες του $\Phi(t)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$.

Ορισμός: Έστω $\{\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_n(t)\}$ λύσεις της $\underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t)$. ~~Τότε~~ και $\Phi(t) = [\underline{\varphi}_1(t) \dots \underline{\varphi}_n(t)]$. Τότε η ορίζουσα

$$W[\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, \dots, \underline{\varphi}_n] = \det[\Phi(t)]$$

ονομάζεται ορίζουσα Wronski των $\underline{\varphi}_1(t), \dots, \underline{\varphi}_n(t)$.

Θεώρημα: Οι λύσεις $\{\underline{\varphi}_1(t), \dots \underline{\varphi}_n(t)\}$ της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ αποτελ. ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων αν και μόνο αν $W[\underline{\varphi}_1, \dots \underline{\varphi}_n](t) \neq 0$ για κάθε $t \in I$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ισοδύναμη πρόταση: Οι συναρτήσ. $\underline{\varphi}_1(t), \underline{\varphi}_2(t), \dots \underline{\varphi}_n(t) \in \mathcal{L}_0$ είναι γραμμικά εξαρτημένες στο I αν και μόν.

$= A(t)\,(c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)) \Rightarrow c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t) \in \mathcal{L}_0$. Άρα ο $\mathcal{L}_0$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ (μή κενος καθώς $0 \in \mathcal{L}_0$).

Γιά καθεμιά από τίς αρχική συνθήκες $(t_0, \underline{e_i})$, $i=1,2,\dots,n$ όπου $\underline{e_i} = [0 \dots 0 \;1\; 0 \cdots 0]^T$ (η μονάδα στη θέση i), λόγω του μονοσήμαντου υπάρχει μία καί μόνο μία λύση του ΠΑΤ:

$$(\Pi A T)_i : \quad \underline{y}' = A(t)\,\underline{y} \qquad \underline{y}(t_0) = \underline{e_i} \qquad i=1,2,\dots,n$$

Έστω $\varphi_i(t)$ η λύση του $(\Pi A T)_i$. Οι λύσεις $\{\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στό I. Πράγματι, αν ηταν γραμμικά εξαρτημένες θά υπήρχαν $c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{R}$ (όχι όλα 0):

$$c_1\underline{\varphi_1}(t) + c_2\underline{\varphi_2}(t) + \cdots + c_n\underline{\varphi_n}(t) = \underline{0} \qquad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \quad c_1\underline{\varphi_1}(t_0) + c_2\underline{\varphi_2}(t_0) + \cdots + c_n\varphi_n(t_0) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad [c_1 \; c_2 \cdots c_n]^T = \underline{0} \qquad (\text{άτοπο}).$$

Η απόδειξη θά είναι πλήρης αν δείξουμε οτι κάθε λύση ~~του~~ της εξίσωσης $\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των $\varphi_i(t)$, $i=1,2,\dots n$. Έστω $\underline{\varphi}(t) \in \mathcal{L}_0$ τυχαία λύση που ικανοποιεί τήν αρχική συνθήκη $\underline{\varphi}(t_0) = [c_1 \cdots c_n]^T = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{e_i}$. Θεωρούμε τήν συνάρτηση $\underline{y_1}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\varphi_i}(t)$. Τότε $\underline{y_1}(t) \in \mathcal{L}_0$ καί επιπλέον

$$\underline{y_1}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\varphi_i}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$

Οι $\underline{y}(t)$ καί $\underline{y_1}(t)$ είναι λύσεις της $\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}$ καί ικανοποιούν τήν ίδια αρχική συνθήκη $(t_0, \sum c_i \underline{e_i})$ άρα συμπίπτουν λόγω του μονοσήμαντου. Επομένως $\underline{y}(t) = \underline{y_1}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(t)$ καί η απόδειξη είναι πλήρης. □

αν $W(t_0)=0$ γιά κάποιο $t_0 \in I$.

($\Rightarrow$): Έστω ότι $\{\underline{\varphi}_1(t), \dots \underline{\varphi}_n(t)\}$ γραμμικά εξαρτημένες στό I. Τότε $\exists\, c_i \in \mathbb{R}$ (όχι όλες 0): $\sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\varphi}_i(t) = \underline{0} \quad \forall t \in I \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi(t)\,\underline{c} = 0 \quad \forall t \in I$ όπου $\underline{c}^T = [c_1 \dots c_n] \neq 0$. Συνεπώς $\det[\Phi(t)] = 0 \quad \forall t \in I$.

($\Leftarrow$): Έστω $W(t_0) = \det[\Phi(t_0)] = 0$ γιά κάποιο $t_0 \in I$. Τότε $\exists\, \underline{c_0} = [c_1 \dots c_n]^T \neq \underline{0}$: $\Phi(t_0)\,\underline{c_0} = \underline{0}$. Επομένως η συνάρτηση $\underline{y}(t) = \Phi(t)\,\underline{c_0}$ είναι λύση της $\underline{y}' = A(t)\,\underline{y}$ καί ικανοποιεί τήν συνθήκη $\underline{y}(t_0) = \underline{0}$. Από τό μονοσήμαντο προκύπτει ότι $\underline{y}(t) = \underline{0} \quad \forall t \in I$, δηλ.

$$\Phi(t)\,\underline{c_0} = c_1 \underline{\varphi}_1(t) + c_2 \underline{\varphi}_2(t) + \dots + c_n \underline{\varphi}_n(t) = 0 \qquad \forall t \in I$$

μέ κάποιο $c_i \neq 0 \Rightarrow \{\underline{\varphi}_i(t)\}_{i=1}^{n}$ γραμμικά εξαρτημένες. $\square$

Από τήν απόδειξη (αυτό μέρος) προκύπτει ότι:

$$W(t) = 0 \quad \forall t \in I \iff W(t_0) = 0 \quad \text{γιά κάποιο } t_0 \in I.$$

Έστω $\underline{y}(t) \in \mathcal{L}_0$, τότε $\underline{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{\varphi}_i(t) = \Phi(t)\,\underline{c}$ γιά κάποιο $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ όπου $\Phi(t)$ θ.π.λ. Αν επιπλέον η $\underline{y}(t)$ ικανοποιεί τήν αρχική συνθήκη $\underline{y}(t_0) = \underline{y_0}$, τότε:

$$\underline{y}(t_0) = \Phi(t_0)\,\underline{c} \Rightarrow \underline{c} = \Phi^{-1}(t_0)\,\underline{y}(t_0)$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,\underline{y_0}$$

Τό επόμενο θεώρημα συνδέει δύο θ.π.λ. $\Phi(t)$ καί $\Phi_1(t)$:

__Θεώρημα.__ Αν $\Phi(t)$ ένας θ.π.λ της $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ και $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(C) \neq 0$, τότε $\Phi(t)C$ είναι επίσης θ.π.λ. Επιπλέον, αν $\Phi_1(t)$ είναι επίσης θ.π.λ. γιά τήν (ίδια) εξίσωση, τότε $\exists\, C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(C_1) \neq 0$: $\Phi_1(t) = \Phi(t) C_1$.

__Απόδειξη.__ Θά δείξουμε πρώτα ότι $\Phi(t)C$ θ.π.λ:

(α) $(\Phi(t)C)' = \Phi'(t)C = A(t)\Phi(t)C = A(t)(\Phi(t)C) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi(t)C$ πίνακας λύσεων.

(β) $\det[\Phi(t)C] = \det[\Phi(t)]\cdot\det[C] \neq 0 \quad \forall t \in I$ γιατί $\det[\Phi(t)] \neq 0 \ \forall I$ ($\Phi(t)$ θ.π.λ) καί $\det(C) \neq 0$. Άρα ο $\Phi(t)C$ είναι θεμελιώδης (π.λ).

Έστω ότι ο $\Phi_1(t)$ είναι επίσης θ.π.λ. ~~Τότε $\Phi^{-1}(t)$~~. Ορίζουμε τον πίνακα: $Y(t) = \Phi^{-1}(t)\Phi_1(t)$ (ο πίνακας $\Phi^{-1}(t)$ ορίζεται γιά κάθε $t \in I$). Επομένως

$$\Phi(t)Y(t) = \Phi_1(t) \Rightarrow \Phi' Y + \Phi Y' = \Phi_1'$$

$$\Rightarrow \cancel{A(t)\Phi(t)Y(t)} + \Phi(t)Y'(t) = \cancel{A(t)\underbrace{\Phi_1(t)}_{\Phi(t)Y(t)}}$$

$$\Rightarrow \Phi(t)Y'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow Y'(t) = 0 \Rightarrow Y(t) = C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad (\text{σταθερός})$$

Επίσης: $\det(C_1) = \det[\Phi^{-1}(t)\Phi_1(t)] \neq 0$ □

__Ορισμός:__ Ο πίνακας: $G(t,t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ λέγεται πίνακας μεταφοράς κατάστασης γιά τήν εξίσωση $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$.

Πρόταση :

(α) Ο $G(t,t_0)$ είναι ανεξάρτητος από τον θ.π. $\Phi(t)$ που τον παράγει.

(β) $\forall\, t, t_0 \in I: \quad \frac{\partial}{\partial t} G(t,t_0) = A(t)\, G(t,t_0)$

(γ) $G(t,t) = I_n \quad \forall\, t \in I.$

(δ) Για κάθε $t, t_0 \in I: \quad G^{-1}(t,t_0) = G(t_0,t)$

(ε) $G(t_2,t_0) = G(t_2,t_1)\, G(t_1,t_0) \qquad \forall\, t_0,t_1,t_2 \in I$

Απόδειξη:

(α) Ο $G(t,t_0)$ ορίστηκε ως $G(t,t_0) = \Phi(t)\, \Phi^{-1}(t_0)$ οπου $\Phi(t)$ είναι ενας θ.π.λ. Αν Φ_1 είναι αλλος θ.π.λ, τότε $\exists\, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\det(C) \neq 0$: $\Phi_1(t) = \Phi(t)\, C$. Επομένως:

$$G_1(t,t_0) := \Phi_1(t)\, \Phi_1^{-1}(t_0) = [\Phi(t) C][\Phi(t_0) C]^{-1}$$

$$= \Phi(t)\, C C^{-1}\, \Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t)\, \Phi^{-1}(t_0) = G(t,t_0).$$

(β) $$\frac{\partial}{\partial t}[G(t,t_0)] = \frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t)\, \Phi^{-1}(t_0)] = \Phi'(t)\, \Phi^{-1}(t_0) =$$

$$= A(t)\, \Phi(t)\, \Phi^{-1}(t_0) = A(t)\, G(t,t_0)$$

(γ) $G(t,t) = \Phi(t)\, \Phi^{-1}(t) = I_n \quad \forall\, t \in I.$

(δ) $G^{-1}(t,t_0) = [\Phi(t)\, \Phi^{-1}(t_0)]^{-1} = \Phi(t_0)\, \Phi^{-1}(t) = G(t_0,t).$

(ε) Για κάθε $t_0, t_1, t_2 \in I$:

$$G(t_2,t_0) = \Phi(t_2)\, \Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t_2)\, \Phi^{-1}(t_1)\, \Phi(t_1)\, \Phi^{-1}(t_0)$$

$$= G(t_2,t_1)\, G(t_1,t_0). \qquad \square$$

Αν $G(t, t_0)$ ο πίνακας μεταφοράς της εξίσωσης $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$, τότε η λύση πού ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ είναι η $\underline{y}(t) = G(t, t_0)\underline{y}_0$; Πράγματι

$$y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underline{y_0} = G(t, t_0)\underline{y_0}$$

Ορισμός: (Ίχνος πίνακα). Αν $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε ορίζουμε $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Θεώρημα (Liouville): Έστω $\{\underline{\varphi_1}(t), \dots, \underline{\varphi_n}(t)\}$ λύσεις της εξίσωσης $\underline{y}' = A(t)\underline{y}$ και $t_0 \in I$. Τότε:

$$W[\varphi_1, \dots \varphi_n](t) = W[\varphi_1 \dots \varphi_n](t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\, ds\right).$$

Απόδειξη: (γιά $n=2$, η γενική περίπτωση παρόμοια). Έστω

$$W[\varphi_1, \varphi_2](t) = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & z_2(t) \end{bmatrix}$$

όπου:

$$\underline{\varphi_1}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$(\det W(t))' = \begin{vmatrix} x_1' & z_1' \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2' & z_2' \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Όμως $\underline{\varphi_1}' = A(t)\underline{\varphi_1}$ και $\underline{\varphi_2}' = A(t)\underline{\varphi_2}(t)$. Αναλυτικά αν $A = [a_{ij}$

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \qquad z_1' = a_{11}z_1 + a_{12}$$

Η πρώτη ορίζουσα στην (*) δίνει:

$$\begin{vmatrix} x_1' & z_1' \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{11}z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12}z_2 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}}_{0}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = a_{11}(t)\, W(t)$$

Παρομοίως:

$$\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2' & z_2' \end{vmatrix} = a_{22}(t)\, W(t)$$

Συνεπώς $W'(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t))\, W(t) = [tr\, A(t)] \cdot W(t)$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dW}{W} = \int_{t_0}^{t} tr[A(s)]\, ds.$$

$$\Rightarrow W(t) = W(t_0) \exp\left\{\int_{t_0}^{t} tr[A(s)]\, ds\right\}.$$

Η γενική περίπτωση προκύπτει παρόμοια. $\square$

<u>Παρατήρηση:</u> Η ισοδυναμία $(W(t) = 0 \ \forall t \in I) \Leftrightarrow (W(t_0) = 0$ για κάποιο $t_0 \in I)$ προκύπτει άμεσα καθώς $\exp\left\{\int_{t_0}^{t} tr[A(s)]\, ds\right\} > 0 \quad \forall t_0, t \in I.$

<u>Παρατήρηση:</u>

$$\det[G(t,t_0)] = \det[\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)] = \det[\Phi(t)] / \det[\Phi(t_0)]$$
$$= W(t)/W(t_0) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} tr[A(s)]\, ds\right\}.$$

Ο τύπος μεταβολής παραμέτρων

Τό αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών της μή ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$\underline{y}'(t) = A(t)\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t) \quad , \; t \in I \;, \; \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$$

Αν $\underline{b}(t) = 0$ η λύση είναι: $\underline{y}(t) = G(t, t_0)\,\underline{y}_0$. Στην μή ομογενή εξίσωση εξετάζουμε λύσεις της μορφής:

$$\underline{y}(t) = G(t, t_0)\,\underline{x}(t)$$

Γιά $t = t_0$ έχουμε: $\underline{y}(t_0) = \underbrace{G(t_0, t_0)}_{I}\,\underline{x}(t_0) = \underline{x}(t_0)$, Επίσης:

$$\underline{y}'(t) = G'(t, t_0)\,\underline{x}(t) + G(t, t_0)\,\underline{x}'(t) =$$

$$= A(t)\,G'(t, t_0)\,\underline{x}(t) + G(t, t_0)\,\underline{x}'(t)$$

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση έχουμε:

$$\cancel{A(t)\,G^*(t, t_0)\,\underline{x}(t)} + G(t, t_0)\,\underline{x}'(t) = \cancel{A(t)\,\underline{y}(t)} + \underline{b}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{x}'(t) = G^{-1}(t, t_0)\,\underline{b}(t) \Rightarrow \underline{x}'(t) = G(t_0, t)\,\underline{b}(t).$$

Ολοκληρώνοντας:

$$\underline{x}(t) = \underbrace{\underline{x}(t_0)}_{\underline{y}_0} + \int_{t_0}^{t} G(t_0, s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = G(t, t_0)\,\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \overbrace{G(t, t_0)\,G(t_0, s)}^{G(t,s)}\,\underline{b}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = G(t, t_0)\,\underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t, s)\,\underline{b}(s)\,ds$$

Η απεικόνιση : $y_0 \in \mathbb{R}^n \to \underline{y}(t) = G(t,t_0)\underline{y_0} \in \mathcal{L}_0$ είναι ισομορφισμός (δηλαδή γραμμική, 1-1 και επί). Το σύνολο των λύσεων της μη ομογενούς συνδέεται με αυτό της ομογενούς από την σχέση:
$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \{y_1(t)\}$ όπου $y_1(t)$ μια (αυθαίρετη) ειδική λύση.

Η εκθετική συνάρτηση e^{At}

Εξειδικεύουμε την λύση της μη ομογενούς εξίσωσης στην περίπτωση που ο A είναι σταθερός πίνακας, δηλ:

$$\underline{y}' = A\underline{y} + \underline{b}(t), \quad t \in I, \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y_0}$$

Στην βαθμωτή περίπτωση $(A = a \in \mathbb{R})$ η λύση του αντίστοιχου Π.Α.Τ $(y' = ay + b(t),\ y(t_0) = y_0)$ είναι

$$y(t) = e^{a(t-t_0)} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} b(s)\,ds$$

Στην περίπτωση όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ η λύση γενικεύεται ως εξής:

$$\underline{y}(t) = e^{A(t-t_0)} \underline{y_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \underline{b}(s)\,ds$$

όπου ο εκθετικός πίνακας e^{At} ορίζεται στη συνέχεια.

Ορισμός: Έστω $\Phi(t)$ ένας θεμελιώδης πίνακας της $\underline{y}' = A\underline{y}$ (όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - σταθερός). Ορίζουμε τον πίνακα :

$$e^{At} := \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0) = G(t,0)$$

Από τις ιδιότητες θ. πινάκων (και πινάκων μεταφοράς κατάστασης) γνωρίζουμε ότι ο e^{At} είναι ανεξάρτητος του συγκεκριμένου $\Phi(t)$ που τον ορίζει, ικανοποιεί την εξίσωση $(e^{At})' = Ae^{At}$ και $e^{A0} = I_n$.

Επίσης $Ae^{At}|_{t=0} = e^{At}A|_{t=0} = A$. Κατά συνέπεια οι πίνακες Ae^{At} και $e^{At}A$ είναι λύσεις του ΠΑΤ: $B'(t) = A\,B(t)$, $B(0) = A$ και επομένως ταυτίζονται λόγω του μονοσήμαντου.

(8) Θέτουμε $P(t) = e^{At}$ και θεωρούμε την λύση $\underline{\varphi}(t,\underline{y_0}) = P(t)\underline{y}$ του $(P(t)\underline{y_0})' = A\,P(t)\underline{y_0}$. Ολοκληρώνοντας:

$$P(t)\underline{y_0} = I_n \underline{y_0} + \int_0^t A\,P(s)\underline{y_0}\,ds \qquad (*)$$

Εφαρμόζουμε το διανυσματικό ανάλογο της μεθόδου προσεγγίσεων Piccard. Επιλέγουμε ως πρώτη προσέγγιση:

$$P^{(0)}(t)\underline{y_0} = I_n \underline{y_0}$$

Η επόμενη προσέγγιση είναι:

$$P^{(1)}(t)\underline{y_0} = I_n \underline{y_0} + \int_0^t A\,P^{(0)}(s)\underline{y_0}\,ds$$

$$= I_n \underline{y_0} + \int_0^t A\underline{y_0}\,ds = I_n\underline{y_0} + A\underline{y_0}\,t$$

και γενικά:

$$P^{(k+1)}(t)\underline{y_0} = I_n\underline{y_0} + \int_0^t A\,P^{(k)}(s)\underline{y_0}\,ds$$

$$\Rightarrow P^{(k)}(t)\underline{y_0} = I_n\underline{y_0} + A\underline{y_0}\,t + \dots + \frac{1}{k!}A^k\underline{y_0}\,t^k \qquad (**)$$

Μελετάμε την σύγκλιση της σειράς και δείχνουμε ότι η λύση της (*) δίνεται από την συγκλίνουσα σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \underline{y_0}\, t$$

Λήμμα: Ο πίνακας e^{At} έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$

(β) $(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$

(γ) $(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A$

(δ) $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n = I_n + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \cdots$

Απόδειξη.

(α) Θέτουμε $X(t) = e^{A(t+s)}$, $Y(t) = e^{At} e^{As}$ (s σταθεροποιημένο)

Ισχύει ότι:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt} X(t) = \frac{d}{d(t+s)} e^{A(t+s)} = A e^{A(t+s)} = A X(t) \\ &X(0) = e^{As} \end{aligned}\right\}$$

Επίσης: $\frac{d}{dt} Y(t) = (e^{At})' e^{As} = (A e^{At}) e^{As} = A (e^{At} e^{As}) = A Y(t)$

$Y(0) = e^{As}$

Από το μονοσήμαντο ισχύει ότι $X(t) = Y(t)$.

(β) Επιλέγουμε $s = -t$ στο (α) οπότε:

$$I_n = e^{At} e^{A(-t)} \Rightarrow (e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$$

(γ) Η πρώτη ισότητα ισχύει από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης ως ειδικής περίπτωσης Δ.Π.Λ για A σταθερό πίνακα. Η δεύτερη προκύπτει από τον υπολογισμό:

$$\frac{d}{dt}(A e^{At}) = A \frac{d}{dt}(e^{At}) = A(A e^{At})$$

$$\frac{d}{dt}(e^{At} A) = \frac{d}{dt}(e^{At}) A = (A e^{At}) A = A(e^{At} A)$$

Λόγω γραμμικότητας αρκεί νά δείξουμε τη σύγκλιση γιά $\|y_0\|=1$
Παρατηρούμε ότι $\exists a>0$:

$$\|A\, \underline{y_0}\| < a \quad \text{γιά} \quad \underline{y_0} \in S^{n-1} := \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n : \|y\|=1\}$$

(η σφαίρα S^{n-1} είναι κλειστό καί φραγμένο σύνολο και $\underline{y} \to A\underline{y}$ είναι συνεχής μετασχηματισμός, άρα $\|A\| < a < \infty$). Επίσης $\|A^2 \underline{y_0}\| = \|A A \underline{y_0}\| \leq \|A\| \cdot \|A \underline{y_0}\| \leq \|A\|^2 \|y_0\|$ καί γενικά $\|A^k \underline{y_0}\| \leq \|A\|^k \|y_0\|$. Κατά συνέπεια, γιά $\underline{y_0} \in S^{n-1}$

$$\|P^k(t)\, \underline{y_0}\| \leq 1 + at + \cdots + \frac{1}{k!} a^k t^k$$

καί

$$\|P^{k+1}(t)\, \underline{y_0} - P^{(\ell)}(t)\, \underline{y_0}\| \leq \sum_{n=\ell+1}^{k+1} \frac{1}{(n+1)!} a^n t^n$$

Επομένως $\{P^{(k)}(t)\, \underline{y_0}\}$ είναι ακολουθία Cauchy καί συγκλίνει ομοιόμορφα γιά $\underline{y_0} \in S^{n-1}$. Θέτουμε

$$\varphi(t, \underline{y_0}) = \lim_{k \to \infty} P^{(k)}(t)\, \underline{y_0}$$

Παίρνοντας στην (**) τό όριο $k \to \infty$ καί κάνοντας χρήση της ομοιόμορφης σύγκλισης:

$$\underline{\varphi}(t, \underline{y_0}) = \underline{y_0} + \int_0^t A\, \underline{\varphi}(s, \underline{y_0})\, ds$$

Που επιλύει τό Π.Α.Τ. Έχουμε

$$e^{At}\, \underline{y_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \underline{y_0}\, t^n = \left(I_n + At + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots \right) \underline{y_0}$$

$\square$

Γραμμική εξίσωση τάξης n

Η μελέτη γραμμικής ομογενούς εξίσωσης τάξης n :

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)\, x(t) = 0 \qquad (*)$$

$(a_i(t) \in C(I),\ I \subseteq \mathbb{R})$ ανάγεται σε σύστημα εξισώσεων μέσω του μετασχηματισμού :

$$y_1 = x\ ,\ y_2 = x'\ ,\ y_3 = x''\ ,\ \dots\ ,\ y_n = x^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow\ y_n' = x^{(n)} = -a_1(t)\, x^{(n-1)} - a_2\, x^{(n-2)} - \dots - a_n(t)\, x(t)$$

$$= -a_1(t)\, y_{n-1} - a_2\, y_{n-2} - \dots - a_n(t)\, x_1(t)$$

Ισοδύναμα: $\underline{y}' = A\underline{y}$ όπου

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}(t) = [\,y_1\ y_2\ \cdots\ y_n\,]^T = [\,x\ x'\ \cdots\ x^{(n-1)}\,]^T$$

Προφανώς $y(t_0) = [\,y_1(t_0) \cdots y_n(t_0)\,]^T = [\,x(t_0)\ x'(t_0) \cdots x^{n-1}(t_0)\,]^T$

Οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες γιατί σε μία λύση της $x = \varphi(t)$ της (*) αντιστοιχεί η λύση:

$$\varphi\ \ \underline{y}(t) = [\,\varphi(t)\ \ \varphi'(t)\ \cdots\ \varphi^{(n-1)}(t)\,] \qquad \text{της } \underline{y}' = A\underline{y}$$

και αντίστροφα.

Υποβιβασμός τάξης

Μελετάμε μέθοδο υποβιβασμού τάξης γραμμικής ομογενούς εξίσωσης $2^{ης}$ τάξης. Έστω

$$L(y) = y'' + a_1(t) y' + a_2(t) y = 0 \qquad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

Έστω ότι είναι γνωστή μία λύση $y_1(t)$. Αναζητούμε δεύτερη λύση $y_2(t)$, $t \in I$, γραμμικά ανεξάρτητη της $y_1(t)$. Έστω ότι

$$v(t) = \frac{y_2(t)}{y_1(t)} \Rightarrow y_2(t) = v(t)\, y_1(t)$$

Παραγωγίζοντας:

$$y_2' = v y_1' + v' y_1 \Rightarrow y_2'' = v y_1'' + 2v' y_1' + v'' y_1$$

Αντικαθιστώντας:

$$[\cancel{v y_1''} + 2v' y_1' + v'' y_1] + a_1(t)[\cancel{v y_1'} + v' y_1] + \cancel{a_2(t) v y_1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1 v'' + [2 y_1' + a_1(t) y_1] v' = 0$$

(εξίσωση $1^{ης}$ τάξης γραμμική – ομογενής ως προς v'). Θέτοντας $u = v'$ έχουμε

$$u'(t) + \left[2 \frac{y_1'}{y_1} + a_1(t)\right] u(t) = 0$$

Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι:

$$p(t) = \exp\left\{ \int \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + a_1(t)\right) dt \right\} = \exp\left\{ 2 \ln |y_1| + \int a_1(t)\, dt \right\}$$
$$= y_1^2 \exp\left\{ \int a_1(t)\, dt \right\}$$

Επομένως:

$$\left[u y_1^2 e^{\int a_1 dt}\right]' = 0$$

$$\Rightarrow u y_1^2 e^{\int a_1 dt} = c \Rightarrow v' = u = \frac{c}{y_1^2} e^{-\int a_1 dt}$$

και με μία επιπλέον ολοκλήρωση

$$v = \frac{y_2}{y_1} = c \int \frac{e^{-\int a_1(t) dt}}{y_1^2} dt + c^*$$

Επιλέγοντας $c = 1$, $c^* = 0$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(t) dt}}{y_1^2} dt$$

Εφόσον η y_2 είναι μη σταθερό πολλαπλάσιο της y_1 οι δύο λύσεις είναι ανεξάρτητες

Παράδειγμα: Έστω η δ.ε. $y'' - \frac{2}{t^2} y = 0 \qquad 0 < t < \infty$

Επαληθεύεται εύκολα ότι $y_1 = t^2$ είναι λύση. Συνεπώς $(a_1(t) = 0)$

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} dt = t^2 \int \frac{dt}{t^4} = t^2 \left(-\frac{1}{3} t^{-3}\right) = -\frac{1}{3t}$$

είναι δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση.

Σταθεροί συντελεστές: Πίνακες διαγωνιοποιήσιμοι

Εξετάζουμε γραμμικά συστήματα $1^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής:

$$\underline{y}' = A\,\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{b}(t) = [b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)]^T$, $b_i \in C(I)$, $I \subseteq$

Μελετάμε πρώτα την αντίστοιχη ομογενή ($\underline{b}=\underline{0}$). Μια σύντομη αναφορά σε έννοιες ιδιοτιμών / ιδιοδιανυσμάτων:

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Το ζεύγος $(\lambda, \underline{u})$ όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ και $\underline{u} \in \mathbb{C}^n$ με $\underline{u} \neq \underline{0}$ είναι ζεύγος ιδιοτιμής–ιδιοδιανύσματος του πίνακα A αν και μόνο αν $A\underline{u} = \lambda \underline{u}$ (ισοδύναμα $(A-\lambda I_n)\underline{u} = \underline{0}$).

Το σύστημα $(A-\lambda I_n)\underline{u} = \underline{0}$ έχει μη μηδενική λύση ως προς $\underline{u}$ αν και μόνο αν $\det(A-\lambda I_n) = 0$.

Ορισμός: Το πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = \det(A-\lambda I_n)$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Η εξίσωση $\varphi(\lambda)=0$ λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του A. Το σύνολο ιδιοτιμών $\sigma(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda_i) = 0\}$ είναι το φάσμα του A.

Ορισμός: Αν $\lambda_i \in \sigma(A)$ τότε ο χώρος $\mathcal{N}_{\lambda_i} = \{\underline{u_j} \in \mathbb{C}^n : (A-\lambda_i I)\underline{u_j}$ ορίζεται ως ο ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Ορισμός: Ο μέγιστος αριθμός d_i γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i (ισοδύναμα $d_i = \dim \mathcal{N}_{\lambda_i}$) ονομάζεται γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

Ορισμός: Η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i ως ρίζας του $\varphi(\lambda)$ ονομάζεται αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i.

Είναι γνωστό ότι $\forall \lambda_i \in \sigma(A)$: $1 \leq d_i \leq r_i$. Επίσης (Θεώρημα Rank-nullity) $r_i + d_i = n$ όπου $r_i = \text{Rank}(A - \lambda_i I_n)$.

Ορισμός: Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λέγεται απλής δομής αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i \in \sigma(A)$ ισχύει $r_i = d_i$. Αν $d_i < r_i$ για κάποια ιδιοτιμή λ_i ο πίνακας λέγεται μη-απλής δομής.

Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ~~είναι~~ $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots \underline{u}_n\}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα. Επομένως:

$$A \underbrace{[\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \ldots \underline{u}_n]}_{P} = \underbrace{[\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \ldots \underline{u}_n]}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda = \text{diag}(\lambda)}$$

με $\det(P) \neq 0 \Rightarrow P^{-1} A P = \Lambda$, δηλ. ο πίνακας A διαγωνιοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας. Γενικότερα ο πίνακας A διαγωνιοποιείται αν και μόνο αν είναι απλής δομής (στην περίπτωση αυτή τα λ_i δεν είναι απαραίτητα διακεκριμένα).

Έστω ομογενές σύστημα $\underline{y}' = A\underline{y}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι απλής δομής. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό $\underline{y}(t) = P\underline{x}(t) \Leftrightarrow \underline{x}(t) = P^{-1}\underline{y}(t)$ όπου P (μη ιδιάζων) πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του A. Τότε:

$$\underline{x}' = P^{-1}\underline{y}' = P^{-1}A\underline{y} = P^{-1}AP\underline{x} = \Lambda\underline{x}$$

$$\Rightarrow x_i' = \lambda_i x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Rightarrow x_i = c_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow \underline{x} = [c_1 e^{\lambda_1 t}\ c_2 e^{\lambda_2 t} \ldots c_n e^{\lambda_n t}]^t$$

$$= e^{\Lambda t}\underline{c} \qquad (\underline{c}^T = [c_1 \ldots c_n])$$

$$\Rightarrow \underline{y} = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \dots \underline{u}_n] \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \underline{u}_i$$

Παρατηρούμε ότι αν ο πίνακας A είναι απλής δομής, τότε $A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^2 = P\Lambda P^{-1} \cdot P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}$ και γενικά $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$
Επομένως

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda^k t^k\right) P^{-1}$$

$$= P \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots e^{\lambda_n t}\} P^{-1}$$

Επομένως $\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y}_0 = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \dots \underline{u}_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \underbrace{P^{-1}\underline{y}_0}_{\underline{c}}$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \underline{u}_i$$

όπου c_i αυθαίρετες σταθερές ($\Leftrightarrow y_{0i}$ αυθαίρετες σταθερές).

Παράδειγμα: Να λυθεί το Π.Α.Τ

$$\underline{y}' = A\underline{y}, \quad A = \begin{bmatrix} -11 & 16 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}, \quad \underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε γενικά ότι αν $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, τότε:

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \underbrace{(a_{11}+a_{22})}_{tr(A)}\lambda + \underbrace{a_{11}a_{22}-a}_{\det(A)}$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = (\lambda+3)(\lambda-5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -3 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 5$$

Αν $\underline{u}_1 = [x \;\; y]^T$ το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -3$:

$$\begin{bmatrix} -8 & 16 \\ -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x = 2y \,, \quad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αν $\underline{u}_2 = [z \;\; w]^T$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} -16 & 16 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow z = w \,, \quad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα η γενική λύση είναι της μορφής:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Για $t = 0$ η γενική λύση δίνει:

$$\underline{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2c_1 + c_2 &= 4 \\ c_1 + c_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Επομένως: $\underline{y}(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} + 2e^{5t} \\ e^{-3t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}$

Παράδειγμα: Νά βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$\underline{y}' = A\,\underline{y}(t) \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\varphi(\lambda) = -\det(\lambda I - A) = -\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \lambda+2 & -(\lambda+2) & 0 \\ -1 & \lambda+1 & - \\ 0 & -(\lambda+2) & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda=1$, $\lambda=-2$ (με ~~το~~ αλγεβρικές πολλαπλότητες 1 και 2 αντίστοιχα). Στην ιδιοτιμή $\lambda=1$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x &= y+z \\ 2y &= x+z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε την ~~αλγ~~ γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda=-2$, $d_2 = 3 - r_2$ όπου $r_2 = \text{Rank}\,[A - \lambda_2 I_3] = \text{Rank}\,[A + 2 I_2]$

Είναι:

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r_2 = 1 \Rightarrow d_2 = 2$$

Άρα υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -2$ και ο πίνακας A είναι απλής δομής. Αν $\underline{u} = [x \ y \ z]^T$ ένα ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow x + y + z = 0$$

Θέτοντας $y = \tilde{c}_1$ (αυθαίρετο) και $z = \tilde{c}_2$ (αυθαίρετο) έχουμε $x = -\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 \Rightarrow$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} -\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} = \tilde{c}_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{c}_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα είναι $[-1 \ 1 \ 0]^T$ και $[-1 \ 0 \ 1]^T$ και επομένως

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{t} - c_2 e^{-2t} - c_3 e^{-2t} \\ c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^{t} + c_3 e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει πραγματικούς συντελεστές και επομένως οι μιγαδικές του ρίζες (αν υπάρχουν) είναι συζυγείς (και έχουν την ίδια αλγεβρική πολλαπλότητα). Έστω ζεύγος ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος $(\lambda, \underline{u})$ όπου $\lambda = \sigma + i\omega$ $(\omega \neq 0)$ και $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$ $(\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n)$. Τότε

$$A\underline{u} = \lambda \underline{u} \Rightarrow (\overline{A\underline{u}}) = (\overline{\lambda \underline{u}}) \Rightarrow A\bar{\underline{u}} = \bar{\lambda}\bar{\underline{u}}$$

, δηλαδή $(\bar{\lambda}, \bar{\underline{u}})$ είναι επίσης ζεύγος ιδιοτιμής / ιδιοδιανύσματος του A. Επίσης:

$$A\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} + i\underline{z})$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A\underline{x} &= \sigma\underline{x} - \omega\underline{z} \\ A\underline{z} &= \omega\underline{x} + \sigma\underline{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\begin{bmatrix} \sigma \\ -\omega \end{bmatrix}$$

Τα διανύσματα $\underline{x}$ και $\underline{z}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο $\mathbb{R}^n$:
(Αν υπήρχαν $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 c_2 \neq 0$: $c_1\underline{x} + c_2\underline{z} = 0 \Rightarrow \underline{z} = -\frac{c_1}{c_2}$
γιατί αν $c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ (άτοπο) και επομένως:

$$A\left(1 - i\cancel{\frac{c_1}{c_2}}\right)\underline{x} = (\sigma + i\omega)\left(1 - i\cancel{\frac{c_1}{c_2}}\right)\underline{x}$$

$$\Rightarrow A\underline{x} = (\sigma + i\omega)\underline{x}$$

άτοπο καθώς το αριστερό διάνυσμα είναι πραγματικό και το δεξί γνήσια μιγαδικό).

Επομένως, στην ειδική περίπτωση όπου $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με μιγαδικές ιδιοτιμές $\sigma \pm i\omega$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{x} \pm i\underline{z}$ έχουμε:

$$A\underbrace{[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]}_{P,\ |P| \neq 0} = \underbrace{[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]}_{P}\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|c} \sigma & \omega \\ \hline -\omega & \sigma \end{array}\right]$$

Θεώρημα. Αν $(\lambda, \underline{u})$ είναι ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $\lambda = \sigma + i\omega$ $(\sigma, \omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0)$ και $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$ $(\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n)$ τότε δύο πραγματικές, γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $\underline{y}' = A\underline{y}$ είναι:

$$\underline{\varphi}_1(t) = e^{\sigma t}(\cos\omega t\, \underline{x} - \sin\omega t\, \underline{z})$$

$$\underline{\varphi}_2(t) = e^{\sigma t}(\sin\omega t\, \underline{x} + \cos\omega t\, \underline{z}).$$

Απόδειξη: Κατά τα γνωστά $\underline{y}(t) = e^{\lambda t}\underline{u}$ είναι λύση της $\underline{y}' = A\underline{y}$ (επαλήθευση: $\underline{y}' = \lambda e^{\lambda t}\underline{u} = e^{\lambda t}A\underline{u} = A\underline{y}$). Έστω $\underline{y} = \underline{\varphi}_1 + i\underline{\varphi}_2(t)$ όπου $\underline{\varphi}_1$ και $\underline{\varphi}_2$ πραγματικές συναρτήσεις. Τότε

$$\underline{y}' = \underline{\varphi}_1' + i\underline{\varphi}_2' = A\underline{y} = A(\underline{\varphi}_1 + i\underline{\varphi}_2) \Rightarrow \underline{\varphi}_1' = A\underline{\varphi}_1 \text{ και } \underline{\varphi}_2' = A\underline{\varphi}_2$$

και επομένως $\underline{\varphi}_1$ και $\underline{\varphi}_2$ είναι επίσης (πραγματικές) λύσεις της εξίσωσης. Συγκεκριμένα

$$\underline{y} = e^{(\sigma+i\omega)t}(\underline{x} + i\underline{z}) = e^{\sigma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)(\underline{x} + i\underline{z})$$

$$= e^{\sigma t}(\cos\omega t\, \underline{x} - \sin\omega t\, \underline{z}) + i e^{\sigma t}(\sin\omega t\, \underline{x} + \cos\omega t\, \underline{z})$$

$$= \underline{\varphi}_1(t) + i\underline{\varphi}_2(t)$$

Αν $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2$ εξαρτημένες στο $\mathbb{R}$ θα υπήρχαν c_1, c_2 (όχι και τα δύο μηδέν) ώστε:

$$c_1 e^{\sigma t}(\cos\omega t\, \underline{x} - \sin\omega t\, \underline{z}) + c_2 e^{\sigma t}(\sin\omega t\, \underline{x} + \cos\omega t\, \underline{z}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Για $t=0$: $c_1\underline{x} + c_2\underline{z} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ αφού $(\underline{x}, \underline{z})$ γραμμικά ανεξάρτητα στο $\mathbb{R}^n$. (άτοπο). □

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\underline{y}' = A\underline{y} \quad \text{όπου} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i2$$

Αν $[x_1, y_1]^T$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2i$

$$\begin{bmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow y_1 = 2i\,x_1 \,,\ \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$$

Γράφουμε $\quad \underline{u}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + i\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\underline{z}}$

Δύο (γραμμικά ανεξάρτητες) πραγματικές λύσεις είναι:

$$\underline{\varphi}_1(t) = \cos 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{bmatrix}$$

και

$$\underline{\varphi}_2(t) = \sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos 2t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix}$$

Και η γενική (πραγματική) λύση είναι:

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t \\ -2c_1 \sin 2t + 2c_2\cos 2t \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Νά λυθεί τό Π.Α.Τ.

$$\underline{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{y}(t) \qquad \underline{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τοῦ πίνακα A εἶναι

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2+1\right]$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+i$, $\lambda_3 = 1-i$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$(\lambda=1): \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\underline{u}_1} = \underline{0} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \qquad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda=1+i): \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -1 & i \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\underline{u}_2} = \underline{0} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ y=iz \end{matrix}\right\} \qquad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda=1-i): \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ z=iy \end{matrix}\right\} \qquad \underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Καί $\underline{\varphi}_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \varphi_2(t) = e^t \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - e^t \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Καί $\underline{\varphi_3}(t) = e^t \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^t \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Δηλ.

$$\underline{\varphi_1}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\varphi_2}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix}, \quad \underline{\varphi_3}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix}$$

Και η γενική λύση είναι:

$$\underline{y}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Γιά $t=0$, από τήν αρχική συνθήκη προκύπτει

$$\underline{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Καί επομένως η λύση του ΠΑΤ είναι:

$$\underline{y}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

$$= e^t \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$$

Σταθεροί συντελεστές: Πίνακες μή-απλής δομής.

Εστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μέ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2} \dots (\lambda-\lambda_\rho)^{\tau_\rho}$$

οπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i,j=1,2,\dots,\rho)$. Ο ακέραιος τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i. Ο ακέραιος

$$d_i = \dim \mathcal{N}_r(\lambda_i I - A) := n - r_i$$

είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i. Είναι γνωστό από τήν γραμμική άλγεβρα ότι:

$$1 \leq d_i \leq \tau_i \qquad (i=1,2,\dots,\rho).$$

Αν $d_i = \tau_i$ $\forall i=1,2,\dots,\rho$ ο πίνακας A είναι "απλής δομής", διαφορετικά (αν $d_i < \tau_i$ γιά ενα τουλάχιστον i) ο πίνακας A είναι "μή απλής δομής". Είναι επίσης γνωστό ότι σε ιδιοτιμή μέ $d_i < \tau_i$ αντιστοιχούν d_i γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Η βάση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στήν ιδιοτιμή λ_i, $\mathcal{N}_r(\lambda_i I - A)$ συμπληρώνεται από $\tau_i - d_i$ γενικευμένα ιδιοδιανύσματα.

<u>Ορισμός</u>: Τό διάνυσμα $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης m πού αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i αν και μόνο αν

$$(\lambda_i I - A)^m \underline{v} = \underline{0} \quad \text{καί} \quad (\lambda_i I - A)^{m-1}\underline{v} \neq \underline{0}$$

Σύμφωνα μέ τον ορισμό ένα απλό ιδιοδιάνυσμα είναι γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης $m=1$.

Μία αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους k πού παράγεται από (απλό) ιδιοδιάνυσμα $\underline{v}_1$ είναι σύνολο $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_k\}$ τέτοια ώστε

$$\left.\begin{aligned}(A-\lambda I_n)\,\underline{v}_k &= \underline{v}_{k-1}\\ (A-\lambda I_n)\,\underline{v}_{k-1} &= \underline{v}_{k-2}\\ &\vdots\\ (A-\lambda I_n)\,\underline{v}_2 &= \underline{v}_1\\ \text{καί}\quad (A-\lambda I_n)\,\underline{v}_1 &= 0\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Γενικά έχουμε: $(A-\lambda I_n)^j\,\underline{v}_j = \underline{0}$. ($(A-\lambda I_n)^2\,\underline{v}_2 = (A-\lambda I)(A-\lambda I)\,\underline{v}_2 = (A-\lambda I)\,\underline{v}_1 = 0$, κλπ). Οι σχέσεις (*) γράφονται:

$$A\left[\underline{v}_1\ \underline{v}_2\ \cdots\ \underline{v}_{k-1}\ \underline{v}_k\right] =$$

$$\left[\underline{v}_1\ \underline{v}_2\ \cdots\ \underline{v}_{k-1}\ \underline{v}_k\right]\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda\end{bmatrix}}_{J(\lambda)}$$

Όταν ο πίνακας είναι μή απλής δομής δέν διαγωνιοποιείται (μέσω μετασχηματισμών ομοιότητας) αλλά μπορεί νά μετασχηματισθή σέ κανονική μορφή Jordan. Τά βασικά ερωτήματα πού προκύπτουν είναι:

(α) Πόσες αλυσίδες δημιουργούνται από τό σύνολο των γενικευμένων διανυσμάτων πού αντιστοιχούν σέ μία ιδιοτιμή λ_i;

(β) Ποιό είναι τό μήκος των αλυσίδων;

Έστω $\lambda_i \in \sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda)=0\}$ (φάσμα του A). Ορίζουμε

$$r_{ki} = \mathrm{Rank}\,(A-\lambda_i I_n)^k \qquad k=1,2,\ldots \qquad (r_{ki}\downarrow)$$

Η γεωμετρική πολλαπλότητα $d_i = n - r_{1i}$ δίνει τον αριθμό αλυσίδων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Το μήκος της μέγιστης αλυσίδας είναι ο ελάχιστος ακέραιος ℓ_i γιά τον οποίο $r_{\ell_i i} = r_{\ell_i+1,i}$. Στην ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχούν γενικευμένα ιδιοδιανύσματα μέχρι τάξης ℓ_i (όχι μεγαλύτερης τάξης).

Τά απλά ιδιοδιανύσματα είναι πλήθους $n-r_{1i}$ $(=d_i)$. Τά γραμμικά ανεξάρτητα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $2^{ης}$ τάξης είναι πλήθους $r_{1i}-r_{2i}$, κλπ (τά γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τάξης ℓ_i είναι πλήθους $r_{\ell_i-1,i} - r_{\ell_i,i}$) Η χαρακτηριστική Segré ορίζεται ως:

$$S_i = [\, n-r_{1i},\ r_{1i}-r_{2i}, \ldots,\ r_{\ell_i-1,i} - r_{\ell_i,i} \,]$$

Καί περιέχει τό πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων κάθε τάξης. Ο αριθμός γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων κάθε αλυσίδας δίνεται από τό διάγραμμα Ferrer.

Παράδειγμα: Εστω ιδιοτιμή λ_0 πίνακα $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ γιά την οποία: $r_1 = 5$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 1$, $r_5 = 1$.

Η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_0 είναι $10 - r_1 = 5$. Ο ελάχιστος $\ell \in \mathbb{N}$ γιά τον οποίο $r_\ell = r_{\ell+1}$ είναι $\ell = 4$. Άρα έχουμε γενικευμένα ιδιοδιανύσματα μέχρι $4^{ης}$ τάξης. Η χαρακτηριστική Segré είναι:

$$S = [\, n-r_1,\ r_1-r_2,\ r_2-r_3,\ r_3-r_4 \,] = [5, 2, 1, 1]$$

Καί επομένως έχουμε 5 (απλά) ιδιοδιανύσματα, 2 γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $2^{ης}$ τάξης, 1 γεν. ιδ. $3^{ης}$ τάξης και 1 γεν. ιδιοδ. $4^{ης}$ τάξης. Τό διάνυσμα Ferrer:

$n - r_1 = 5$	$\rightarrow$	*	*	*	*	*
$r_1 - r_2 = 2$	$\rightarrow$	*	*			
$r_2 - r_3 = 1$	$\rightarrow$	*				
$r_3 - r_4 = 1$	$\rightarrow$	*				
		4	2	1	1	1

και επομένως έχουμε 1 αλυσίδα μήκους 4, 1 μήκους 2 και τρείς μήκους 1. Η μορφή Jordan που αντιστοιχεί στο λ_0 είναι

$$\operatorname{diag}\left\{ \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \lambda_0, \lambda_0, \lambda_0 \right\}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Νά βρεθεί η μορφή Jordan τοῦ πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι: $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ 5 & \lambda+3 & 7 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} =$

$$= \lambda^2(\lambda+3) + 5\lambda + 7 - 2(0 + \lambda + 3) = \lambda^2(\lambda+3) + 3\lambda + 1 =$$

$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3$$

$\Rightarrow \lambda = -1$, $\tau = 3$ (αλγεβρική πολλαπλότητα). Έστω

$\underline{u}_1 = [a \; b \; c]^T$ (απλό) ιδιοδιάνυσμα:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \underline{0} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a+b+2c &= 0 \\ a+c &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a+c &= 0 \\ b+c &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Εφόσον dim $N_r(\lambda I - A) = 1$ έχουμε 1 απλό ιδιοδιάνυσμα 1 γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης 2 και 1 γεν. ιδιοδ. τάξης 3.
Η αλυσίδα ορίζεται ως: (με $\lambda = -1$)

$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda I)\,\underline{v}_1 &= 0 \\ (A-\lambda I)\,\underline{v}_2 &= \underline{v}_1 \\ (A-\lambda I)\,\underline{v}_3 &= \underline{v}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (A-\lambda I)\,\underline{v}_1 &= \underline{0} \\ (A-\lambda I)^2\,\underline{v}_2 &= \underline{0} \\ (A-\lambda I)^3\,\underline{v}_3 &= \underline{0} \end{aligned}\right\}.$$

$$(A+I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A+I)^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε $\underline{v}_3 = [1 \ 0 \ 0]^T$. Τότε

$$\underline{v}_2 = (A+I)\,\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \underline{0}$$

$$\underline{v}_1 = (A+I)\,\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \underline{0}$$

Επομένως:

$$A\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J.}$$

$$A\,[\,\underline{v_1} \quad \underline{v_2} \quad \underline{v_3}\,] = [\,\underline{v_1} \quad \underline{v_2} \quad \underline{v_3}\,]$$

και

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Θεώρημα. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μέ e διακεκριμένες ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_e\}$ και αντίστοιχα Jordan blocks $\{J_1, J_2, \dots J_e\}$ διαστάσεων $\{r_1, r_2, \dots, r_e\}$ αντίστοιχα. Έστω U πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, έτσι ώστε:

$$A = U \operatorname{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_e\} U^{-1} := U J U^{-1}$$

Τότε $e^{At} = U e^{Jt} U^{-1}$ όπου $e^{Jt} = \operatorname{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_e t}\}$

Αν $J_i = \operatorname{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{id_i}\}$ όπου $i \in \{1, 2, \dots, e\}$ και

$$J_{ij} = J_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_{ij}\times k_{ij}}$$

τότε $$e^{J_{ij}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{k_{ij}-1}/(k_{ij}-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απόδειξη : Βασίζεται στα παρακάτω βήματα:

(i) $$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(UJU^{-1})^k t^k}{k!} = U\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!}\right)U^{-1}$$

$$= U e^{Jt} U^{-1}$$

(ii) $$J^k = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_e\}^k = \text{diag}\{J_1^k, J_2^k, \dots, J_e^k\}.$$

(iii) $$e^{Jt} = I + \text{diag}\{J_1, \dots J_e\}t + \frac{1}{2!}\text{diag}\{J_1^2, \dots J_e^2\}t^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{k!}\text{diag}\{J_1^k, \dots, J_e^k\}t^k + \dots$$

$$= \text{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_e t}\}$$

Παρόμοια $e^{J_{ij} t} = \text{diag}\{e^{J_{i1} t}, \dots, e^{J_{id_i} t}\}.$

(iv) $$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I_{m_{ij}} + N_{m_{ij}}$$

όπου $N_{m_{ij}}$ μηδενοδύναμος (nillpotent πίνακας). Επειδή $\lambda_i I_{m_{ij}}$ και $N_{m_{ij}}$ αντιμετατίθενται:

$$e^{J_{ij} t} = e^{\lambda_i t I_{m_{ij}} + N_{m_{ij}} t} \overset{(*)}{=} e^{\lambda_i t} e^{N_{m_{ij}} t}$$

Και: $$e^{N_{m_{ij}} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_{m_{ij}}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m_{ij}-1} \frac{N_{m_{ij}}^k t^k}{k!}$$

όπου $$N_{m_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{m_{ij}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$N^{m_{ij}} = 0$ καί επομένως $e^{J_{ij}t}$ έχει τή μορφή που δίνεται στό Θεώρημα. $\square$

Στήν απόδειξη χρησιμοποιήσαμε τό παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα: Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καί $AB = BA$, τότε $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$

Απόδειξη: Θέτουμε $\Phi(t) = e^{(A+B)t} e^{-At} e^{-Bt}$. Τότε:

$$\Phi'(t) = e^{(A+B)t}(A+B)e^{-At}e^{-Bt} + e^{(A+B)t}(-A)e^{-At}e^{-Bt} + e^{(A+B)t}e^{-At}(-B)e^{-Bt}$$

$$= e^{(A+B)t}\left\{ (\cancel{A}+B)e^{-At} - A\cancel{e^{-At}} - e^{-At}B \right\} e^{-Bt}$$

Χρησιμοποιώντας τήν ιδιότητα $AB = BA \Rightarrow e^{-At}B = Be^{-At}$ που ισχύει εφόσον:

$$e^{-At}B = \left\{ I - A + \frac{A^2t^2}{2!} - \frac{A^3t^3}{3!} + \dots \right\} B =$$

$$= B - ABt + \frac{A^2Bt^2}{2!} - \frac{A^3Bt^3}{3!} + \dots$$

$$= B\left(I - At + \frac{A^2t^2}{2!} - \frac{A^3t^3}{3!} + \dots \right) = Be^{-At}$$

Επομένως: $\Phi'(t) = 0 \Rightarrow \Phi(t) = \Phi(0) = I_n \Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$

$\square$

Παράδειγμα: Έστω $J = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] := \mathrm{diag}\{J_1, J_2\}$

Έχουμε $\varphi(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \;,\; \tau_1 = 3 \;,\; d_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \;,\; \tau_2 = d_2 = 1 \end{array}\right\}.$$

$$e^{Jt} = \mathrm{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}\}$$

$$e^{J_1 t} = e^{\lambda_1 t + N_3 t} = e^{\lambda_1 t} e^{N_3 t} = e^{t} e^{N_3 t}$$ όπου

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_3^3 = 0$$

Επομένως:

$$e^{N_3 t} = I_3 + N_3 t + \frac{1}{2} N_3^2 t^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Και επομένως:

$$e^{J_1 t} = e^{t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{J_2 t} = e^{2t}$$

Άρα: $$e^{Jt} = \left[\begin{array}{ccc|c} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\underline{y}' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underline{y} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \qquad \underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\underbrace{\lambda}_{-1} I - A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_1} = \underline{0} \Rightarrow x_1 + y_1 = 0 \qquad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{l} (A - \lambda I_2)\,\underline{u}_1 = \underline{0} \\ (A - \lambda I_2)\,\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_1}.$$

$$\Rightarrow \quad x_2 + y_2 = 1 \qquad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = [\,\underline{u}_1 \,\vdots\, \underline{u}_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Γενική λύση ομογενούς:

$$\underline{y}^{ομ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{bmatrix}}^{\cancel{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & -te^{-t} + e^{-t} \end{bmatrix} \cancel{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{01} + y_{02} \end{bmatrix}.$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\underline{y_0}$$

$$= e^{-t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ \cancel{-1}\cancel{+1}-t & 1-t \end{bmatrix}\underline{y_0} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}\underline{y_0}$$

Γενική λύση (μη-ομογενούς)

$$\underline{y}(t) = e^{At}\underline{y_0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,\underline{b}\,d\tau =$$

$$= e^{At}\cancelto{0}{\underline{y_0}} + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\,\underline{b}\,d\tau$$

$$e^{At} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix}. \qquad e^{-A\tau} = e^{\tau}\begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -1 & 1+\tau \end{bmatrix}.$$

$$\int_0^t e^{-A\tau}\,\underline{b}\,d\tau = \int_0^t e^{\tau}\begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -1 & 1+\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\tau} \\ -e^{\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} \left[e^{\tau}\right]_0^t \\ \left[-e^{\tau}\right]_0^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ 1 - e^t \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ -1+e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-e^{-t} - t(1-e^{-t}) \\ -1+e^{-t} - (1-t)(1-e^{-t}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-t-e^{-t}+te^{-t} \\ -1+e^{-t}-(1-e^{-t}-t+te^{-t}) \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 1-t-e^{-t}+te^{-t} \\ -2+2e^{-t}+t-te^{-t} \end{bmatrix}.$$