

1^ο Φυλλάδιο ασκήσεων Διαφορικών Εξισώσεων

Άσκηση 1: Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y' + \alpha y = \beta e^{-\lambda t}, \quad \alpha, \lambda > 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

Να αποδειχθεί ότι για κάθε λύση της ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$.

Άσκηση 2: Θεωρούμε το Π.Α.Τ.

$$y' - y = 1 + 3 \sin(t), \quad y(0) = y_0.$$

Να προσδιοριστεί η τιμή του y_0 ώστε η λύση του Π.Α.Τ. να είναι φραγμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
(Απάντηση: $y_0 = -\frac{5}{2}$).

Άσκηση 3: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = \int_0^2 y(t) dt, \quad y(0) = 1.$$

(Υπόδειξη: Θέτουμε $\mu = \int_0^2 y(t) dt$. Απάντηση: $y(t) = 1 - e^2 + e^{2-t}$).

Άσκηση 4: Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

i) $y' + y = ty^3$

ii) $y' + y = y - 1$ (Απάντηση: $y^2 = ce^{-2t} + 1$).

iii) $y' + \frac{3}{t}y = t^2 y^2, t > 0$ (Απάντηση: $y(t) = [(c - \ln t)t^3]^{-1}$).

Άσκηση 5: Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

i) $3y^4 + 4xy + (5xy^3 + 2x^2) \frac{dy}{dx} = 0$

ii) $-3ty + 8y^3 + (t^2 + 4ty^2)y' = 0$

iii) $-3ty + 2y^3 + (t^2 + ty^2)y' = 0$

αν δέχονται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$ (ή αντίστοιχα $\mu(t, y) = t^\alpha y^\beta$).

Άσκηση 6: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t + 2y + y^2) + (t + 4ty + 5y^2)y' = 0,$$

αν δέχεται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(t, y) = \phi(t + y^2)$.

Άσκηση 7: Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

i) $(4t^3 y^3 - 2ty)y' + 3y^4 t^2 - y^2 = 0$

ii) $1 + \cos(t + x) + x' \cos(t + x) = 0$