Εθνικο και Καποδιστριακο
Πανεπιστημιο Αθηνων
Τμημα Μαθηματικων

Εργασια

Διαφορικές Εξισώσεις: Λύσεις Επιλεγμένων Ασκήσεων απο το βιβλίο Ν.Δ. Αλικάκου-Γ.Η. Καλογερόπουλου, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 2003

Δανάη Καλότυχου

Κεφάλαιο 1: 1.1, 1.2, 1.4, 1.9, 1.16, 1.23, 1.24, 1.25, 1.38, 1.41, 1.44

Κεφάλαιο 2: 2.1, 2.11, 2.12, 2.14, 2.15

Κεφάλαιο 3: 3.1, 3.2, 3.5, 3.7

Κεφάλαιο 4: 4.3, 4.7, 4.8, 4.14, 4.16, 4.18, 4.29, 4.32, 4.34

Κεφάλαιο 5: 5.1, 5.2, 5.4

Κεφάλαιο 6: 6.1, 6.4,6.6, 6.8, 6.9, 6.11, 6.12, 6.18, 6.21, 6.22, 6.37, 6.38, 6.39, 6.41

1 Εξισώσεις 1ης τάξης

Άσκηση 1.1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$xy' = y\left(1+y^2\right) \tag{1.1}$$

Λύση. Έχουμε

$$x\frac{dy}{dx} = y + y^3 \Longleftrightarrow \frac{1}{y+y^3}dy = \frac{1}{x}dx \Longleftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{y+y^3}dy = \int \frac{1}{x}dx + c \tag{1.2}$$

Πρώτα θα λύσουμε το$\int \frac{1}{y+y^3}dy$

$$\int \frac{1}{y+y^3}dy = \int \frac{1}{y\left(1+y^2\right)}dy = \int \left(\frac{A}{y} + \frac{By+c_1}{1+y^2}\right)dy \tag{1.3}$$

Έχουμε δηλαδή $\frac{1}{y+y^3} = \frac{A}{y} + \frac{By+c_1}{1+y^2}$ και σύμφωνα με την ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$1 = A\left(1+y^2\right) + y\left(By+c_1\right) \Longleftrightarrow 1 = A + Ay^2 + By^2 + c_1 y \Longleftrightarrow$$

$$1 = A + yc_1 + y^2\left(A+B\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ c_1 = 0 \\ A + B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

Άρα από την (1.2) έχουμε:

$$\int \frac{1}{y+y^3}dy = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{-1y}{1+y^2}\right)dy = \int \frac{1}{y}dy - \int \frac{y}{1+y^2}dy = \ln y - \int \frac{y}{1+y^2}dy \tag{1.4}$$

Για να λύσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{y}{1+y^2}dy$ θέτουμε $1+y^2 = u \Rightarrow 2ydy = du \Rightarrow ydy = \frac{du}{2}$. Άρα

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)$$

Επομένως η (1.4) γίνεται $\int \frac{1}{(1+y^2)y}dy = \ln y - \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)$. Τελικά η (1.1) μετασχηματίζεται στην

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = \ln x + c \Longleftrightarrow$$

$$\ln y - \ln\left(1+y^2\right)^{1/2} = \ln x + c \Leftrightarrow \ln\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \ln x + c \Longleftrightarrow$$

$$\exp\left(\ln\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \exp\left(\ln x + c\right) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \exp\left(\ln x + c\right)$$

□

Άσκηση 1.2

Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$y'(t) = -3\left(y(t)\right)^{\frac{4}{3}}\sin t, \qquad y(t_0) = y_0 > 0$$

Λύση. Έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = -3\left(y(t)\right)^{\frac{4}{3}}\sin t \Longleftrightarrow \frac{1}{-3\left(y(t)\right)^{\frac{3}{4}}}dy = \sin t dt \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3}\left(y(t)\right)^{\frac{-4}{3}}dy = \sin t dt \Longleftrightarrow \int -\frac{1}{3}\left(y(t)\right)^{\frac{-4}{3}}dy = \int \sin t dt \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3}\frac{y^{\frac{-1}{3}}}{\frac{-1}{3}} = -\cos t + c \Longleftrightarrow y^{-1} = (c-\cos t)^3 \Longleftrightarrow y(t) = \frac{1}{(c-\cos t)^3}$$

Από το Π.Α.Τ. γνωρίζουμε ότι

$$y(t_0) = y_0 > 0,$$

άρα

$$y_0 = \frac{1}{(c-\cos t_0)^3} > 0.$$

Επομένως αρκεί $(c-\cos t_0)^3 > 0 \Longleftrightarrow c > \cos t_0$ □

Άσκηση 1.4

Να λυθούν τα Π.Α.Τ.:

(a) $y' = (cosx)(y-1)\,,\ y(0) = 1$

Λύση. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = (\cos x)(y-1) \Longleftrightarrow \frac{dy}{y-1} = \cos x dx \Longleftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \cos x dx \Longleftrightarrow \ln\left(|y-1|\right) = \sin x + c \Longleftrightarrow$$
$$\exp\left(\ln|y-1|\right) = \exp\left(\sin x + c\right) \Longleftrightarrow |y-1| = \exp\left(\sin x + c\right) \Longleftrightarrow$$

$$\overset{c^*=\exp c}{\Longleftrightarrow} |y-1| = \exp\left(\sin x\right) c^* \tag{1.5}$$

Από το Π.Α.Τ. έχουμε:

$$0 = \left(\exp 0\right)\left(c^*\right) \Longleftrightarrow 0 = c^* \Longleftrightarrow c^* = 0$$

Επομένως η (1.5) γίνεται:

$$|y-1| = 0 \Longleftrightarrow y = \pm 1$$

□

(β) $y' = 1 + y^2$, $y\left(0\right) = 1$, προσδιορίστε το διάστημα ύπαρξης.

Λύση. Έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = 1 + y^2 \Longleftrightarrow \frac{1}{1+y^2}dy = dt \Longleftrightarrow \int \frac{1}{1+y^2}dy = \int dt + c \Longleftrightarrow$$

$$\tan^{-1}\left(y\right) = t + c \Longleftrightarrow \arctan y = t + c$$

Από το Π.Α.Τ. ξέρουμε ότι $y\left(0\right) = 1$, άρα $c = \frac{\pi}{4}$. Δηλαδή $y\left(t\right) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.
Για το διάστημα ύπαρξης προκύπτει από το θεώρημα Peano:

$$D = \left\{(t,y) : |t| \leq a,\ |y-1| \leq b,\ a,b > 0\right\}$$

Η $f\left(t,y\right)$ είναι συνεχής στο D. Είναι επίσης συμπαγές το D άρα:

$$|y-1| \leq b \Longleftrightarrow -b+1 \leq y \leq b+1$$
$$M = \max f\left(t,y\right) = \max\left(1+y^2\right) = 1 + \left(b+1\right)^2$$
$$\delta = \delta\left(a,b\right) = \min\left\{a, \frac{b}{1+\left(1+b\right)^2}\right\} \leq \frac{b+1-1}{1+\left(b+1\right)^2} \leq \frac{b+1}{1+\left(b+1\right)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Άρα $t \leq \frac{1}{2}$ οπότε $\Delta = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ □

(γ) $y' = \frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}$, $y\left(0\right) = -1$.

Λύση. Έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2+4t+2}{2\left(y-1\right)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2\left(y-1\right)dy = \left(3t^2+4t+2\right)dt \Longleftrightarrow \int 2\left(y-1\right)dy = \int \left(3t^2+4t+2\right)dt$$

$$\Longleftrightarrow \int 2ydy - \int dy = \int 3t^2dt + \int 4tdt + \int 2dt \Longleftrightarrow y^2 - y = t^3 + 2t^2 + 2t + c$$

Από το Π.Α.Τ. προκύπτει ότι :

$$c = 2$$

Επομένως καταλήγουμε στην εξής πεπλεγμένη μορφή:

$$y^2 - y = t^3 + 2t^2 + 2t + 2$$

□

(δ) $3t\frac{dy}{dt} = y\cos t,\ y\left(1\right) = 0$

Λύση. Μπορούμε να τη μετατρέψουμε σε Δ.Ε. χωριζόμενων μεταβλητών:

$$\frac{1}{y}dy = \frac{\cos t}{3t}dt \Longleftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{\cos t}{3t}dt$$

Όμως το $\int \frac{\cos t}{3t}dt$ δεν λύνεται με τις γνωστές μεθόδους ολοκλήρωσης. Επομένως

$$\ln y = \int \frac{\cos t}{3t}dt + c \Longleftrightarrow y = \exp\left(\int \frac{\cos t}{3t}dt + c\right)$$

□

Άσκηση 1.9

Να προσδιοριστεί το α έτσι ώστε το ακόλουθο Π.Α.Τ. να έχει περιοδική λύση:

$$y' - \frac{1}{2}y = 2\sin t, \quad y\left(0\right) = a$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι είναι γραμμική Δ.Ε. 1ου βαθμού, οπότε μάς είναι γνωστός ο τύπος επίλυσής της:

$$y = \exp^{-\int p(t)dt}\left[c + \int \exp^{\int p(t)dt} q\left(t\right)dt\right]$$

Στη δοθείσα Δ.Ε. έχουμε: $p\left(t\right) = -\frac{1}{2}$ και $q\left(t\right) = 2\sin t$. Οπότε αντικαθιστώντας θα έχουμε:

$$y = \exp\left(\int \frac{1}{2}dt\right)\left[c + \int \exp\left(\int -\frac{1}{2}dt\right) 2\sin tdt\right] \Longrightarrow$$

$$y = \exp\left(\frac{1}{2}t\right)\left[c + \int \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\sin tdt\right]$$

Για το $I = \int \exp^{-\frac{1}{2}t} 2\sin t dt$ έχουμε:

$$I = \int \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\sin t dt = \int \left[(-2)\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\right]' 2\sin t dt =$$

$$= -4\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\sin t + \int (-2)\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\cos t dt =$$

$$= -2\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\sin t + \int \left[(-2)\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)\right]' 2\cos t dt =$$

$$= -2\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\sin t - 2\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\cos t + \int (-2)\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\sin t dt =$$

$$= -2\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\left(\sin t + \cos t\right) + (-2)\int \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\sin t dt =$$

$$= -2\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\left(\sin t + \cos t\right) - I \Longrightarrow$$

$$I = \frac{-2\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\left(\sin t + \cos t\right)}{2} = -\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\left(\sin t + \cos t\right)$$

Άρα

$$y\left(t\right) = \exp\left(\frac{1}{2}t\right)\left[c + \int \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\sin t dt\right] = \exp\left(\frac{1}{2}t\right)\left[c - \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) 2\left(\sin t + \cos t\right)\right]$$

Για $y\left(0\right) = a$ έχουμε:

$$a = 1\left(c - 2\right) \Longleftrightarrow a = c - 2$$

Για να έχει περιοδική λύση η Δ.Ε. θα πρέπει:

$$c = 0 \Longrightarrow a = -2$$

□

Άσκηση 1.16

Έστω $b\left(t\right)$ Τ-περιοδική συνεχής συνάρτηση και έστω

$$b_0 = \int_0^1 b\left(s\right) ds$$

Να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις της $x' = b\left(t\right)$ ειναι Τ-περιοδικές αν $b_0 = 0$ και μη φραγμένες αν $b_0 \neq 0$.

Λύση. Έστω $T > 0$ θεωρώ τη συνάρτηση:

$$x' = 0x + b\left(t\right) \tag{1.6}$$

της μορφής

$$y' = p(\tau)\, y + q(\tau)$$

με $p(\tau) = 0$ και $b(t) = q(\tau)$. Θέτω

$$a_0 = \int_0^\tau 0 ds = 0$$

$$c_0 = \int_0^\tau \exp\left(\int_0^\tau 0du\right) b(s)\, ds = \int_0^\tau \exp(0)\, b(s)\, ds = \int_0^\tau b(s)\, ds \Longrightarrow c_0 = b_0$$

Από θεώρημα Fredholm, επειδή $a = 0$ έχουμε

αν $b_0 = 0 \Longrightarrow c_0 = 0$ όλες οι λύσεις της (1.6) ειναι T-περιοδικές

αν $b_0 \neq 0 \Longrightarrow c_0 \neq 0$ τότε δίνεται περιοδική λύση και τότε από θεώρημα 1.2, η (1.6) δεν έχει φραγμένες λύσεις. □

Άσκηση 1.23

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

1.

$$y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2, \tag{1.7}$$

με ειδική λύση την

$$y_1(t) = -\frac{1}{t} \tag{1.8}$$

2.

$$y' = \frac{2\cos^2 t + \sin^2 t - y^2}{2\cos t}, \tag{1.9}$$

με ειδική λύση την

$$y_1(t) = \sin t \tag{1.10}$$

Λύση. 1. Για την (1.7) παρατηρούμε ότι είναι διαφορική εξίσωση Riccati και έχοντας την ειδική λύση της (1.8) γνωρίζουμε ότι μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια εξίσωση Bernoulli αν θέσουμε:

$$y = y_1(t) + u \Longleftrightarrow y = -\frac{1}{t} + u$$

$$-\frac{1}{t}y = -\frac{1}{t}\left(-\frac{1}{t} + u\right) = \frac{1}{t^2} - \frac{u}{t}$$

$$y' = (y_1(t) + u)' = y(t)' + u' = \frac{1}{t^2} + u'$$

$$y^2 = (y_1(t) + u)^2 = \left(-\frac{1}{t} + u\right)^2 = \frac{1}{t^2} - \frac{2u}{t} + u^2$$

Εφόσον η ειδική λύση (1.8) επαληθεύει την (1.7) θα έχουμε:

$$\frac{1}{t^2}+u'=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2}-\frac{u}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{2u}{t}+u^2 \Longleftrightarrow u'=u^2-3\frac{u}{t} \Longleftrightarrow u'+\frac{3}{t}u=1u^2 \quad (1.11)$$

Άρα καταλήξαμε σε μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με $\alpha(t)=\frac{3}{t}$, $\beta(t)=1$ και $\rho=2$ (Γενικός τύπος Δ.Ε. Bernoulli: $y'+\alpha y=\beta y^{\rho}$)

Επίλυση της (1.11): Πολλαπλασιάζουμε την (1.11) με $-u^{-2}$ και έχουμε:

$$-u^{-2}u'-\frac{3}{t}uu^{-2}=-1u^2u^{-2} \Longleftrightarrow 1=\frac{3}{t}u^{-1}+u^{-2}u'$$

Θέτουμε

$$w=u^{-1}=\frac{1}{u} \Longleftrightarrow u=\frac{1}{w} \Longleftrightarrow u'=-\frac{1}{w^2}w',$$

οπότε:

$$1=\frac{3}{t}w+w^2\left(-\frac{1}{w^2}\right)w' \Longleftrightarrow 1=\frac{3}{t}w-w' \Longleftrightarrow w'+\left(-\frac{3}{t}\right)w=-1$$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική 1ου βαθμού και γνωρίζουμε τον τύπο επίλυσής της:

$$w=\exp^{-\int\left(-\frac{3}{t}\right)dt}\left[c+\int\exp^{\int\left(-\frac{3}{t}\right)dt}(-1)\,dt\right] \Longleftrightarrow$$

$$w=\exp^{3\ln t}\left[c+\int\exp^{-3\ln t}(-1)\,dt\right] \Longleftrightarrow$$

$$w=t^3\left[c-\int t^{-3}dt\right] \Longleftrightarrow w=t^3\left[c+\frac{t^{-4}}{4}\right]$$

Άρα

$$\frac{1}{u}=t^3\left[c+\frac{t^{-4}}{4}\right] \Longrightarrow u=\frac{1}{t^3\left[c+\frac{t^{-4}}{4}\right]}$$

και τελικά

$$y(t)=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3\left[c+\frac{t^{-4}}{4}\right]}$$

□

Λύση. 2. Για την (1.9) παρατηρούμε ότι είναι διαφορική εξίσωση Riccati και έχοντας την ειδική λύση της (1.10) γνωρίζουμε ότι μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια εξίσωση Bernoulli αν θέσουμε:

$$y=y_1(t)+u \Longleftrightarrow y=\sin t+u \quad (1.12)$$

$$y'=(y_1(t)+u)'=y(t)'+u'=\cos t+u'$$

$$y^2=(y_1(t)+u)^2=(\sin t+u)^2=\sin^2 t+2u\sin t+u^2$$

Εφόσον η ειδική λύση (1.10) επαληθεύει την (1.9) θα έχουμε:

$$\cos t + u' = \frac{2\cos^2 t + \sin^2 t - \sin^2 t - 2u\sin t - u^2}{2\cos t} = \frac{2\cos^2 t - 2u\sin t - u^2}{2\cos t}$$

$$u' = \frac{2\cos^2 t - 2u\sin t - u^2 - 2\cos^2 t}{2\cos t} = -\frac{2u\sin t + u^2}{2\cos t} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u' + \frac{\sin t}{\cos t}u = -\frac{1}{2\cos t}u^2 \tag{1.13}$$

Άρα καταλήξαμε σε μια διαφορική εξίσωση Bernoulli με $\alpha(t) = \frac{\sin t}{\cos t}$, $\beta(t) = -\frac{1}{2\cos t}$ και $\rho = 2$ (Γενικός τύπος Δ.Ε. Bernoulli: $y' + \alpha y = \beta y^\rho$)

Επίλυση της (1.13): Πολλαπλασιάζουμε την (1.13) με $-u^{-2}$ και έχουμε:

$$-u^{-2}u' - \frac{\sin t}{\cos t}uu^{-2} = \frac{1}{2\cos t}u^{-2}u^2 \Longrightarrow \frac{1}{2\cos t} = -u^{-2}u' - \frac{\sin t}{\cos t}u^{-1}$$

Θέτουμε

$$w = u^{-1} = \frac{1}{u} \Longleftrightarrow u = \frac{1}{w} \Longleftrightarrow u' = -\frac{1}{w^2}w',$$

οπότε

$$\frac{1}{2\cos t} = -w^2\frac{1}{w^2}w' - \frac{\sin t}{\cos t}w \Longrightarrow \frac{1}{2\cos t} = -w' - \frac{\sin t}{\cos t}w \Longrightarrow w' + \frac{\sin t}{\cos t}w = -\frac{1}{2\cos t}$$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική 1ου βαθμού και γνωρίζουμε τον τύπο επίλυσής της:

$$w = \exp^{-\int\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)dt}\left[c + \int \exp^{\int\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)dt}\left(-\frac{1}{2\cos t}\right)dt\right] \Longleftrightarrow$$

Επίλυση του $\frac{\sin t}{\cos t}dt$

$$\int\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)dt = \int \frac{(-\cos t)'}{\cos t}dt = -\int \frac{(\cos t)'}{\cos t}dt = -\ln\cos t$$

Τελικά

$$w = \exp^{\ln\cos t}\left[c + \int \exp^{-\ln\cos t}\left(-\frac{1}{2\cos t}\right)dt\right] \Longrightarrow$$

$$w = \cos t\left(c + \int \frac{\cos t}{2\cos t}dt\right) \Longrightarrow w = \cos t\left(c + \frac{1}{2}t\right)$$

Αλλά επειδή $w = u^{-1} = \frac{1}{u}$

$$u = \frac{1}{w} = \frac{1}{\cos t\left(c + \frac{1}{2}t\right)}$$

Από την (1.12) έχουμε τελικά

$$y = \sin t + u \Longrightarrow y = \sin t + \frac{1}{\cos t\left(c + \frac{1}{2}t\right)}$$

□

Άσκηση 1.24

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

(α)

$$\left(x^2-2y^2\right)dx+xydy=0 \tag{1.14}$$

Λύση. Αρχικά θα εξετάσουμε αν είναι πλήρης, δηλαδή αν $P_y\left(x,y\right)=Q_x\left(x,y\right)$

Θέτουμε $P\left(x,y\right)=\left(x^2-2y^2\right)$ και $Q\left(x,y\right)=xy$ οπότε:

$$P_y\left(x,y\right)=-4y \tag{1.15}$$

$$Q_x\left(x,y\right)=y \tag{1.16}$$

Επειδή (1.15)≠(1.16) η (1.14) δεν είναι πλήρης. Τότε θα την ανάγουμε σε πλήρη. Ελέγχουμε αν ανήκει στην πρώτη περίπτωση πολλαπλασιαστών Euler:

$$\frac{P_y\left(x,y\right)-Q_x\left(x,y\right)}{Q\left(x,y\right)}=g\left(x\right)$$

όπου $g\left(x\right)$ είναι συνάρτηση του x. Πράγματι:

$$\frac{-4y-y}{xy}=-\frac{5}{x}$$

Άρα υπάρχει $\mu\left(x\right)=\exp\left(\int-\frac{5}{x}dx\right)\Longleftrightarrow\mu\left(x\right)=\exp\left(-5\ln x\right)=\frac{1}{x^5}$

Πολλαπλασιάζουμε την (1.14) με την $\mu\left(x\right)$:

$$-\frac{5}{x}\left(x^2-2y^2\right)dx-5ydy=0\Longleftrightarrow\left(-5x+\frac{10y^2}{x}\right)dx-5ydy=0 \tag{1.17}$$

Τώρα θέτουμε $P_1\left(x,y\right)=-5x+\frac{10y^2}{x}$ και $Q_1\left(x,y\right)=-5y$. Τότε:

$$\left(P_1\right)_y=0 \tag{1.18}$$

$$\left(Q_1\right)_x=0 \tag{1.19}$$

Επειδή (1.18)=(1.19) η (1.17) είναι πλήρης. Τότε η λύση είναι $f\left(x,y\right)=0$. Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$f_x\left(x,y\right)=P_1\left(x,y\right)\Longrightarrow f_x\left(x,y\right)=-5x+\frac{10y^2}{x} \tag{1.20}$$

$$f_y\left(x,y\right)=Q_1\left(x,y\right)\Longrightarrow f_y\left(x,y\right)=-5y \tag{1.21}$$

Ολοκληρώνουμε την (1.20) ως προς x:

$$f\left(x,y\right)=-5x^2+10y^2\ln x+k\left(y\right) \tag{1.22}$$

Παραγωγίζουμε την (1.22) ως προς y και την εξισώνουμε με την (1.21):

$$20y + k'(y) = -5y \Longrightarrow k'(y) = -25y \Longrightarrow k(y) = -\frac{25}{2}y^2 + c$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην (1.22) έχουμε:

$$f(x,y) = -5x^2 + 10y^2 \ln x - \frac{25}{2}y^2 + c$$

Άρα η λύση της αρχικής είναι $-5x^2 + 10y^2 \ln x - \frac{25}{2}y^2 + c = 0$ σε πεπλεγμένη μορφή. □

(β)

$$x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0 \tag{1.23}$$

Λύση. Έχουμε:

$$-y(3x + 2y)\,dx + x^2 dy = 0$$

Αρχικά θα εξετάσουμε αν είναι πλήρης, δηλαδή αν

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

Θέτουμε $P(x,y) = -y(3x+2y)$ και $Q(x,y) = x^2$ οπότε:

$$P_y(x,y) = -3x - 4y \tag{1.24}$$

$$Q_x(x,y) = 2x \tag{1.25}$$

Επειδή (1.24)≠(1.25) η (1.23) δεν είναι πλήρης. Με ελέγχους παρατηρούμε ότι η (1.23) δεν μπορεί να αναχθεί σε πλήρη. Παράλληλα όμως βλέπουμε ότι ικανοποιεί την εξίσωση Bernoulli.

$$y' - ay = by^p$$

με $a = \frac{3}{x}$, $b = \frac{2}{x^2}$ και $p = 2$. Οπότε:

$$y' = \frac{3}{x}y + \frac{2}{x^2}y^2$$

Πολλαπλασιάζουμε με $-\frac{1}{y^2}$ και έχουμε:

$$-\frac{1}{y^2}y' = -\frac{1}{y^2}\frac{3}{x}y + -\frac{1}{y^2}\frac{2}{x^2}y^2$$

Θέτουμε $u = \frac{1}{y} \Longrightarrow u' = -\frac{1}{y^2}y'$

$$u' = -\frac{3}{x}u - \frac{2}{x^2} \Longrightarrow u' + \frac{3}{x}u = -\frac{2}{x^2}$$

Η οποία είναι γραμμική οπότε:

$$u = \exp\left(-\int \frac{3}{x}dx\right)\left[c + \int \exp\left(\int \frac{3}{x}dx\right)\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx\right] \Longrightarrow$$

$$u = \exp\left(-3\ln x\right)\left[c + \int \exp\left(3\ln x\right)\left(-\frac{2}{x^2}\right)dx\right] \Longrightarrow$$

$$u = x^{-3}\left(c - 2\int xdx\right) \Longrightarrow u = \frac{1}{x^3}\left(c - x^2\right)$$

Και επειδή $u = \frac{1}{y}$ έχουμε:

$$y = \frac{1}{\frac{1}{x^3}\left(c - x^2\right)}$$

□

(δ)

$$x\sin\frac{y}{x}y' = y\sin\frac{y}{x} + x$$

Λύση. Θέτουμε $u = \frac{y}{x} \Longleftrightarrow y = ux$. Τότε

$$y' = u'x + u \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \tag{1.26}$$

Από την αρχική εξίσωση έχουμε

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y\sin\frac{y}{x} + x}{x\sin\frac{y}{x}} = \frac{y}{x} + \frac{1}{\sin\frac{y}{x}}$$

Λόγω του μετασχηματισμού θα έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{1}{\sin u} \tag{1.27}$$

Όμως εξισώνοντας τις (1.26) και (1.27) έχουμε

$$\frac{du}{dx}x + u = u + \frac{1}{\sin u} \Longrightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{1}{\sin u} \Longrightarrow \sin u du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \sin u du = \int \frac{dx}{x} + c \Longrightarrow -\cos u = \ln x + c \Longrightarrow u = \arccos\left(-\ln x + c\right)$$

Και επειδή $u = \frac{y}{x}$ τελικά θα έχουμε

$$\frac{y}{x} = \arccos\left(-\ln x + c\right) \Longrightarrow y = x\arccos\left(-\ln x + c\right)$$

□

Άσκηση 1.25

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(α)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x-y-6}$$

Λύση. Έχουμε:

$$(x+y+4)\,dx + (-x+y+6)\,dy = 0 \tag{1.28}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε αν είναι πλήρης, δηλαδή αν

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

Θέτω $P(x,y) = (x+y+4)$ και $Q(x,y) = (-x+y+6)$ οπότε:

$$P_y(x,y) = 1 \tag{1.29}$$

$$Q_x(x,y) = -1 \tag{1.30}$$

Επειδή (1.29)$\neq$(1.30) η (1.28) δεν είναι πλήρης. Τότε θα εφαρμόσουμε μια διαφορετική μέθοδο: Από τη λύση του συστήματος $x+y+4=0$ και $-x+y+6=0$ προκύπτει το σημείο τομής

$$(x_1, y_1) = (1, -5)\,.$$

Θέτοντας $x = X+1$ και $y = Y-5$ έχουμε:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

που είναι ομογενής εξίσωση βαθμού 1. Ο μετασχηματισμός $u = \frac{Y}{X} \Longleftrightarrow Y = uX$ οδηγεί στην εξίσωση:

$$Y' = \frac{X+uX}{X-uX} \Longrightarrow u + Xu' = \frac{1+u}{1-u} \Longrightarrow u + X\frac{du}{dX} = \frac{1+u}{1-u}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{1}{\frac{1+u}{1-u} - u}du \Longleftrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{u-1}{1-u^2}du$$

που είναι χωριζομένων μεταβλητών. Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\ln X = \ln u + \frac{1}{u} + c \Longrightarrow \ln X = \ln\frac{Y}{X} + \frac{X}{Y} + c$$

Επειδή $X = x-1$ και $Y = y+5$ έχουμε:

$$\ln(x-1) = \ln\frac{y+5}{x-1} + \frac{x-1}{y+5} + c$$

□

(ε)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$$

Λύση. Έχουμε:

$$(x-y+1)\,dx+(-x-y+3)\,dy=0 \tag{1.31}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε αν είναι πλήρης, δηλαδή αν

$$P_y\,(x,y)=Q_x\,(x,y)$$

Θέτω $P\,(x,y)=(x-y+1)$ και $Q\,(x,y)=(-x-y+3)$ οπότε:

$$P_y\,(x,y)=-1 \tag{1.32}$$

$$Q_x\,(x,y)=-1 \tag{1.33}$$

Επειδή (1.32)=(1.33) η (1.31) είναι πλήρης. Τότε η λύση είναι $f\,(x,y)=0$. Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$f_x\,(x,y)=P\,(x,y)\Longrightarrow f_x\,(x,y)=(x-y+1) \tag{1.34}$$

$$f_y\,(x,y)=Q\,(x,y)\Longrightarrow f_y\,(x,y)=(-x-y+3) \tag{1.35}$$

Ολοκληρώνουμε την (1.34) ως προς x:

$$f\,(x,y)=\frac{x^2}{2}-xy+x+g\,(y) \tag{1.36}$$

Παραγωγίζουμε την (1.36) ως προς y και την εξισώνουμε με τη (1.35):

$$-x+g'\,(y)=-x-y+3\Longrightarrow g'\,(y)=-y+3$$

Οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε

$$g\,(y)=-\frac{y^2}{2}+3y+c$$

Άρα η (1.36) θα μετασχηματιστεί:

$$f\,(x,y)=\frac{x^2}{2}-xy+x-\frac{y^2}{2}+3y+c$$

Τελικά η λύση είναι

$$\frac{x^2}{2}-xy+x-\frac{y^2}{2}+3y+c=0$$

Ισοδύναμα:

$$x^2-2xy+2x-y^2+6y=c$$

□

(ϑ)

$$(x+y-2)\,dx+(x-y+4)\,dy=0 \tag{1.37}$$

Λύση. Αρχικά θα εξετάσουμε αν είναι πλήρης, δηλαδή αν

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

Θέτουμε $P(x,y) = (x+y-2)$ και $Q(x,y) = (x-y+4)$ οπότε:

$$P_y(x,y) = 1 \tag{1.38}$$

$$Q_x(x,y) = 1 \tag{1.39}$$

Επειδή (1.38)=(1.39), η (1.37) είναι πλήρης. Τότε η λύση είναι $f(x,y) = 0$. Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$f_x(x,y) = P(x,y) \Longrightarrow f_x(x,y) = (x+y-2) \tag{1.40}$$

$$f_y(x,y) = Q(x,y) \Longrightarrow f_y(x,y) = (x-y+4) \tag{1.41}$$

Ολοκληρώνουμε την (1.40) ως προς x:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - 2x + g(y) \tag{1.42}$$

Παραγωγίζουμε την (1.42) ως προς y και την εξισώνουμε με τη (1.41):

$$x + g'(y) = x - y + 4 \Longrightarrow g'(y) = -y + 4$$

Οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$g(y) = -\frac{y^2}{2} + 4y + c$$

Άρα η (1.42) θα μετασχηματιστεί:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - 2x - \frac{y^2}{2} + 4y + c$$

Τελικά η λύση είναι:

$$\frac{x^2}{2} + xy - 2x - \frac{y^2}{2} + 4y = c$$

Ισοδύναμα:

$$x^2 + 2xy - 4x - y^2 + 8y = c$$

□

Άσκηση 1.38

Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$y\exp(xy)\,dx + (3 + x\exp(xy))\,dy = 0 \tag{1.43}$$

είναι ακριβής και να υπολογιστεί η λύση της που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$y\,(0) = 0 \tag{1.44}$$

Λύση. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$M\,(x, y)\,dx + N\,(x, y)\,dy = 0$$

όπου $M\,(x, y) = y \exp{(xy)}$και $N\,(x, y) = 3 + x \exp{(xy)}$

Για να είναι ακριβής η (1.43) πρέπει

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Longrightarrow \exp{(xy)} + xy \exp{(xy)} = \exp{(xy)} + xy \exp{(xy)}$$

κάτι που ισχύει. Άρα υπάρχει συνάρτηση $F\,(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \exp{(xy)} \tag{1.45}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3 + x \exp{(xy)} \tag{1.46}$$

Ολοκληρώνοντας την (1.45) ως προς t έχουμε:

$$F = \int y \exp{(xy)}\,dt + h\,(y) = ty \exp{(xy)} + h\,(y) \tag{1.47}$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial y} = t \exp{(xy)} + tyx \exp{(xy)} + h'\,(y)$$

η οποία σε συνδυασμό με την (1.46) δίνει την

$$t \exp{(xy)} + tyx \exp{(xy)} + h'\,(y) = 3 + x \exp{(xy)} \Longrightarrow$$

$$h'\,(y) = (x - t - txy) \exp{(xy)} + 3 = x \exp{(xy)} - t \exp{(xy)} - txy \exp{(xy)} + 3$$

$$h\,(y) = \int (x \exp{(xy)} - t \exp{(xy)} - txy \exp{(xy)} + 3)\,dy$$

Για το $I = \int txy \exp{(xy)}\,dy$ έχουμε:

$$I = \int ty\,(\exp{(xy)})' = ty \exp{(xy)} - \int t \exp{(xy)} = ty \exp{(xy)} - \frac{t \exp{(xy)}}{x}$$

Άρα

$$h\,(y) = \exp{(xy)} - \frac{t}{x} \exp{(xy)} - ty \exp{(xy)} + \frac{t \exp{(xy)}}{x} + 3y + c \Longrightarrow$$

$$h(y) = (1 - ty)\exp(xy) + 3y + c$$

Από την (1.47) θα έχουμε:

$$F = ty\exp(xy) + (1 - ty)\exp(xy) + 3y + c \Longrightarrow$$

$$F = \exp(xy) + 3y + c$$

Αλλά από την (1.44) θα ισχύει:

$$0 = 1 + c \Longrightarrow c = -1$$

Τελικά θα έχουμε:

$$h(y) = \exp(xy) + 3y - 1$$

□

Άσκηση 1.41

Να υπολογιστεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων αφού βρεθεί ο κατάλληλος κάθε φορά ολοκληρωτικός παράγοντας.

(ε)

$$\left(5x^2 - y\right)dx + xdy = 0$$

Λύση. Ελέγχουμε αν ανήκει στην πρώτη περίπτωση πολλαπλασιαστών Euler:

$$\frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)} = g(x)$$

όπου $g(x)$ είναι συνάρτηση του x. Πράγματι:

$$\frac{-1-1}{x} = -\frac{2}{x}$$

Άρα υπάρχει $\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{2}{x}dx\right) \Longleftrightarrow \mu(x) = \exp(-2\ln x) = \frac{1}{x^2}$. Επομένως:

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την αρχική με την $\mu(x)$:

$$\left(5 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{x}dy = 0 \tag{1.48}$$

Θέτουμε $P(x,y) = \left(5 - \frac{y}{x^2}\right)$ και $Q(x,y) = \left(\frac{1}{x}\right)$ οπότε:

$$P_y(x,y) = -\frac{1}{x^2} \tag{1.49}$$

$$Q_x(x,y) = -\frac{1}{x^2} \tag{1.50}$$

Επειδή (1.49)=(1.50), η (1.48) είναι πλήρης. Τότε η λύση είναι $f(x,y)=0$. Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$f_x(x,y)=P(x,y)\Longrightarrow f_x(x,y)=\left(5-\frac{y}{x^2}\right) \tag{1.51}$$

$$f_y(x,y)=Q(x,y)\Longrightarrow f_y(x,y)=\left(\frac{1}{x}\right) \tag{1.52}$$

Ολοκληρώνουμε την (1.51) ως προς x:

$$f(x,y)=5x+\frac{y}{x}+g(y) \tag{1.53}$$

Παραγωγίζουμε την (1.53) ως προς y και την εξισώνουμε με την (1.52) :

$$\frac{1}{x}+g'(y)=\frac{1}{x}\Longrightarrow g'(y)=0$$

Οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε

$$g(y)=c$$

Άρα η λύση της αρχικής είναι

$$5x+\frac{y}{x}+c=0$$

□

(η)

$$2ydx+(x-\sin\sqrt{y})\,dy=0$$

Λύση. Ελέγχουμε αν ανήκει στην πρώτη περίπτωση πολλαπλασιαστών Euler:

$$\frac{P_y(x,y)-Q_x(x,y)}{Q(x,y)}=g(x)$$

όπου $g(x)$ είναι συνάρτηση του x. Όμως :

$$\frac{2-1}{x-\sin\sqrt{y}}\neq g(x)$$

Ελέγχουμε αν ανήκει στην δεύτερη περίπτωση πολλαπλασιαστών Euler:

$$\frac{Q_x(x,y)-P_y(x,y)}{P(x,y)}=g(y)$$

όπου $g(y)$ είναι συνάρτηση του y. Πράγματι :

$$\frac{1-2}{2y}=-\frac{1}{2y}$$

Άρα υπάρχει $\mu(y)=\exp\left(\int-\frac{1}{2y}dy\right)\Longleftrightarrow\mu(y)=\exp\left(-\frac{1}{2}\ln y\right)=\frac{1}{\sqrt{y}}$. Επομένως:

$$\mu(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

Πολλαπλασιάζουμε την αρχική με την $\mu(y)$:

$$\frac{2y}{\sqrt{y}}dx + \frac{x - \sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}dy = 0 \tag{1.54}$$

Θέτουμε: $P(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{y}}$ και $Q(x,y) = \frac{x-\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ οπότε:

$$P_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \tag{1.55}$$

$$Q_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \tag{1.56}$$

Επειδή (1.55)=(1.56), η (1.54) είναι πλήρης. Τότε η λύση είναι $f(x,y) = 0$. Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$f_x(x,y) = P(x,y) \Longrightarrow f_x(x,y) = 2\sqrt{y} \tag{1.57}$$

$$f_y(x,y) = Q(x,y) \Longrightarrow f_y(x,y) = \frac{x - \sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \tag{1.58}$$

Ολοκληρώνουμε την (1.57) ως προς x και έχουμε

$$P(x,y) = 2x\sqrt{y} + g(y) \tag{1.59}$$

Παραγωγίζουμε την (1.59) ως προς y και την εξισώνουμε με την (1.58):

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + g'(y) = \frac{x - \sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \Longrightarrow g'(y) = -\frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

Οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$g(y) = 2\cos\sqrt{y}$$

Άρα η λύση της αρχικής είναι :

$$2x\sqrt{y} + 2\cos\sqrt{y} = c$$

Ισοδύναμα:

$$x\sqrt{y} + \cos\sqrt{y} = c$$

□

Άσκηση 1.44

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f(t)$ που είναι τέτοιες ώστε η διαφορική εξίσωση

$$f(t)\,x' + t^2 + x = 0,\; x = x(t)$$

να δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = t$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

Λύση. Έχουμε:

$$f(t)\,dx + \left(t^2 + x\right)dt = 0 \tag{1.60}$$

Προφανώς η (1.60) δεν είναι πλήρης. Γι' αυτό πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = t$ και έχουμε:

$$tf(t)\,dx + t\left(t^2 + x\right)dt = 0 \tag{1.61}$$

Θέτουμε $P(x,t) = tf(t)$ και $Q(x,t) = t^3 + tx$ οπότε:

$$P_t(x,t) = f(t) + tf'(t)$$

$$Q_x(x,t) = t$$

Τότε επειδή η εξίσωση (1.61) είναι πλήρης θα πρέπει να ισχύει:

$$f(t) + tf'(t) = t$$

Για $t \neq 0$ έχουμε:

$$f'(t) + \frac{f(t)}{t} = 1$$

η οποία είναι γραμμική 1ου βαθμού, επομένως η λύση της είναι:

$$f(t) = \exp\left(-\int \frac{1}{t}dt\right)\left[c + \int \exp\left(\int \frac{1}{t}1dt\right)\right] \Longrightarrow$$

$$f(t) = \exp(-\ln t)\left[c + \int \exp(\ln t)\right] \Longrightarrow$$

$$f(t) = \frac{1}{t}\left(c + \frac{t^2}{2}\right) \Longrightarrow f(t) = c\frac{1}{t} + \frac{t}{2}$$

Για να λυθεί τώρα η αρχική εξίσωση πρέπει να αντικαταστήσουμε στην (1.61) τον τύπο της $f(t)$ που βρήκαμε:

$$t\left(c\frac{1}{t} + \frac{t}{2}\right)dx + t\left(t^2 + x\right)dt = 0 \tag{1.62}$$

Θέτουμε $P(x,t) = c + \frac{t^2}{2}$ και $Q(x,t) = t^3 + tx$ οπότε:

$$P_t(x,t) = t \tag{1.63}$$

$$Q_x(x,t) = t \tag{1.64}$$

Επειδή (1.63)=(1.64), η (1.62) είναι πλήρης. Τότε η λύση είναι $f(x,y) = 0$. Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα:

$$f_x(x,t) = P(x,t) \Longrightarrow f_t(x,t) = c + \frac{t^2}{2} \tag{1.65}$$

$$f_t\left(x,t\right)=Q\left(x,t\right)\Longrightarrow f_t\left(x,t\right)=t^3+tx \tag{1.66}$$

Ολοκληρώνουμε την (1.65) ως προς x και έχουμε:

$$P\left(x,y\right)=xc+x\frac{t^2}{2}+g\left(t\right) \tag{1.67}$$

Παραγωγίζουμε την (1.67) ως προς t και την εξισώνουμε με την (1.66)

$$xt+g'\left(t\right)=t^3+tx\Longrightarrow g'\left(t\right)=t^3$$

Οπότε ολοκληρώνοντας βρίσκουμε ότι:

$$g\left(t\right)=\frac{t^4}{4}+c$$

Άρα η λύση της αρχικής είναι:

$$xc+x\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+c=0$$

Ισοδύναμα:

$$4xc+2xt^2+t^4=c$$

□

2 Τα βασικά θεωρήματα

Άσκηση 2.1

Να μελετηθεί η επιλυσιμότητα του Π.Α.Τ.

$$x' = f(x)\ ,\ x(0) = 0$$

στην κλάση των κατά τμήματα C^1 συναρτήσεων, όπου

$$(\alpha) \qquad f(x) = \begin{cases} -1,\ x \geq 0 \\ 1,\ x < 0 \end{cases}$$

Λύση. Αν $x \geq 0$ το Π.Α.Τ. είναι

$$\begin{cases} x'(t) = -1 \\ x(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow x(t) = -t + c_1 \Longrightarrow x_1(t) = -t \geq 0$$

με $x(t) \geq 0$ άρα $-t \geq 0 \Longrightarrow t < 0$. Οπότε $x_1(t) = -t$ με $t < 0$.

Αν $x < 0$ το Π.Α.Τ. είναι

$$x'(t) = 1 \Longrightarrow x(t) = t + c_2 \Longrightarrow x_2(t) = t < 0$$

με $x(t) < 0$ άρα $t < 0$. Οπότε $x_2(t) = t$ με $t < 0$. Η λύση είναι

$$f(x) = \begin{cases} x_1(t)\ ,\ t < 0 \\ x_2(t)\ ,\ t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -t,\ t < 0 \\ t,\ t \geq 0 \end{cases}$$

□

Άσκηση 2.11

Θεωρώντας το Π.Α.Τ.

$$x' = 1 + x^{\frac{2}{3}},\ x(0) = 0$$

να δειχθεί ότι η συνθήκη Lipschitz δεν είναι αναγκαία για το μονοσύμαντο των λύσεων.

Λύση. Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης

$$x' = 1 + x^{\frac{2}{3}} \iff \frac{dx}{dt} = 1 + x^{\frac{2}{3}} \iff \frac{dx}{1 + x^{\frac{2}{3}}} = dt \iff \int \frac{dx}{1 + x^{\frac{2}{3}}} = \int dt \tag{2.1}$$

Υπολογίζουμε το $\int \frac{dx}{1+x^{\frac{2}{3}}}$. Θέτουμε

$$u = x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow x^{\frac{2}{3}} = u^2 \tag{2.2}$$

$$du = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx \iff dx = 3x^{\frac{2}{3}} du \Longrightarrow dx = 3u^2 du$$

Τότε

$$\int \frac{3u^2 du}{1 + u^2} = 3 \int \frac{u^2 du}{1 + u^2}$$

Θέτουμε

$$u = \tan t \Longrightarrow du = \left(1 + \tan^2 t\right) dt \tag{2.3}$$

Άρα

$$3 \int \frac{\tan^2 t}{1 + \tan^2 t} \left(1 + \tan^2 t\right) dt = 3 \int \tan^2 t dt = 3 \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt$$

$$= 3 \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} dt = 3 \int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt = 3 \tan t - 3t + c$$

Από την (2.2) και την (2.3) έχουμε

$$\int \frac{dx}{1 + x^{\frac{2}{3}}} = 3u - 3 \arctan u + c$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} - 3 \arctan x^{\frac{1}{3}} + c$$

Από την (2.1) έχουμε

$$3x^{\frac{1}{3}} - 3 \arctan x^{\frac{1}{3}} + c = t \Longrightarrow x^{\frac{1}{3}} - \arctan x^{\frac{1}{3}} = \frac{t}{3} + c$$

Από το Π.Α.Τ. έχουμε ότι $x(0) = 0$ άρα

$$0 - \arctan 0 = \frac{t}{3} + c \Longrightarrow c = 0$$

Επομένως η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$x^{\frac{1}{3}} - \arctan x^{\frac{1}{3}} = \frac{t}{3}$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση. Ωστόσο η συνάρτηση $f(t, x) =$

$1 + x^{2/3}\,(t)$ (οριζεται σε περιοχή D που περιέχει το $(0,0)$) δεν είναι Lipschitz, αφού για

$$|f(t,0) - f(t,x)| = \left|1 - \left(1 + x^{2/3}\right)\right| = \left|-x^{2/3}\right| = \left|x^{2/3}\right|$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|^{2/3}}{|x|} = +\infty$ με αποτέλεσμα

$$|f(t,0) - f(t,x)| \geq L(y)$$

Παρόλο που η $f(t,x)$ δεν είναι Lipschitz το Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση. Άρα η συνθήκη Lipschitz δεν είναι αναγκαία για το μονοσήμαντο των λύσεων. □

Άσκηση 2.12

Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} x' = x^2 + \frac{7}{8}\exp t^4 \\ x(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(α) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη τοπικής λύσης

(β) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη ολικής λύσης

Λύση. (α) Γνωρίζουμε ότι η x είναι συνεχής αφού είναι παραγωγίσιμη. Επιπλέον η $f(t,x) = x^2 + \frac{7}{8}\exp t^4$ είναι συνεχής ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων x^2 και $\frac{7}{8}\exp t^4$ και η $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 2x$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της x και κατ' επέκταση στο πεδίο ορισμού του Π.Α.Τ. I. Επομένως, οι $f(t,x)$ και $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ είναι συνεχείς και στο ορθογώνιο

$$S = \left\{(t,x) \mid 0 \leq t \leq 0 + a,\ \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq b\right\} \subseteq \mathbb{R} \times I$$

Επιπλέον ορίζονται τα

$$M = \max_S |f(t,x)|,\ a = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

Άρα συμφωνα με το θεώρημα Picard-Lindelof, το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση στο $[t_0,\ t_0 + a) = [0,\ a)$.

(β) Επειδή οι $f(t,x)$ και $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R} \times I$ και η x είναι γνησίως αύξουσα καθώς $x' > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ το S θα είναι της μορφής

$$S = \left\{(t,x) : |t| \leq a,\ \left|y - \frac{1}{2}\right| \leq b\right\}$$

όπου $a, b >> 0$. Άρα το Π.Α.Τ. έχει μοναδική ολική λύση στο $\mathbb{R}$. □

Άσκηση 2.14

Έστω το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{\left(y^2-4\right)\left(\sin^2 y^3 + \cos y - 2\right)}{2} \quad , \quad y\left(0\right) = \frac{1}{2}$$

Αν $y = \varphi\left(t\right)$ είναι η λύση του Π.Α.Τ., εξηγήστε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) γιατί ισχύει ότι $\varphi\left(t\right) < 2$, για κάθε t.

Λύση. Από τις δοσμένες υποθέσεις έχουμε $\varphi\left(0\right) = \frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι η αρχική εξίσωση για $y' = 0$ και $y = 2$ μηδενίζεται, δηλαδή το $y\left(t\right) = 2$ ειναι λύση της, εφόσον $y^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow y = \pm 2$, άρα ισχύει $y\left(0\right) = 2$. Επομένως $\frac{1}{2} < 2 \Longrightarrow \varphi\left(0\right) < y\left(0\right) \Longrightarrow \varphi\left(t\right) < y\left(t\right)$ και λόγω του μονοσημάντου $\varphi\left(t\right) < 2$. □

Άσκηση 2.15

Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{\left(1+t\right)^2}{\left(1+y\right)^2}$$

Αν $y = \varphi\left(t\right)$είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\varphi\left(0\right) = -0,2$, δείξτε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) ότι $\varphi\left(t\right) < t$, για κάθε t.

Λύση. Έχουμε το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y' = \frac{(1+t)^2}{(1+y)^2} \\ y\left(0\right) = -0,2 \end{cases}$$

το οποίο μας δίνει τη μοναδική λύση $\varphi\left(t\right)$. Επιπλέον το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y' = \frac{(1+t)^2}{(1+y)^2} \\ y\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

ισχύει για τη λύση $\varphi_1\left(t\right) = t$. Όμως

$$\varphi\left(0\right) = -0,2 < 0 = \varphi_1\left(t\right)$$

και λόγω του μονοσημάντου έπεται ότι

$$\varphi\left(t\right) < \varphi_1\left(t\right) = t$$

Τελικά έχουμε

$$\varphi\left(t\right) < t \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

3 Ποιοτική Θεωρία

Άσκηση 3.1

Για καθεμιά από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας, υπολογίστε τη γραμμικοποιημένη εξίσωση γύρω από τα σημεία ισορροπίας, χαρακτηρίστε τα σημεία ισορροπίας ως υπερβολικά ή μη και μελετήστε την ευστάθειά τους. Τέλος κατασκευάστε τα διαγράμματα φάσης.

(γ)

$$y' = 1 + y^2$$

Λύση. Για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας πρέπει:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Longrightarrow 1 + y^2 = 0$$

Όμως $1 + y^2 > 0$ επομένως οι λύσεις είναι αύξουσες ενώ δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας.

□

(δ)

$$y' = 1 - y^2$$

Λύση. Για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας πρέπει:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Longrightarrow 1 - y^2 = 0 \Longrightarrow y = \pm 1$$

Επομένως τα $y = 1$ και $y = -1$ είναι τα σημεία ισορροπίας.

y			
$1-y$	$+$	$+$	$-$
$1+y$	$-$	$+$	$+$
$1-y^2$	$-$	$+$	$-$

Άρα οι λύσεις στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ είναι φθίνουσες ενώ στο διάστημα $(-1, 1)$ οι λύσεις είναι αύξουσες. Επίσης ισχύει:

$$f'(1) = -2 < 0$$

$$f'(-1) = 2 > 0$$

Άρα παρατηρούμε ότι το 1 είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας ενώ το -1 είναι ασταθές σημείο ισορροπίας ενώ και τα δύο σημεία είναι υπερβολικά. Η γραμμικοποίηση της εξίσωσης στο σημείο 1 είναι:

$$\frac{dy}{dt} = f'(1)\, y \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -2y$$

Ενώ η γραμμικοποίηση στο σημείο -1 είναι:

$$\frac{dy}{dt} = f'(-1)\, y \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 2y$$

Το διάγραμμα φάσης είναι:

$\square$

(ε)

$$y' = 2y^2 - y^3$$

Λύση. Για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας πρέπει:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Longrightarrow y^2(2-y) = 0 \Longrightarrow y = 0,\ y = 2$$

Επομένως τα $y = 0$ και $y = 2$ είναι τα σημεία ισορροπίας.

y			
y^2	$+$	$+$	$+$
$2-y$	$+$	$+$	$-$
$f(y)$	$+$	$+$	$-$

Και επειδή

$$f'(0) = 0$$

$$f'(2) = -4 < 0$$

Το σημείο 2 είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας, ενώ το 0 είναι ευσταθές προς τα κάτω ή κάτω ημιευσταθές. Όμως μόνο το σημείο 2 είναι υπερβολικό. Η γραμμικοποίηση της εξίσωσης στο σημείο 0 είναι:

$$\frac{dy}{dt} = f'(0)\,y \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = 0$$

Ενώ η γραμμικοποίηση στο σημείο 2 είναι:

$$\frac{dy}{dt} = f'(2)\,y \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -4y$$

Το διάγραμμα φάσης είναι:

□

Άσκηση 3.2

Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = y^2 - 6y - 16$$

Λύση. Για να βρούμε τα σημεία ισορροπίας πρέπει

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Longrightarrow y^2 - 6y - 16 = 0 \Longrightarrow y = 8,\ y = -2$$

Επομένως τα $y = 8$ και $y = -2$ είναι τα σημεία ισορροπίας.

y			
$y-8$	$-$	$-$	$+$
$y+2$	$-$	$+$	$+$
$f(y)$	$+$	$-$	$+$

Επίσης ισχύει ότι:

$$f'(-2) = -10 < 0$$

$$f'(8) = 10 > 0$$

Άρα το σημείο -2 είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας ενώ το 8 είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Το διάγραμμα φάσης είναι:

$\square$

Άσκηση 3.5

Θεωρούμε ότι ένας πληθυσμός ψαριών εξελίσσεται σύμφωνα με τη διαφορική εξίσωση

$$y' = ky - cy^2 - h \ , \ y(0) > 0$$

Θεωρούμε τισ k και c ως φιξαρισμένες θετικές σταθερές, ενώ την $h \in \mathbb{R}^+$θετική παράμετρο και μελετούμε την επίδραση του ρυθμού αλίευσης h στον πληθυσμό $y(t)$.

(α) Εάν $0 < h \leq \frac{k^2}{4c}$ τότε υπάρχει κρίσιμη τιμή y_0 τέτοια ώστε αν $y(0) < y_0$ τότε η αντίστοιχη λύση $y(t)$ μηδενίζεται για κάποιον πεπερασμένο χρόνο. Στην περίπτωση αυτή κάνουμε λόγο για 'εξαφάνιση'. Αντίθετα αν $y(0) > y_0$ τότε η $y(t)$ τείνει σε σημείο ισορροπίας καθώς το $t \longrightarrow +\infty$.

(β) Εάν $h > \frac{k^2}{4c}$ τότε έχουμε εξαφάνιση ανεξάρτητα από την αρχική τιμή $y(0)$.

Λύση. (α) Εάν $0 < h \leq \frac{k^2}{4c}$ τότε το 2ο μέλος της διαφορικής εξίσωσης έχει διακρίνουσα μη αρνητική, αφού

$$\Delta = k^2 - 4(-c)(-h) = k^2 - 4ch \geq 0$$

Τότε η εξίσωση $-cy^2 + ky - h = 0$ έχει μία ή δύο λύσεις (ένα ή δυο σημεία ισορροπίας αντιστοίχως)

Στην 1η περίπτωση έχουμε ότι $f(y) > 0$ με $y \in (r_1, r_2)$ ενώ $f(y) < 0$ με $y < r_1$ ή $y > r_2$. Τότε το r_1 είναι ασταθές και το r_2 ασυμπτωτικά ευσταθές. Άρα αν $y(0) < r_1$ τοτε $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ δηλαδή ο πληθυσμός μηδενίζεται ενώ αν $y(0) > r_1$ τότε $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = r_2$ δηλαδή η $y(t)$ τείνει σε σημειο ισορροπίας.

Στην 2η περίπτωση το r είναι ασταθές σημείο ισορροπίας με αποτέλεσμα αν $0 < y(0) < r$ τότε $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ εφόσον η $f(y)$ είναι φθίνουσα, δηλαδλη αν $y(0) < r = y_0$ τότε η λύση $y(t)$ μηδενίζεται. Ενώ εάν $y(0) > r$ τότε η $y(t)$ τείνει σε σημείο ισορροπίας (στο r αφού και η $f(y)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα αν $y(0) > r = y_0$ τοτε η $y(t)$ τείνει σε σημείο ισορροπίας.

(β) Εάν $h > \frac{k^2}{4c}$ τότε $\Delta < 0$ άρα έχουμε $f(y) = -cy^2 + ky - h < 0$ για κάθε $c, k, h > 0$. Άρα δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας. Οπότε $y' < 0$, δηλαδή ο πληθυσμός μειώνεται ανεξάρτητα από την αρχική τιμή $y(0)$.

$\square$

Άσκηση 3.7

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηριστούν ως προς την ευστάθεια και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = y\left(y^2 - \mu\right),\ \mu \in \mathbb{R}$$

Ειδικότερα για $\mu = 1$ και $y(0) = \frac{1}{2}$ να βρεθούν τα $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$

Λύση. Στα σημεία διακλάδωσης θα ισχύουν

$$\left.\begin{array}{c} f_{\mu_0}(y) = 0 \\ f'_{\mu_0}(y) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} y_0\left(y_0^2 - \mu\right) = 0 \\ 3y_0^2 - \mu = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} y_0^3 - y_0\mu = 0 \\ 3y_0^2 = \mu \end{array}\right\} \Longrightarrow y_0^3 - 3y_0^3 = 0 \Longrightarrow y_0 = 0$$

Τότε $\mu_0 = 0$ είναι η τιμή διακλάδωσης. Τα σημεία ισορροπίας είναι:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Longrightarrow y\left(y^2 - \mu\right) = 0 \Longrightarrow y = 0 \quad \text{ή} \quad y = \pm\sqrt{\mu}$$

Για $\mu < 0$ έχουμε ένα σημείο ισορροπίας το $y = 0$, για το οποίο ισχύει $f'(0) = -\mu > 0$ επομένως είναι ασταθές. Όμως για $\mu > 0$ έχουμε τρία σημεία ισορροπίας $y = 0$, $y = \pm\sqrt{\mu}$

$$f'(0) = -\mu < 0$$

$$f'(\pm\sqrt{\mu}) = 2\mu > 0$$

Επομένως το $y = 0$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας, ενώ το $y = \pm\sqrt{\mu}$ ασταθές. Για $\mu = 1$ και $y(0) = \frac{1}{2}$ από το διάγραμμα φάσης παρατηρούμε ότι η $y(t)$ είναι φθίνουσα επομένως $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = 0$ ενώ $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 1$.

□

4 Γραμμικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Άσκηση 4.3

Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:
(β)

$$y'' + 4y' + 4y = x - 2\exp(2x) \tag{4.1}$$

Λύση. Η γενική λύση της (4.1) είναι

$$y = y_0 + y_{\mu 1} + y_{\mu 2}$$

Εύρεση

$$y_0 : \; y'' + 4y' + 4y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

Άρα $y_1(x) = \exp(\lambda_1 x) = \exp(-2x)$ και $y_2(x) = x\exp(\lambda_2 x) = x\exp(-2x)$. Οπότε

$$y_0 = c_1 \exp(-2x) + c_2 x \exp(-2x)$$

Εύρεση

$$y_{\mu 1} : \; f_1(x) = x \Longrightarrow y_{\mu 1} = (A_1 x + A_0)\, x^k$$

$$\left.\begin{array}{c} y_{\mu 1} = A_1 x + A_0 \\ y'_{\mu 1} = A_1 \\ y''_{\mu 1} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Αντικαθιστώντας στην $y''_{\mu 1} + 4y'_{\mu 1} + 4y_{\mu 1} = x$ έχουμε

$$4A_1 + 4A_1 x + 4A_0 = x$$

Με αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} A_1 = 1/4 \\ A_0 = -1/4 \end{array}\right.$$

Επομένως

$$y_{\mu 1} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

Εύρεση

$$y_{\mu 2}: \; f_2(x) = -2\exp(2x) \Longrightarrow y_{\mu 2} = A\exp(2x)\,x^k$$

$$\left.\begin{array}{r} y_{\mu 1} = A\exp(2x) \\ y'_{\mu 1} = 2A\exp(2x) \\ y''_{\mu 1} = 4A\exp(2x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Αντικαθιστώντας στην $y''_{\mu 1}+4y'_{\mu 1}+4y_{\mu 1} = -2\exp(2x)$ και κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$A = -\frac{1}{4}$$

Επομένως

$$y_{\mu 2} = -\frac{1}{4}\exp(2x)$$

Άρα η γενική λύση της (4.1) θα είναι

$$y = c_1\exp(-2x) + c_2 x\exp(-2x) + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\exp(2x)$$

□

(δ)

$$y'' - 2y' + y = 4\exp x \tag{4.2}$$

Λύση. Η γενική λύση της (4.2) είναι

$$y = y_0 + y_{\mu 1}$$

Εύρεση

$$y_0: \; y'' - 2y' + y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Άρα $y_1(x) = \exp(\lambda_1 x) = \exp(x)$ και $y_2(x) = x\exp(\lambda_2 x) = x\exp(x)$. Οπότε

$$y_0 = c_1\exp(x) + c_2 x\exp(x)$$

Εύρεση

$$y_{\mu 1}: \; f_1(x) = 4\exp(x) \Longrightarrow y_{\mu 1} = A\exp(x)\,x^k$$

$$\left.\begin{array}{r} y_{\mu 1} = A\exp(x)\,x^2 \\ y'_{\mu 1} = A\exp(x)\,x^2 + A2x\exp x = A\left(x^2+2x\right)\exp x \\ y''_{\mu 1} = A\left(x^2+4x+2\right)\exp(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Αντικαθιστώντας στην $y''_{\mu 1} - 2y'_{\mu 1} + y_{\mu 1} = 4\exp(x)$ και κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$A = 2$$

Επομένως

$$y_{\mu 1} = 2\exp(x)\, x^2$$

Άρα η γενική λύση της (4.2) θα είναι

$$y = c_1 \exp(x) + c_2 x \exp(x) + 2\exp(x)\, x^2$$

□

Άσκηση 4.7

Αν $a, b, c \in \mathbb{R}^+$και $y_1(t), y_2(t)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = g(t),$$

όπου $g \in C(I)$, I διάστημα του $\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι

$$\lim_{t \to +\infty} (y_1(t) - y_2(t)) = 0$$

Λύση. Έστω $L(y) = ay'' + by' + cy$.

Παρατηρώ ότι η διαφορά $y_1(t) - y_2(t)$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς, δηλαδή λύσεις της $L(y) = 0$, καθώς

$$L(y_1(t) - y_2(t)) = L(y_1(t)) - L(y_2(t)) = g(t) - g(t) = 0$$

Επομένως, αρκεί να δείξω ότι για κάθε λύση $y_{\mathrm{OM}} = \varphi(t)$ της ομογενούς ισχύει

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$$

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι

$$p(m) = am^2 + bm + c$$

Αφού $\Delta = b^2 - 4ac$ διακρίνω περιπτώσεις:

1. $\Delta > 0$. Τότε το $p(m)$ έχει 2 διαφορετικές ρίζες $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, δηλαδή τέτοιες ώστε $m_1 \neq m_2$. Στις ρίζες αυτές αντιστοιχούν οι ακόλουθες λύσεις της ομογενούς

$$\varphi_1(t) = \exp(m_1(t)) \qquad \text{και} \qquad \varphi_2(t) = \exp(m_2(t))$$

που λόγω της $m_1 \neq m_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς είναι:

$$y_{\mathrm{OM}}(t) = c_1 \exp(m_1 t) + c_2 \exp(m_2 t)$$

όπου c_1, c_2 σταθερές. Επιπλέον, για τις λύσεις m_1, m_2 του χαρακτηριστικού πολυωνύμου έχουμε ότι σύμφωνα με τους τύπυς Ϊεττα

$$m_1 m_2 = \frac{c}{a} > 0$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{b}{a} < 0$$

Από αυτά προκύπτει ότι $m_1, m_2 < 0$. Επομένως έχουμε ότι

$$\lim_{t \to +\infty} y_{\mathrm{OM}}(t) = \lim_{t \to +\infty} (c_1 \exp(m_1 t) + c_2 \exp(m_2 t)) = 0$$

Επειδή οι $\exp(m_1 t)$ και $\exp(m_2 t)$ τείνουν στο 0 καθώς $t \longrightarrow +\infty$ αφού $r_1, r_2 < 0$.

2. $\Delta = 0$. Τότε το $p(m)$ έχει μία διπλή ρίζα την $m = -\frac{b}{2a} < 0$. Στη ρίζα αυτή αντιστοιχούν οι ακόλουθες λύσεις της ομογενούς

$$\varphi_1(t) = \exp(mt) \qquad \text{και} \qquad \varphi_2(t) = t\exp(mt)$$

που είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς είναι:

$$y_{\mathrm{OM}}(t) = c_1 \exp(mt) + c_2 t \exp(mt)$$

όπου c_1, c_2 σταθερές. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t \to +\infty} (c_1 \exp(mt)) = 0, \qquad m < 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} (c_2 t \exp(mt)) = c_2 \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{\exp(-mt)} = c_2 \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{-m\exp(-mt)} = 0$$

Επομένως

$$\lim_{t \to +\infty} y_{\mathrm{OM}}(t) = c_2 \lim_{t \to +\infty} (c_1 \exp(mt) + c_2 t \exp(mt)) = 0.$$

3. $\Delta < 0$. Τότε το $p(m)$ έχει τις εξής λύσεις

$$m_1 = \sigma + i\omega \qquad \text{και} \qquad m_2 = \overline{m_1} = \sigma - i\omega$$

όπου

$$\sigma = -\frac{b}{2a} < 0 \qquad \text{και} \qquad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} > 0$$

Στις ρίζες αυτές αντιστοιχούν οι ακόλουθες λύσεις της ομογενούς

$$\varphi_1(t) = \exp(\sigma(t))(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

και

$$\varphi_2(t) = \exp(\sigma(t))(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

Επομένως, η γενική λύση της ομογενούς είναι:

$$y_{\text{OM}}(t) = \exp(\sigma t)(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t)$$

όπου c_1, c_2 σταθερές. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\exp(\sigma t) = 0, \qquad \sigma < 0$$

$$|c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t| \le |c_1| + |c_2|$$

άρα φραγμένη. Επομένως

$$\lim_{t\to+\infty} y_{\text{OM}}(t) = \lim_{t\to+\infty}\exp(\sigma t)(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t) = 0$$

καθώς έχουμε μηδενική επί φραγμένη. □

Άσκηση 4.8

Να βρεθεί η γενική λύση μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης αν είναι γνωστό ότι οι

$$\varphi_1(t) = t^2\ ,\ \varphi_2(t) = t^2 + \exp t\ ,\ \varphi_3(t) = 1 + t^2 + 2\exp t$$

είναι λύσεις της.

Λύση. Η μορφή της διαφορικής εξισωσης είναι

$$a(t)\,y'' + b(t)\,y' + c(t)\,y = f(t) \tag{4.3}$$

και επειδή έχουμε τις μερικές λύσεις

$$\varphi_1(t) = t^2\ ,\ \varphi_2(t) = t^2 + \exp t\ ,\ \varphi_3(t) = 1 + t^2 + 2\exp t$$

ουσιαστικά ψάχνουμε την ομογενή λύση. Οι μερικές λύσεις όμως επαληθεύουν την (4.3) άρα

$$a(t)\,y_1'' + b(t)\,y_1' + c(t)\,y_1 = f(t) \tag{4.4}$$

$$a(t)\,y_2'' + b(t)\,y_2' + c(t)\,y_2 = f(t) \tag{4.5}$$

$$a(t)\,y_3'' + b(t)\,y_3' + c(t)\,y_3 = f(t) \tag{4.6}$$

Αφαιρώντας ανά δύο κατά μέλη τις (4.4), (4.5), (4.6) έχουμε

$$a(t)(y_1 - y_2)'' + b(t)(y_1 - y_2)' + c(t)(y_1 - y_2) = 0$$

$$a(t)(y_1 - y_3)'' + b(t)(y_1 - y_3)' + c(t)(y_1 - y_3) = 0$$

$$a(t)(y_2 - y_3)'' + b(t)(y_2 - y_3)' + c(t)(y_2 - y_3) = 0$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 0 \\ y_1 - y_3 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0 \end{cases}$$

Η ομογενής λύση θα είναι

$$y_0 = c_1 y_{0,1} + c_2 y_{0,2},$$

όπου $y_{0,1}, y_{0,2}$ είναι δύο μερικές λύσεις γραμμικά ανεξάρτητες. Τότε η ορίζουσα Wronski θα είναι

$$W = \begin{vmatrix} y_{0,1} & y_{0,2} \\ y'_{0,1} & y'_{0,2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Τότε η λύση της ομογενούς είναι

$$y_1 - y_2 = -\exp t$$

$$y_2 - y_3 = -1 - \exp t$$

$$y_1 - y_3 = -1 - \exp(2t)$$

□

Άσκηση 4.14

Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y'' + 4y' + 4y = t^{-2}\exp(-2t) \tag{4.7}$$

Λύση. Η γενική λύση της (4.7) είναι

$$y = y_0 + y_{\mu 1}$$

Εύρεση της ομογενούς λύσης

$$y_0 : \; y'' + 4y' + 4y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

Άρα $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t) = \exp(-2t)$ και $y_2(t) = t\exp(\lambda_2 t) = t\exp(-2t)$. Οπότε

$$y_0 = c_1 \exp(-2t) + c_2 t \exp(-2t)$$

Εύρεση της μερικής λύσης

$$y_\mu = u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t)$$

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)\, f(t)}{W(t)} dt,$$

όπου $f(t) = t^{-2}\exp(-2t)$

$$W_{(y_1(t), y_2(t))}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_2'(t)\, y_1(t) - y_1'(t)\, y_2(t)$$

$$y_1'(t) = -2\exp(-2t)$$

$$y_2'(t) = \exp(-2t) - 2t\exp(-2t) = (1-2t)\exp(-2t)$$

οπότε η ορίζουσα Wronski θα είναι

$$W_{(y_1(t), y_2(t))}(t) = (1-2t)\exp(-2t)\exp(-2t) + 2\exp(-2t)\, t\exp(-2t)$$

$$= \exp(-4t)\left[(1-2t) + 2t\right] = \exp(-4t)$$

άρα

$$u_1(t) = -\int \frac{t\exp(-2t)\, t^{-2}\exp(-2t)}{\exp(-4t)} dt = -\int t^{-1} dt = -\ln t$$

ομοίως

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)\, f(t)}{W(t)} dt = \int \frac{\exp(-2t)\, t^{-2}\exp(-2t)}{\exp(-4t)} dt = \int \frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t}$$

Επομένως η μερική λύση της (4.7)θα είναι

$$y_\mu = -\ln t \exp(-2t) - \frac{1}{t} t \exp(-2t) = -(\ln t + 1)\exp(-2t)$$

Η γενική λύση της (4.7) είναι

$$y = c_1 \exp(-2t) + c_2 t\exp(-2t) - (\ln t + 1)\exp(-2t)$$

□

Άσκηση 4.16

Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y'' - 2y' + y = \frac{\exp t}{1+t^2} \tag{4.8}$$

Λύση. Η γενική λύση της (4.8) είναι

$$y = y_0 + y_{\mu 1}$$

Εύρεση της ομογενούς λύσης

$$y_0 : \; y'' - 2y' + y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Άρα $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t) = \exp(t)$ και $y_2(t) = t\exp(\lambda_2 t) = t\exp(t)$. Οπότε

$$y_0 = c_1 \exp(t) + c_2 t \exp(t)$$

Εύρεση της μερικής λύσης

$$y_\mu = u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t)$$

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)\, f(t)}{W(t)} dt,$$

όπου $f(t) = \frac{\exp t}{1+t^2}$

$$W_{(y_1(t), y_2(t))}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_2'(t)\, y_1(t) - y_1'(t)\, y_2(t)$$

$$y_1'(t) = \exp(t)$$

$$y_2'(t) = \exp(t) + t\exp(t) = (1+t)\exp(t)$$

οπότε η ορίζουσα Wronski θα είναι

$$W_{(y_1(t), y_2(t))}(t) = (1+t)\exp(t)\exp(t) - \exp(t)\, t\exp(t)$$

$$= \exp(2t)\left[(1+t) - t\right] = \exp(2t)$$

άρα

$$u_1(t) = -\int \frac{t\exp(t)\frac{\exp t}{1+t^2}}{\exp(2t)} dt = -\int \frac{t}{1+t^2} dt = -\ln\left(1+t^2\right)$$

ομοίως

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)\, f(t)}{W(t)} dt = \int \frac{\exp(t)\frac{\exp t}{1+t^2}}{\exp(2t)} dt = \int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t$$

Επομένως η μερική λύση της (4.7)ϑα είναι

$$y_\mu = -\ln\left(1+t^2\right)\exp(t) - \arctan(t)\, t\exp(t) = -\left(\ln\left(1+t^2\right) - t\arctan(t)\right)\exp(t)$$

Η γενική λύση της (4.7) είναι

$$y = c_1\exp(t) + c_2 t\exp(t) - \left(\ln\left(1+t^2\right) - t\arctan(t)\right)\exp(t)$$

□

Άσκηση 4.18

Να υπολογιστεί η λύση του Π.Α.Τ.

$$u'' + u = F(t),\ u(0) = 0,\ u'(0) = 0,$$

όπου

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t & ,0 \le t \le \pi, \\ F_0(2\pi - t) & ,\pi \le t \le 2\pi, \\ 0 & ,2\pi \le t, \end{cases}$$

με F_0 σταθερά.

Λύση. Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$u'' + u = 0 \tag{4.9}$$

Με χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm i$. Άρα η γενική λύση της (4.9) είναι $y(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$

1η περίπτωση: Για $0 \le t \le \pi$ είναι

$$y(t) = At + B,\ y'(t) = A,\ y''(t) = 0$$

Αντικαθιστώντας έχουμε $At + B = F_0 t$, οπότε από αναγωγή ομοίων όρων πρέπει $A = F_0,\ B = 0$ άρα

$$y(t) = F_0 t$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + F_0 t$$

Από το Π.Α.Τ. έχουμε ότι

$$c_1 = 0$$

και

$$y'(t) = -c_1\sin t + c_2\cos t + F_0 \Longrightarrow 0 = 0 + c_2 + F_0 = 0 \Longrightarrow c_2 = -F_0$$

Άρα
$$y\left(t\right)=-F_0\sin t+F_0t$$

2η περίπτωση: Για $2\pi\leq t$ είναι
$$u''+u=0$$
με χαρακτηριστική εξίσωση
$$\lambda^2+1=0\Longrightarrow\lambda=\pm i$$
Άρα έχει γενική λύση
$$u\left(t\right)=c_1\cos t+c_2\sin t\Longrightarrow 0=c_1+0\Longrightarrow c_1=0$$
$$u'\left(t\right)=-c_1\sin t+c_2\cos t\Longrightarrow 0=0+c_2\Longrightarrow c_2=0$$
Άρα $u\left(t\right)=0$

3η περίπτωση: Για $\pi\leq t\leq 2\pi$ είναι
$$u''+u=F_0\left(2\pi-t\right)\Longrightarrow u''+u=F_02\pi-F_0t$$
Αρκεί
$$u''+u=F_02\pi,\quad u''+u=-F_0t$$
Είναι $u''+u=F_02\pi$ με
$$u\left(t\right)=c_1\cos t+c_2\sin t,\quad u_\mu\left(t\right)=A\Longrightarrow u_\mu'\left(t\right)=0$$
Άρα $A=F_02\pi$ και επομένως
$$u_\mu\left(t\right)=2\pi F_0$$
Αναλόγως για $u''+u=-F_0t$ με
$$u\left(t\right)=c_1\cos t+c_2\sin t,\quad u_\mu\left(t\right)=At+B\Longrightarrow u_\mu'\left(t\right)=A$$
Άρα $A=0$ και επομένως
$$u_\mu\left(t\right)=0$$
Ακόμα $At+B=-F_0t$ οπότε έπεται ότι $A=F_0,\quad B=0$ άρα
$$u_\mu\left(t\right)=-F_0t$$
Από το Π.Α.Τ. έχουμε
$$u\left(t\right)=c_1\cos t+c_2\sin t+2\pi F_0-F_0t\Longrightarrow$$
$$0=c_1+\pi+2\pi F_0-0\Longrightarrow c_1=-2\pi F_0$$

$$u'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t - F_0 \Longrightarrow$$

$$0 = 0 + u(t) = c_2 - F_0 \Longrightarrow c_2 = F_0$$

Άρα η τελική λύση είναι

$$u(t) = -2\pi F_0 \cos t + F_0 \sin t + 2\pi F_0 - F_0 t$$

Συγκεντρωτικά έχουμε

$$u(t) = \begin{cases} -F_0 \sin t + F_0 t & , 0 \leq t \leq \pi, \\ -2\pi F_0 \cos t + F_0 \sin t + 2\pi F_0 - F_0 t & , \pi \leq t \leq 2\pi, \\ 0 & , 2\pi \leq t, \end{cases}$$

□

Άσκηση 4.29

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$t^2 y'' + t y' + y = \log t \ , \ t > 0 \tag{4.10}$$

Λύση. Θέτουμε

$$\exp x = t \Longrightarrow \exp x dx = dt \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \exp(-x)$$

$$y = y(t) = y(\exp x) = Y(x) = Y \Longrightarrow y = Y$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dx}\frac{dx}{dt} = Y' \exp(-x) \Longrightarrow y' = Y' \exp(-x)$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{d(Y' \exp(-x))}{dt}\frac{dx}{dt} = \left(Y' \exp(-x) - Y' \exp(-x)\right) \exp(-x) \Longrightarrow y'' = \left(Y'' - Y'\right) \exp(-2x)$$

Αντικαθιστούμε στην (4.10) και έχουμε

$$(\exp 2x)\left(Y'' - Y'\right) \exp(-2x) + (\exp x) Y' \exp(-x) + Y = \log(\exp x) \Longrightarrow$$

$$Y'' + Y = x$$

Η λύση της (4.10) είναι

$$Y = Y_0 + Y_\mu$$

Εύρεση της ομογενούς λύσης Y_0 :

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = i \, , \, \lambda = -i$$

$$Y_0 = c_1 \cos(1x) + c_2 \sin(1x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Εύρεση της μερικής λύσης Y_μ :

$$Y_\mu = (Ax + B)\, x^k$$

$$\left.\begin{array}{r} Y_\mu = (Ax + B)\, x \\ Y_\mu' = 2Ax + B \\ Y_\mu'' = 2A \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Αντικαθιστώντας στην $y_\mu'' + y_\mu = x$ και κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$A = 0\,,\ B = 1$$

Επομένως

$$Y_\mu = x$$

Άρα η λύση είναι

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$$

Τελικά η γενική λύση της (4.10) θα είναι

$$y = c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log x) + \log x$$

□

Άσκηση 4.32

Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

(β)

$$y'' + 4y' + 4y = t \exp(at) \tag{4.11}$$

Λύση. Η γενική λύση της (4.11) είναι

$$y = y_0 + y_{\mu 1}$$

Εύρεση

$$y_0 :\ y'' + 4y' + 4y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

Άρα $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t) = \exp(-2t)$ και $y_2(t) = t\exp(\lambda_2 t) = t\exp(-2t)$. Οπότε

$$y_0 = c_1 \exp(-2t) + c_2 t \exp(-2t)$$

Εύρεση

$$y_{\mu 1}: \; f_1(x) = t\exp(at) \Longrightarrow y_{\mu 1} = (A_1 t + A_0)\exp(at)\, t^k$$

όπου k η πολλαπλότητα του αριθμού a ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Στην προκειμένη περίπτωση αν $a=-2 \Longrightarrow k=2$, αλλιώς $k=0$.

1η περίπτωση: αν $a=-2 \Longrightarrow k=2$

$$y_{\mu 1} = (A_1 t + A_0)\exp(-2t)\, t^2$$

$$\left.\begin{array}{r} y_{\mu 1} = (A_1 t + A_0)\exp(-2t)\, t^2 \\ y'_{\mu 1} = \left(3A_1t^2 + 2A_0 t\right)\exp(-2t) - 2\left(A_1t^3 + A_0t^2\right)\exp(-2t) \\ y''_{\mu 1} = (6A_1t + 2A_0)\exp(-2t) - 2\left(3A_1t^2 + 2A_0t\right)\exp(-2t) - \\ -2\left(3A_1t^2 + 2A_0t\right)\exp(-2t) + 4\left(A_1t^3 + A_0t^2\right)\exp(-2t) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Αντικαθιστώντας στην $y''_{\mu 1} + 4y'_{\mu 1} + 4y_{\mu 1} = t\exp(-2t)$ έχουμε

$$(6A_1t + 2A_0)\exp(-2t) - 2\left(3A_1t^2 + 2A_0t\right)\exp(-2t) -$$

$$-2\left(3A_1t^2 + 2A_0t\right)\exp(-2t) + 4\left(A_1t^3 + A_0t^2\right)\exp(-2t)$$

$$+4\left(3A_1t^2 + 2A_0t\right)\exp(-2t) - 2\left(A_1t^3 + A_0t^2\right)\exp(-2t) +$$

$$+4(A_1t + A_0)\exp(-2t)\, t^2 = t\exp(-2t) \Longrightarrow$$

$$(6A_1t + 2A_0) - 2\left(3A_1t^2 + 2A_0t\right) - 2\left(3A_1t^2 + 2A_0t\right) + 4\left(A_1t^3 + A_0t^2\right) +$$

$$+4\left(3A_1t^2 + 2A_0t\right) - 2\left(A_1t^3 + A_0t^2\right) + 4(A_1t + A_0) = t$$

Από αναγωγή ομοίων όρων βρίσκουμε τα A_0, A_1. Επομένως η γενική λύση της (4.11) θα είναι

$$y(t) = c_1\exp(-2t) + c_2 t\exp(-2t) + c_3(A_1t + A_0)\exp(-2t)\, t^2$$

2η περίπτωση: αν $a \neq -2 \Longrightarrow k=0$

$$y_{\mu 1} = (A_1t + A_0)\exp(at)$$

Ομοίως από αναγωγή ομοίων όρων βρίσκουμε τα A_0, A_1. Επομένως η γενική λύση της (4.11) θα είναι

$$y(t) = c_1\exp(-2t) + c_2 t\exp(-2t) + c_3(A_1t + A_0)\exp(at)$$

□

(η)

$$y'' + y' + y = \sin^2 t \tag{4.12}$$

Λύση. Η γενική λύση της (4.12) είναι

$$y = y_0 + y_{\mu 1}$$

Εύρεση της ομογενούς

$$y_0 : \; y'' + y' + y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Άρα $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t) = \exp(-2t)$ και $y_2(t) = t\exp(\lambda_2 t) = t\exp(-2t)$. Οπότε

$$y_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Η (4.12) γράφεται και ως εξής

$$y'' + y' + y = \frac{1 - \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}$$

Εύρεση της μερικής 1

$$y_{\mu 1} : \; f_1(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow y_{\mu 1} = A_1 t^k$$

$$\left.\begin{aligned} y_{\mu 1} &= A_1 \\ y'_{\mu 1} &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

Αντικαθιστώντας στην $y''_{\mu 1} + y'_{\mu 1} + y_{\mu 1} = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$0 + A_0 = \frac{1}{2} \Longrightarrow A_0 = \frac{1}{2}$$

Επομένως

$$y_{\mu 1} = \frac{1}{2}$$

Εύρεση της μερικής 2

$$y_{\mu 2} : \; f_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2t \Longrightarrow y_{\mu 2} = (A\cos 2t + B\sin 2t)\, t^k$$

$$\left.\begin{aligned} y_{\mu 1} &= A\cos 2t + B\sin 2t \\ y'_{\mu 1} &= -2A\sin 2t + 2B\cos 2t \\ y''_{\mu 1} &= -4A\cos 2t - 4B\sin 2t \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

Αντικαθιστώντας στην $y''_{\mu 1} + y'_{\mu 1} + y_{\mu 1} = -\frac{\cos 2t}{2}$ και κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων και λίγες πράξεις έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} A = \frac{3}{26} \\ B = -\frac{1}{13} \end{array}\right.$$

Επομένως

$$y_{\mu 2} = \frac{3}{26}\cos 2t - \frac{1}{13}\sin 2t$$

Άρα η γενική λύση της (4.12) θα είναι

$$y = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{26}\cos 2t - \frac{1}{13}\sin 2t$$

□

Άσκηση 4.34

Να λυθεί το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y''' + y'' = t + \exp(-t) \\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0\ ,\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

Λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda^2(\lambda+1) \Longrightarrow \lambda = 0, \lambda = -1$$

Άρα $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t) = 1$ και $y_2(t) = \exp(\lambda_2 t) = \exp(-t)$. Οπότε

$$y_0 = c_1 + c_2 \exp(-t)$$

Εύρεση της μερικής λύσης

$$y_\mu = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t)$$

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)\,f(t)}{W(t)}dt,$$

όπου $f(t) = t + \exp(-t)$

$$W_{(y_1(t),y_2(t))}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_2'(t)\,y_1(t) - y_1'(t)\,y_2(t)$$

$$y_1'(t) = 0$$

$$y_2'(t) = -\exp(-t)$$

οπότε η ορίζουσα Wronski θα είναι

$$W_{(y_1(t),y_2(t))}(t) = -\exp(-t)$$

άρα

$$u_1(t) = -\int \frac{(t+\exp(-t))\exp(-t)}{-\exp(-t)}dt = \int (t+\exp(-t))\,dt = -\exp(-t)+t^2$$

ομοίως

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)\,f(t)}{W(t)}dt = \int \frac{t+\exp(-t)}{-\exp(-t)}dt = -\int (t\exp(-t)-1)\,dt = \exp(-t)(1+t)+t$$

Τότε

$$y_\mu = -\exp(-t)+t^2+(\exp(-t)(1+t)+t)\exp(-t)$$

Τελικά η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y = c_1 + c_2\exp(-t) - \exp(-t) + t^2 + (\exp(-t)(1+t)+t)\exp(-t)$$

Από το Π.Α.Τ. όμως έχουμε

$$y(0)=1 \Longrightarrow 1 = c_1+c_2-1 \Longrightarrow c_1+c_2=-2$$

$$y'(0)=0 \Longrightarrow y' = -c_2\exp(-t)+\exp(-t)+2t+$$

$$+(-\exp(-t)(1+2t)+2\exp(-t))\exp(-t)+$$

$$+(-\exp(-t)(1+2t)+2\exp(-t))(-\exp(-t)) \Longrightarrow$$

$$0 = 1+1+c_2 \Longrightarrow c_2=-2 \Longrightarrow c_1=0$$

Επομένως η λύση του Π.Α.Τ είναι

$$y = -2\exp(-t) - \exp(-t) + t^2 + (\exp(-t)(1+t)+t)\exp(-t)$$

□

5 Μέθοδος δυναμοσειρών

Άσκηση 5.1

Να βρεθούν όλες οι λύσεις της μορφής $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

(β)

$$y' = 2xy \tag{5.1}$$

Λύση. Έχουμε τη σειρά Maclaurin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ η οποία αποτελεί λύση της (5.1), δηλαδή $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Παραγωγίζοντάς την παίρνουμε

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

τότε αντικαθιστούμε στην (5.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \iff$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Θέτουμε στην $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$: $n+1 = k-1$ και έχουμε για $n = 0 \Longrightarrow k = 2$. Οπότε

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-1} = 0$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0$$

$$\iff a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 0$$

$$\iff a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[n a_n - 2 a_{n-2} \right] x^{n-1} = 0$$

Κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ na_n - 2a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε πάντα $a_0 = c_1,\ a_1 = c_2$. Τότε για $n = 2, 3, 4 \ldots$ έχουμε

$$a_2 = c_1$$

$$a_3 = 0$$
$$a_4 = \frac{c_1}{2}$$
$$a_5 = 0$$
$$a_6 = \frac{c_1}{6}$$
$$\vdots$$

Επομένως επαγωγικά η τελική λύση θα είναι

$$y\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = c_1 \exp\left(x^2\right)$$

□

(δ)

$$\left(1 - x\right) y' = y \tag{5.2}$$

Λύση. Έχουμε τη σειρά Maclaurin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ η οποία αποτελεί λύση της (5.2), δηλαδή $y\left(x\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Παραγωγίζοντάς την παίρνουμε

$$y'\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

τότε αντικαθιστούμε στην (5.2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Θέτουμε στην $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$: $n-1=k$ και έχουμε για $n=1 \Longrightarrow k=0$. Οπότε

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,a_{k+1}x^k - \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n - a_0 - \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)\,a_{n+1} - na_n - a_n\right]x^n = 0$$

Κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = 0 \\ (n+1)\,a_{n+1} - na_n - a_n = 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε πάντα $a_0 = c_1,\ a_1 = c_2$. Τότε για $n = 2, 3, 4\ldots$ έχουμε

$$a_1 = a_0 = c_1 = c_2$$

$$a_2 = a_1$$

$$a_3 = a_2$$

$$a_4 = a_3$$

$$\vdots$$

Επομένως επαγωγικά η τελική λύση θα είναι

$$y\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = c_1\left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right) = c_1\frac{1}{1-x}$$

□

Άσκηση 5.2

Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις σε μορφή δυναμοσειρών (δυνάμεων του x) των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων. Για ποιές τιμές του x συγκλίνουν οι δυναμοσειρές·
(β)

$$y'' + 3x^2y' - xy = 0 \tag{5.3}$$

Λύση. Έχουμε τη σειρά Maclaurin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ η οποία αποτελεί λύση της (5.3), δηλαδή

$y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Παραγωγίζοντάς την μία και δύο φορές αντίστοιχα παίρνουμε

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

τότε αντικαθιστούμε στην (5.3)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \Longleftrightarrow$$

Θέτουμε στην $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ όπου $n-2=k$ και έχουμε για $n=2 \Longrightarrow k=0$, στην $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1}$ όπου $n+1=k$ και έχουμε για $n=1 \Longrightarrow k=2$ και στην $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$όπου $n+1=k$ και έχουμε για $n=0 \Longrightarrow k=1$. Οπότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{(k+2)} x^k + 3 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) a_{(k-1)} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{(k-1)} x^k = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{(n+2)} x^n + 3 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{(n-1)} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{(n-1)} x^n = 0 \Longleftrightarrow$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{(n+2)} x^n + 3 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{(n-1)} x^n - a_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} a_{(n-1)} x^n = 0 \Longleftrightarrow$$

$$2a_2 + 6a_3 x - a_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{(n+2)} + 3(n-1) a_{(n-1)} - a_{(n-1)} \right] x^n = 0$$

Κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 - a_0 = 0 \\ (n+2)(n+1) a_{(n+2)} + 3(n-1) a_{(n-1)} - a_{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε πάντα $a_0 = c_1,\ a_1 = c_2$. Τότε για $n = 2, 3, 4 \ldots$ έχουμε

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = \frac{a_0}{6} = \frac{c_1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{a_1}{6} = -\frac{c_2}{6}$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = -\frac{a_3}{30} = -\frac{c_1}{90}$$

$$\vdots$$

Επομένως επαγωγικά η τελική λύση θα είναι

$$\varphi_1(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 8 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot (9n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n)}$$

$$\varphi_2(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cdot 2 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (9n-7)}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n)(3n+1)}$$

□

(γ)

$$y'' - x^2 y' = 0 \tag{5.4}$$

Λύση. Έχουμε τη σειρά Maclaurin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ η οποία αποτελεί λύση της (5.4), δηλαδή $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Παραγωγίζοντάς την μία και δύο φορές αντίστοιχα παίρνουμε

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

τότε αντικαθιστούμε στην (5.4)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \iff$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0 \iff$$

Θέτουμε στην $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ όπου $n-2=k$ και έχουμε για $n=2 \Longrightarrow k=0$ και στην $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$ όπου $n+2=k$ και έχουμε για $n=0 \Longrightarrow k=2$. Οπότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k = 0 \iff$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=0 \Longleftrightarrow$$

$$2a_5+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)\,a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n=0 \Longleftrightarrow$$

$$2a_5+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)\,a_{n+2}-a_{n-2}\right]x^n=0$$

Κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$\begin{cases} 2a_5=0 \\ 6a_3=0 \\ (n+2)(n+1)\,a_{n+2}-a_{n-2}=0 \end{cases}$$

Θεωρούμε πάντα $a_0=c_1,\ a_1=c_2$. Τότε για $n=2,3,4\ldots$ έχουμε

$$a_2=5\frac{c_1}{2}$$
$$a_3=0$$
$$a_4=\frac{c_1}{12}$$
$$a_5=0$$
$$\vdots$$

Επομένως επαγωγικά η τελική λύση θα είναι

$$\varphi_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot(4n)(4n-1)}$$

$$\varphi_2(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4\cdot5\cdot8\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n)(4n+1)}$$

□

Άσκηση 5.4

Να βρεθεί λύση της φ διαφορικής εξίσωσης

$$\left(1+x^2\right)y''+y=0, \tag{5.5}$$

της μορφής $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ που ικανοποιεί τις $\varphi(0)=0$ και $\varphi'(0)=1$. Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η δυναμοσειρά·

Λύση. Η διαφορική εξίσωση (5.5) γράφεται

$$y'' + \frac{1}{(1+x^2)}y = 0$$

Η συνάρτηση

$$p(t) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

είναι αναλυτική στο $t_0 = 0$ δηλαδή είναι C^∞, άρα η (5.5) έχει μία λύση της μορφής $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Παραγωγίζοντάς την μία και δύο φορές αντίστοιχα παίρνουμε

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\varphi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

τότε αντικαθιστούμε στην (5.4)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Longleftrightarrow$$

Θέτουμε στην $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ όπου $n-2=k$ και έχουμε για $n=2 \Longrightarrow k=0$, οπότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Longleftrightarrow$$

$$2a_2 + 6a_3 x + a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 \Longleftrightarrow$$

$$2a_2 + 6a_3 x + a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n + a_n\right] x^n = 0 \Longleftrightarrow$$

Κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων έχουμε

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ 6a_3 + a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n + a_n = 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε πάντα $a_0 = c_1,\ a_1 = c_2$. Από το Π.Α.Τ. όμως έχουμε $\varphi(0) = 0$ και $\varphi'(0) = 1$.

Τότε για $n = 2, 3, 4\dots$ έχουμε

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} = -\frac{c_1}{2} = 0$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{6} = -\frac{c_2}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{12} = \frac{-c_1}{24} = 0$$

$$a_5 = \frac{1}{4}a_3 = -\frac{c_2}{24} = -\frac{1}{24}$$

$$\vdots$$

Επομένως επαγωγικά η τελική λύση θα είναι όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα της μορφής

$$\varphi(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 7 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot [(2n-1)(2n-2)+1]}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$\square$

6 Γραμμικά Συστήματα

Άσκηση 6.1

Να λυθεί το Π.Α.Τ. $y' = Ay,\ y(0) = y_0$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Λύση. Έυρεση ιδιοτιμών

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - 5 = \lambda^2 + 2\lambda - 8$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $2, -4$. Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = y$$

Άρα

$$V(2) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -4

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow 5x = -y$$

Άρα

$$V(-4) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -5x \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Η λύση θα είναι της μορφής

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) U_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) U_2$$

$$y(t) = c_1 \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(-4t) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Από το Π.Α.Τ. όμως έχουμε για $t = 0 \Longrightarrow y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, επομένως

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_1 - 5c_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c_2 = -1/6 \\ c_1 = 7/6 \end{array} \right.$$

Τελικά η λύση είναι

$$y(t) = -\frac{1}{6} \exp(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{6} \exp(-4t) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\square$

Άσκηση 6.4

Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}, \ t > 0,$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} y$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $y(1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^t$.

Λύση. Για να είναι ο $\Phi(t)$ θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος $y' = Ay$ αρκεί να ισχύει $\Phi'(t) = A\Phi(t)$. Πράγματι

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & -\frac{1}{t^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix} = A\Phi(t)$$

Οι ιδιοτιμές του $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}$ είναι $0, -\frac{1}{t}$ αφού ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός.

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ -\frac{1}{t} y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow y = 0$$

Άρα

$$U_1 = V(0) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-\frac{1}{t}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \ y = -\tfrac{1}{t}x \right.$$

Άρα

$$U_2 = V\left(-\frac{1}{t}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{t}x \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Επομένως η λύση είναι

$$y\left(t\right) = c_1 U_1 \exp \lambda_1 t + c_2 U_2 \exp \lambda_2 t = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{t}t\right)$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c_2}{\exp} \\ -\frac{c_2}{t\exp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{c_2}{\exp} \\ -\frac{c_2}{t\exp} \end{pmatrix}$$

Από το Π.Α.Τ. για $t = 1$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} c_1 + \frac{c_2}{\exp} \\ -\frac{c_2}{\exp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + \frac{c_2}{\exp} = -2 \\ -\frac{c_2}{\exp} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = -e \end{cases}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι

$$y\left(t\right) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \exp\left(-1\right)$$

□

Άσκηση 6.6

Να βρεθεί ο $\exp At$ αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση. Εύρεση ιδιοτιμών

$$\det\left(A - \lambda I_2\right) = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $\pm 2i$. Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $2i$

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2ix = y \\ 4x = 2iy \end{cases}$$

Άρα

$$U_1 = V(2i) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2ix \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-2i$

$$\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2ix = y \\ 4x = -2iy \end{cases}$$

Άρα

$$U_2 = V(-2i) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2ix \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \right\rangle$$

Τότε

$$X(t) = \left[\exp \lambda_1 t U_1 \ \vdots \ \exp \lambda_1 t U_2 \right]$$

$$= \left[\exp 2it \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \ \vdots \ \exp(-2it) \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \exp 2it & \exp(-2it) \\ -2i \exp(2it) & 2i \exp(-2it) \end{bmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2i & 2i \end{pmatrix}$$

Για την εύρεση του X^{-1} έχουμε:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2i & 2i & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 1η γραμμή με $2i$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2i & 2i & 2i & 0 \\ -2i & 2i & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Έπειτα κάνουμε τις εξής γραμμοπράξεις: $R_2 \longrightarrow R_2 + R_1$, $R_1 \longrightarrow 2R_1 - R_2$, $R_1 \longrightarrow {}^{R_1}/_{4i}$, $R_2 \longrightarrow {}^{R_2}/_{4i}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2i & 2i & 2i & 0 \\ 0 & 4i & 2i & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 4i & 0 & 2i & -1 \\ 0 & 4i & 2i & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/4i \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4i \end{array} \right)$$

$$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4i \\ 1/2 & 1/4i \end{pmatrix}$$

Τελικά έχουμε

$$\exp At = X(t)\,X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \exp 2it & \exp(-2it) \\ -2i\exp(2it) & 2i\exp(-2it) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4i \\ 1/2 & 1/4i \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 6.8

Να λυθεί το σύστημα $y' = Ay$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη: Ο A είναι απλής δομής και $\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

Λύση. Ο A είναι άνω τριγωνικός οπότε και από την υπόδειξη έχουμε ότι οι ιδιοτιμές του είναι οι $1, 1, 2$. Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 είναι:

$$(A - 1I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -1z = 0 \\ 1z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

Άρα

$$V(1) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα

$$V(2) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Εφόσον $\dim V(1) + \dim V(2) = 3 = \dim V$ δεν χρειάζεται να βρούμε ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Τελικά η λύση είναι

$$y(t) = c_1 V(1) \exp t + c_2 V(2) \exp 2t = c_1 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \exp t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp 2t$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1 \exp t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \exp t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \exp 2t \\ 0 \\ c_2 \exp 2t \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 6.9

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $y' = Ay$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Υπόδειξη: Ο A έχει τριγωνική μορφή και ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2\ \lambda_3 = -1$

Λύση. Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 3x = 0 \\ 5x - 2y - 3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} z \end{cases}$$

Άρα

$$V(2) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$

$$(A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} 3x = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

Άρα

$$V(-1) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Εφόσον έχουμε διπλή ιδιοτιμή και $\dim V(2) + \dim V(-1) = 2 < \dim V = 3$ χρειαζόμαστε ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα.

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} 3x = \frac{3}{2} \\ 5x - 2y - 3z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \frac{1}{2} \\ z = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Άρα

$$V(2) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ y \\ -\frac{2}{3}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp 2t + c_2 \left(t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right) \exp 2t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-t)$$

□

Άσκηση 6.11

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $y' = Ay$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση. Για τις ιδιοτιμές του A έχουμε

$$\det|A - \lambda I_4| = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = -1 \Longrightarrow \lambda = \pm i$$

Με αλγεβρικές πολλαπλότητες $a(i) = 2$ και $a(-i) = 2$.

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = i$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} -ia - b = 0 \\ a - ib = 0 \\ a - ic + d = 0 \\ -c - id = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} a = b = 0 \\ c = -id \end{matrix}$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -id \\ d \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -i$

$$\begin{pmatrix} i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} ia - b = 0 \\ a + ib = 0 \\ a + ic + d = 0 \\ -c + id = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} a = b = 0 \\ c = id \end{matrix}$$

Άρα

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ id \\ d \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Η γενική λύση του συστήματος θα είναι

$$y(t) = c_1 \exp \lambda_1 t V(i) + c_2 \exp btV(-i)$$

$$y(t) = c_1 \exp(it) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 \exp(-it) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= c_1 \left[\cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_2 \left[\sin(-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(-t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix}$$

$\square$

Άσκηση 6.12

Να υπολογιστεί ο $\exp A$, αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση. Ο A είναι άνω τριγωνικός και έχει τριπλή ιδιοτιμή το 0. Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 είναι:

$$(A - \lambda I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} y + 2z = 0 \\ 3z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Άρα

$$U_1 = V(0) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Εφόσον έχουμε τριπλή ιδιοτιμή και $\dim V(0) = 1 < \dim V = 3$ χρειαζόμαστε δυο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα.

$$(A - \lambda I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} y + 2z = 1 \\ 3z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Άρα

$$U_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Για το 2ο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα που χρειαζόμαστε εργαζόμαστε ως εξής:

$$(A - \lambda I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} y + 2z = 1 \\ 3z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 1/3 \\ z = 1/3 \end{array} \right.$$

Άρα

$$U_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

Τότε

$$X(t)=\left[\exp\lambda tU_1\ \vdots\ \exp\lambda tU_2\ \vdots\ \exp\lambda tU_3\right]$$

$$=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\vdots\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\vdots\begin{pmatrix}1\\1/3\\1/3\end{pmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1/3\\0&0&1/3\end{bmatrix}$$

$$X(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1/3\\0&0&1/3\end{pmatrix}$$

Για την εύρεση του X^{-1} έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1/3&0&1&0\\0&0&1/3&0&0&1\end{array}\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε την 2η και την 3η γραμμή με 3

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&3&1&0&3&0\\0&0&1&0&0&3\end{array}\right)$$

Έπειτα κάνουμε τις εξής γραμμοπράξεις: $R_2\longrightarrow R_2-R_3,\ R_2\longrightarrow R_2/3,\ \ R_1\longrightarrow R_1-R_2,$ $R_1\longrightarrow R_1-R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&3&0&0&3&-3\\0&0&1&0&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-2\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&3\end{array}\right)$$

$$X^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&-1\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Τελικά έχουμε

$$\exp At=X(t)X^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1/3\\0&0&1/3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&1&-1\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\square$

Άσκηση 6.18

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $y' = Ay$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Λύση. Για την εύρεση ιδιοτιμών έχουμε

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left[(-2-\lambda)(2-\lambda)+3\right] + 5(2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left[(-2-\lambda)(2-\lambda)+8\right] = (2-\lambda)\left(\lambda^2+4\right)$$

Ιδιοτιμές του είναι το $2, 2i, -2i$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -5y = 0 \\ x - 4y - 3z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 3z \end{array} \right.$$

Άρα

$$V(2) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2i$

$$(A - 2iI_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2-2i & -5 & 0 \\ 1 & -2-2i & -3 \\ 0 & 1 & 2-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (2-2i)\,x - 5y = 0 \\ x - (2+2i)\,y - 3z = 0 \\ y + (2-2i)\,z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = -(2-2i)\,z \\ x = (2+2i)\,y + 3z = -(2-2i)\,z\,(2+2i) + 3z \end{array} \right.$$

Άρα

$$V(2i)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix}-0.875\\-0.343+0.343i\\0.1715\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}-0.875\\-0.343\\0.1715\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\0.343\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Η λύση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $2i$ είναι

$$\varphi(t)=\exp((2i)t)V(2i)=(\cos(2t)+i\sin(2t))\left[\begin{pmatrix}-0.875\\-0.343\\0.1715\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\0.343\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\cos(2t)\begin{pmatrix}-0.875\\-0.343\\0.1715\end{pmatrix}-\sin(2t)\begin{pmatrix}0\\0.343\\0\end{pmatrix}+i\left[\cos(2t)\begin{pmatrix}0\\0.343\\0\end{pmatrix}+\sin(2t)\begin{pmatrix}-0.875\\-0.343\\0.1715\end{pmatrix}\right]$$

$$\varphi_1(t)=\cos(2t)\begin{pmatrix}-0.875\\-0.343\\0.1715\end{pmatrix}-\sin(2t)\begin{pmatrix}0\\0.343\\0\end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t)=\cos(2t)\begin{pmatrix}0\\0.343\\0\end{pmatrix}+\sin(2t)\begin{pmatrix}-0.875\\-0.343\\0.1715\end{pmatrix}$$

Η γενική λύση του συστήματος θα είναι

$$y(t)=c_1\exp\lambda_1 tV(1)+c_2\varphi_1(t)+c_3\varphi_2(t)$$

$$y(t)=c_1\exp 2t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\left[\cos(2t)\begin{pmatrix}-0.875\\-0.343\\0.1715\end{pmatrix}-\sin(2t)\begin{pmatrix}0\\0.343\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$+c_3\left[\cos(2t)\begin{pmatrix}0\\0.343\\0\end{pmatrix}+\sin(2t)\begin{pmatrix}-0.875\\-0.343\\0.1715\end{pmatrix}\right]$$

□

Άσκηση 6.21

(α) Εάν

$$J=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

να δειχθεί ότι

$$\exp Jt = \begin{bmatrix} \exp\lambda_1 t & 0 \\ 0 & \exp\lambda_2 t \end{bmatrix}$$

Λύση. Ο πίνακας J είναι τριγωνικός οπότε οι ιδιοτιμές του είναι οι λ_1, λ_2.

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 είναι:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\, y = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Ενώ $x = c =$ αυθαίρετο, επομένως

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2 είναι:

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)\, x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Ενώ $y = c =$ αυθαίρετο, επομένως

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Άρα

$$X(t) = \left[\exp\lambda_1 t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vdots \exp\lambda_1 t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \exp\lambda_1 t & 0 \\ 0 & \exp\lambda_2 t \end{bmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X^{-1}(0)$$

$$\exp Jt = X(t)\, X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \exp\lambda_1 t & 0 \\ 0 & \exp\lambda_2 t \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\lambda_1 t & 0 \\ 0 & \exp\lambda_2 t \end{bmatrix}$$

□

(β) Εάν

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

να δειχθεί ότι

$$\exp Jt = \exp\lambda t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Θέτω $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Από το (α) έχουμε

$$\exp At = \begin{bmatrix} \exp \lambda t & 0 \\ 0 & \exp \lambda t \end{bmatrix} = \exp \lambda t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp Bt = I_2 + tB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε

$$\exp Jt = \exp (A+B)\, t = \exp At \exp Bt = \exp \lambda t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \exp \lambda t \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 6.22

Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$$

Λύση. Το σύστημα αυτό μπορεί να πάρει τη μορφή $y' = Ay$ με $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Για την εύρεση των ιδιοτιμών έχουμε τη γνωστή διαδικασία

$$\det (A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)+2\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2+1\right]$$

Ιδιοτιμές του είναι το 1, i, $-i$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} -2z=0 \\ x-y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=y \\ z=0 \end{array}\right.$$

Άρα

$$V(1)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = i$

$$(A-iI_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} 1-i & 0 & -2 \\ 0 & 1-i & 0 \\ 1 & -1 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} (1-i)\,x-2z=0 \\ (1-i)\,y=0 \\ x-y+(-1-i)\,z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ x=(1+i)\,z \end{array}\right.$$

Άρα

$$V(i)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+i)\,z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -i$

$$(A+iI_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} 1+i & 0 & -2 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 1 & -1 & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} (1+i)\,x-2z=0 \\ (1+i)\,y=0 \\ x-y+(-1+i)\,z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ x=(1-i)\,z \end{array}\right.$$

Άρα

$$V(-i)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-i)\,z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}=\left\langle\begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$y(t)=c_1\exp\lambda_1 tV(1)+c_2\exp btV(i)+c_3\exp btV(-i)$$

$$y\left(t\right)=c_1\exp 1t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\exp 0t\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]+c_3\exp 0t\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}c_1\exp t\\c_1\exp t\\0\end{pmatrix}+c_2\cos t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\sin t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\cos t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_1\exp t\\c_1\exp t\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\0\\\cos t\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}\sin t+\cos t\\0\\\sin t\end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 6.37

Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$y'=Ay+b\left(t\right)\ ,\ y\left(0\right)=y_0,$$

όπου

$$A\in\mathbb{R}^{2\times 2}\ ,\ b\left(t\right)=\begin{bmatrix}\exp 2t\\0\end{bmatrix}\ ,\ y_0=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

και ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad ,\quad u_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Να βρεθούν ο πίνακας $\exp At$ και η λύση του Π.Α.Τ.

Λύση. Εφόσον οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα είναι τα δοσμένα η μορφή του $\exp At$ θα είναι η

$$\exp At=X\left(t\right)X^{-1}\left(0\right)$$

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$X\left(t\right)=\left[\exp\lambda_1tu_1\ \vdots\ \exp\lambda_2tu_2\right]=\left[\exp t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ \vdots\ \exp 2t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\exp t&\exp 2t\\\exp t&2\exp 2t\end{pmatrix}$$

$$X\left(0\right)=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

Για την εύρεση του X^{-1} έχουμε

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&2&0&1\end{array}\right)$$

Κάνουμε τις εξής γραμμοπράξεις: $R_2 \longrightarrow R_2 - R_1,\ \ R_1 \longrightarrow R_1 - R_2,$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Άρα

$$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τελικά

$$\exp At = X(t) X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \exp t & \exp 2t \\ \exp t & 2\exp 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\exp t - \exp 2t & -\exp t + \exp 2t \\ 2\exp t - 2\exp 2t & -\exp t + 2\exp 2t \end{pmatrix}$$

Επομένως

$$\exp(At)\, y(0) = \begin{pmatrix} 2\exp t - \exp 2t & -\exp t + \exp 2t \\ 2\exp t - 2\exp 2t & -\exp t + 2\exp 2t \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\exp t - \exp 2t - 2\exp t + 2\exp 2t \\ 2\exp t - 2\exp 2t - 2\exp t + 4\exp 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp 2t \\ 2\exp 2t \end{pmatrix}$$

Εξάλλου

$$\exp(A(t-s))\, b(s) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\exp(t-s) - \exp 2(t-s) & -\exp(t-s) + \exp 2(t-s) \\ 2\exp(t-s) - 2\exp 2(t-s) & -\exp(t-s) + 2\exp 2(t-s) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \exp 2s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(2s)\, 2\exp(t-s) - \exp(2s)\exp 2(t-s) \\ \exp(2s)\, 2\exp(t-s) - 2\exp(2s)\exp 2(t-s) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\exp(s)\exp(t) - \exp(2t) \\ \exp(s)\, 2\exp(t) - 2\exp(2t) \end{pmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\int_0^t \exp(A(t-s))\, b(s)\, ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 2\exp(s)\exp(t) - \exp(2t) \\ \exp(s)\, 2\exp(t) - 2\exp(2t) \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} 2\exp(2t) - 2\exp(t) - t\exp(2t) \\ 2\exp(2t) - 2\exp(t) - 2\exp(2t) \end{pmatrix}$$

Επομένως η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(t) = \exp(At)\, y(0) + \int_0^t \exp(A(t-s))\, b(s)\, ds \Longrightarrow$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \exp 2t \\ 2\exp 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\exp(2t) - 2\exp(t) - t\exp(2t) \\ 2\exp(2t) - 2\exp(t) - 2\exp(2t) \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 6.38

Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' = Ay \quad , \quad y(0) = y_0,$$

με

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Λύση. Για την εύρεση ιδιοτιμών έχουμε

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(2-\lambda) + 9\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) + 9\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 13\right]$$

Ιδιοτιμές του είναι το $1,\ 2+3i,\ 2-3i$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = c \end{cases}$$

Άρα

$$V(1) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2 + 3i$

$$(A - (2+3i) I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2-(2+3i) & 3 & 0 \\ -3 & 2-(2+3i) & 0 \\ 0 & 0 & 1-(2+3i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3i & 3 & 0 \\ -3 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -1+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 3ix+3y=0 \\ -3x+3iy=0 \\ -1z+3iz=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=iy \\ z=0 \end{cases}$$

Άρα

$$V(2+3i) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iy \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Η λύση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $2+3i$ είναι

$$\varphi(t) = \exp((2+3i)t)\, V(2+3i) = (\cos(2t) + i\sin(3t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \left[\cos(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\varphi_1(t) = \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = \cos(2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(3t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Η γενική λύση του συστήματος θα είναι

$$y(t) = c_1 \exp \lambda_1 t V(1) + c_2 \varphi_1(t) + c_3 \varphi_2(t)$$

$$y(t) = c_1 \exp t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left[\cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$+c_3\left[\cos(2t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\sin(3t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$

□

Άσκηση 6.39

Να λυθεί το συστημα $y' = Ay$ στην περίπτωση που

(α)

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

Λύση. Ο A καθώς παρατηρούμε ότι είναι άνω τριγωνικός έχει διπλή ιδιοτιμή το 0. Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 είναι:

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow y=0$$

Ενώ $x = c =$ αυθαίρετο, επομένως

$$U_1=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=<\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}>$$

Χρειαζόμαστε όμως και ένα 2ο ιδιοδιάνυσμα για να σχηματίσουμε τον πίνακα $X(t)$, το οποίο θα προκύψει ως γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα.

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow y=1$$

Οπότε

$$U_2=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=<\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}>$$

Επομένως η λύση είναι

$$y(t)=c_1\exp(\lambda_1 t)U_1+c_2\exp(\lambda_2 t)U_2$$

$$y(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

□

(β)

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&-2\end{bmatrix}$$

Λύση. Για την εύρεση των ιδιοτιμών έχουμε

$$\det(A-\lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = -2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-4 = \lambda^2+\lambda-6$$

Άρα $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2 είναι:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} -x+2y=0 \\ 2x-4y=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 2y$$

Επομένως

$$U_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -3 είναι:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} 4x+2y=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = -2x$$

Επομένως

$$U_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2y \end{pmatrix} = < \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} >$$

Επομένως η λύση είναι

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) U_1 + c_2 \exp(\lambda_2 t) U_2$$

$$y(t) = c_1 \exp(2t)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(-3t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 6.41

Να λυθεί το σύστημα $y' = Ay$, αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Λύση. Για την εύρεση ιδιοτιμών έχουμε

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2+1\right) + (-\lambda-1) + (1-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 - \lambda - 2\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 + 3\right)$$

Ιδιοτιμές του είναι το $0,\ i\sqrt{3},\ -i\sqrt{3}$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \\ x = y \end{cases} \Longrightarrow x = y = z$$

Άρα

$$V(1) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = i\sqrt{3}$

$$\left(A - i\sqrt{3}I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 1 & -1 \\ -1 & -i\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -1 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -i\sqrt{3}x + y - z = 0 \\ -x - i\sqrt{3}y + z = 0 \\ x - y - i\sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -y\left(i\sqrt{3} + 1\right) + z\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 0 \end{cases}$$

Άρα

$$V\left(i\sqrt{3}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{3} \\ -2 \\ 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Η μιγαδική λύση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $i\sqrt{3}$ είναι

$$\varphi(t) = \exp\left(i\sqrt{3}t\right)V\left(i\sqrt{3}\right) = \left(\cos\sqrt{3}t + i\sin\sqrt{3}t\right)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right] + i\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\varphi_1(t) = \cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2\left(t\right) = \cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix} + \sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Η τελική λύση του συστήματος είναι

$$y\left(t\right) = c_1 \exp\left(\lambda_1 t\right) V\left(\lambda_1\right) + c_2\varphi_1\left(t\right) + c_3\varphi_2\left(t\right) \Longrightarrow$$

$$y\left(t\right) = c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} - \sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\right]$$

$$+c_3\left[\cos\sqrt{3}t\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix} + \sin\sqrt{3}t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right]$$

□