ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διαφορικές Εξισώσεις Ι (4/9/2013)

Να απαντήσετε και στα τέσσερα ακόλουθα βαθμολογικά ισοδύναμα θέματα:

Θέμα 1:

(α) Να λυθεί το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών: $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t} + \sin t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

(β) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f(t)$ ώστε η διαφορική εξίσωση: $f(t)y'(t) + t^{n-1} + y(t) = 0$, $(n \in \mathbb{N})$, να επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = t$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

Θέμα 2:

(α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση: $y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$, όπου $p(t)$ και $q(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$. Έστω ότι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης στο διάστημα I. Δείξτε ότι αν $y_1''(\xi) = y_2''(\xi) = 0$, $\xi \in I$, $(p(\xi), q(\xi)) \neq (0, 0)$, τότε οι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες στο I.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $y_1(t) = t^{-1}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης: $2t^2y''(t) + 3ty'(t) - y(t) = 0$ στο διάστημα $I = (0, \infty)$. Χρησιμοποιώντας συνάρτηση της μορφής: $y_2(t) = y_1(t)u(t)$ (η με άλλο τρόπο), να βρεθεί δεύτερη λύση της εξίσωσης, $y_2(t)$, γραμμικά ανεξάρτητη από την $y_1(t)$ στο διάστημα I.

Θέμα 3:

(α) Έστω $\phi(t)$ η λύση του ΠΑΤ: $y''(t) - \alpha y'(t) - 2\alpha^2 y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί σχέση της μορφής $\beta = f(\alpha)$ ώστε $\phi(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$. Εξετάστε την επίδραση στη σύγκλιση της συνάρτηση $\phi(t)$ μιας διαταραχής της αρχικής τιμής $y'(0) = f(\alpha)$ στην τιμή $y'(0) = f(\alpha) + \epsilon$, όπου $|\epsilon| \neq 0$ (αλλά αυθαίρετα μικρό).

(β) (ι) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια και να σχεδιασθεί το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης: $y'(t) = 1 - y^2(t)$. (ιι) Να εξετασθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά $(t \to \infty)$ της λύσης της εξίσωσης, $y(t)$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, αν: $y_0 \in I_1 = (-\infty, -1)$, $y_0 \in I_2 = (-1, 1)$, και $y_0 \in I_3 = (1, \infty)$, αντίστοιχα. (ιιι) Να βρεθεί η αναλυτική λύση του Προβλήματος Αρχικών Τιμών: $y'(t) = 1 - y^2(t)$, $y(0) = y_0$, και να σχεδιαστεί η γραφική της παράσταση (προσεγγιστικά) αν $y_0 \in I_i$, $i = 1, 2, 3$.

Θέμα 4: Να λυθεί το Π.Α.Τ.: $\overrightarrow{y}'(t) = A\overrightarrow{y}(t) + \overrightarrow{b}$, όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Καλή Επιτυχία!

Ονοματεπώνυμο:

Α.Μ.: