Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
Εξεταστική Περίοδος Σεπτεμβρίου 2015 (23/9/15)

Θέμα 1: (α) Έστω $f(t,y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ συνεχείς συναρτήσεις στο ορθογώνιο:

$$S = \{(t,y) : t_0 \leq t \leq t_0 + a, |y - y_0| \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Τότε το θεώρημα Pickard-Lindeloff εγγυάται την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του ΠΑΤ: $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ στο διάστημα $I_\delta = [t_0, t_0 + \delta)$, όπου $\delta = \min(a, b/M)$ και $M = \max\{f(t,y) : (t,y) \in S\}$. Δείξτε ότι αν $f = (1+y)^2$ και $t_0 = y_0 = 1$, τότε το θεώρημα Pickard-Lindeloff εγγυάται την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης στο διάστημα $I = [1, \frac{9}{8})$.

(β) Να λυθεί η εξίσωση: $ty'(t) + 4y(t) = t^3 y^2$.

Θέμα 2: (α) Να βρεθεί με την μέθοδο των δυναμοσειρών η λύση της εξίσωσης: $y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0$ γύρω από το σημείο $t = 0$. (β) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης: $y'(t) = (y-2)\sin y$.

Θέμα 3: (α) Να λυθεί το σύστημα:

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t).$$

(β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(2e^y - 3ty)dt + \left(\frac{3te^y}{y} + te^y - 4t^2\right) dy = 0$$

αφού βρεθεί ολοκληρωτικός παράγων της μορφής $\mu = t^\alpha y^\beta$.

Θέμα 4: (α) Δείξτε ότι $y_1 = t^2$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$t^2 y''(t) - (t^2 + 4t)y'(t) + (2t + 6)y(t) = 0$$

Με χρήση της μεθόδου υποβιβασμού τάξης (δηλ. θέτοντας $y_2(t) = y_1(t)u(t)$) να βρεθεί δεύτερη λύση $y_2(t)$ γραμμικά ανεξάρτητα απο την $y_1(t)$. (β) Να λυθεί το ΠΑΤ: $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t} + t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Θέμα 5: (α) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $|f(t)| \leq b$ για κάθε $t \geq 0$ όπου $b > 0$. Δείξτε (με την μέθοδο μεταβολής παραμέτρων η άλλο τρόπο) ότι μια ειδική λύση της εξίσωσης: $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$, $t \geq 0$, είναι της μορφής:

$$\psi_p(t) = \int_{t_0}^{t} \left(e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}\right) f(\tau) d\tau$$

όπου $t_0 \geq 0$. Επομένως δείξτε ότι $|\psi_p(t)| \leq \frac{5b}{6}$ για κάθε $t \geq 0$. (β) Να λυθεί το σύστημα:

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Να απαντήσετε σε 4 από τα 5 βαθμολογικά ισοδύναμα θέματα. Καλή Επιτυχία!