Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
Εξεταστική Περίοδος Ιανουαρίου 2015 (27/1/15)

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως min(B,10) όπου B ($0 \leq B \leq 12$) το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε και από τα 5 θέματα.

Θέμα 1: Δίνεται η διαφορική εξίσωση: $(1-t)^2 y''(t) - 2y(t) = 0$, $t \in I = (-\infty, 1)$.

(α) Δείξτε ότι $y_1(t) = (1-t)^2$ είναι λύση της εξίσωσης. Με την μέθοδο υποβιβασμού τάξης να βρεθεί δεύτερη λύση, γραμμικά ανεξάρτητη από την $y_1(t)$ στο I, και να λυθεί το αντίστοιχο Π.Α.Τ. με αρχικές τιμές: $y(0) = 1$ και $y'(0) = -2$. **[1 βαθμός]**

(β) Να επαληθεύσετε την λύση του Π.Α.Τ. στο (α) επιλύοντας την εξίσωση με την μέθοδο Δυναμοσειρών (με κέντρο το σημείο $t = 0$). **[1 βαθμός]**

(γ) Διατυπώστε την εξίσωση ως σύστημα πρώτης τάξης: $\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$ όπου $\mathbf{x}(t) = [y(t)\ y'(t)]^T$ και υπολογίστε έναν θεμελιώδη πίνακα λύσεων και τον κύριο πίνακα (πίνακα μεταφοράς) τού συστήματος. Επομένως επαληθεύστε πάλι την λύση του Π.Α.Τ. στο (α). **[1 βαθμός]**

Θέμα 2: Δίνεται η διαφορική εξίσωση: $L(y) := y''(t) - (\rho_1 + \rho_2)y'(t) + \rho_1\rho_2 y(t) = b(t)$, όπου $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 \neq \rho_2$ και $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

(α) Δείξτε ότι $\phi_1(t) = e^{\rho_1 t}$ και $\phi_2(t) = e^{\rho_2 t}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $L(y) = 0$ και ότι η $\phi(t) = u_1(t)\phi_1(t) + u_2(t)\phi_2(t)$ είναι μία (ειδική) λύση της $L(y) = b(t)$, όπου:

$$u_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\phi_2(s)b(s)}{W[\phi_1,\phi_2](s)}ds, \quad u_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\phi_1(s)b(s)}{W[\phi_1,\phi_2](s)}ds$$

και όπου $t, t_0 \in \mathbb{R}$ και $W[\phi_1,\phi_2](t)$ η ορίζουσα Wronski των ϕ_1 και ϕ_2. **[1 βαθμός]**

(β) Δείξτε ότι αν $b(t) = e^{\rho_3 t}$ και $\rho_1 < 0$, $\rho_2 < 0$, $\rho_3 < 0$, τότε $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ γιά κάθε λύση $y(t)$ της εξίσωσης. **[1 βαθμός]**

Θέμα 3: Να βρεθεί η λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ.: $y'(t) + (1/t)y(t) = t\ln(t)y^2(t)$ $(t > 0)$, $y(1) = -1$. Επιπλέον δείξτε ότι: (i) $y(t) < 0$ για κάθε $t > 0$, και (ii) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. **[2 βαθμοί]**

Θέμα 4:

(α) Δίνεται το Π.Α.Τ.: $y'(t) = \beta y(t) - y^2(t) - \alpha$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $4\alpha < \beta^2$. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης, να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας (και οι ιδιότητες τους) και να μελετηθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης σαν συνάρτηση της y_0. **[1 βαθμός]**

(β) Να βρεθούν οι γενικές λύσεις των εξισώσεων: (i) $y'(t) = \frac{t-y+1}{t+y-3}$, (ii) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$, (iii) $t^2 y''(t) - 5ty'(t) + 25y(t) = 0$ $(t > 0)$, (iv) $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ όπου $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$[4 \times 0,5 = 2$ βαθμοί$]$

Θέμα 5: Διατυπώστε το Θεώρημα Picard-Lindelof. Δείξτε ότι η εφαρμογή του θεωρήματος στο Π.Α.Τ.: $y'(t) = 1 + y^2(t)$ $(t \geq 0)$, $y(0) = 0$, εγγυάται την ύπαρξη μοναδικής λύσης σε διάστημα $I_\epsilon = [0, \epsilon)$. Επιλύστε την εξίσωση και ορίστε το μέγιστο διάστημα I_ϵ, στο οποίο ορίζεται (μοναδική) λύση. [2 **βαθμοί**]

Καλή Επιτυχία!