

Θεωρία Ελέγχου: Εισαγωγικά

1. Μαθηματικά μοντέλα δυναμικών συστημάτων

Ως σύστημα ορίζουμε “ένα σύνολο αλληλοσχετιζόμενων και ανεξάρτητων αντικειμένων που σχηματίζουν μία πολύπλοκη ενότητα”. Μία πρόχειρη ταξινόμηση δυναμικών συστημάτων που περιγράφονται από δυναμικά μοντέλα μέσω μαθηματικών εξισώσεων είναι η παρακάτω:

- 1.1 Ντετερμινιστικά, αιτιοκρατικά (Deterministic): Η αρχική συνθήκη και το εξωτερικό ερέθισμα από το περιβάλλον (συνάρτηση εισόδου) καθορίζουν πλήρως τη έξοδο (απόκριση του συστήματος).
- 1.2 Στοχαστικά (Stochastic): Περιγράφονται από στοχαστικές ανελίξεις.
- 2.1 Συνεχούς χρόνου (continuous-time): Περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις.
- 2.2 Διακριτού χρόνου (discrete-time): Περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών.
- 2.3 Υβριδικά (hybrid): Περιγράφονται από μείγμα διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών.
- 3.1 Μη-γραμμικά (non-linear): Περιγράφονται από μη γραμμικές εξισώσεις (διαφορικές η διαφορών)
- 3.2 Γραμμικά (linear): Περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις (διαφορικές η διαφορών)
- 4.1 Χρονικά μεταβαλλόμενα (time-varying): Η μεταβλητή του χρόνου εμφανίζεται στις εξισώσεις ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
- 4.2 Χρονικά αναλλώωτα (time-invariant): Η μεταβλητή του χρόνου δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις ως ανεξάρτητη μεταβλητή.
- 5.1 Άπειρης διάστασης (distributed, infinite-dimensional): Περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις
- 5.2 Πεπερασμένων διαστάσεων (finite-dimensional, lumped): Περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

Τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή δυναμικών συστημάτων ελέγχου είναι δύο ειδών: (α) Μοντέλα εισόδου-εξόδου (input-output) και μοντέλα καταστάσεως χώρου (state-space). Εδώ ως είσοδο σε ένα σύστημα εννοούμε το σύνολο των εξωτερικών ερεθισμάτων που ασκούνται στο σύστημα από το εξωτερικό περιβάλλον και ως έξοδο την αντίστοιχη απόκριση του συστήματος στα ερεθίσματα αυτά. Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται ως δυναμικό όταν έχει μνήμη, δηλ. όταν η απόκριση του συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή δεν εξαρτάται μόνο από την είσοδο εκείνη την συγκεκριμένη χρονική στιγμή αλλά και από την είσοδο του συστήματος σε χρονικές στιγμές του παρελθόντος. (Εφόσον το μοντέλο συνήθως αναπαριστά ένα φυσικό σύστημα, υποθέτουμε ότι είναι αιτιατό, δηλαδή ότι η απόκριση του συστήματος σε μία χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητη από την είσοδο του συστήματος σε όλους τους μελλοντικούς χρόνους). Δυναμικά συστήματα συνεχούς χρόνου μοντελοποιούνται συνήθως μέσω διαφορικών εξισώσεων, ενώ δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου από εξισώσεις διαφορών.

Σε μοντέλα εισόδου-εξόδου το σύστημα περιγράφεται μαθηματικά ως ένας τελεστής που απεικονίζει συναρτήσεις εισόδου $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ σε συναρτήσεις εξόδου $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. Για παράδειγμα, ένα σύστημα εισόδου-εξόδου συνεχούς χρόνου μπορεί να οριστεί από τα σύνολα συναρτήσεων $\mathcal{U} = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ (το σύνολο συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων διάστασης m που ορίζονται στο χρονικό διάστημα $\mathbb{R}$) και $\mathcal{Y} = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$. Στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του συστήματος ορίζεται από το σύνολο που περιέχει όλα τα επιτρεπτά ζεύγη $(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$.

Τα μοντέλα εισόδου-εξόδου είναι πολύπλοκα και δεν παρέχουν καμμία πληροφορία για τον εσωτερικό μηχανισμό του συστήματος που ανανεώνει τις τιμές των εσωτερικών μεταβλητών κατάστασης και τις

μεταβλητές εξόδου με την πάροδο του χρόνου. Και τα δύο αυτά μειονεκτήματα παύουν να ισχύουν σε μοντέλα καταστάσεων χώρου. Το διάνυσμα κατάστασης την χρονική στιγμή t_0 , $\mathbf{x}(t_0)$, συμπυκνώνει όλη την πληροφορία της εξέλιξης του συστήματος σε παρελθόντες χρόνους ($t \leq t_0$) που χρειάζεται (μαζί με την μελλοντική συνάρτηση εισόδου στο διάστημα $[t_0, t]$, $\mathbf{u}_{[t_0, t]} = \{\mathbf{u}(\tau) : t_0 \leq \tau \leq t\}$) για την πρόβλεψη της μελλοντικής κατάστασης του συστήματος, $\mathbf{x}(t)$, $t > t_0$. Επόμενως, η εξέλιξη της εσωτερικής κατάστασης του συστήματος καθορίζεται από μία απεικόνιση της μορφής $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ ο χώρος καταστάσεων, ενώ η έξοδος του συστήματος από μία απεικόνιση της μορφής $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$.

2.1 Συστήματα ελέγχου καταστάσεων χώρου (state control)

Η Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου είναι επέκταση της Θεωρίας των Διαφορικών Εξισώσεων (όπως επίσης των Εξισώσεων Διαφορών και των Δυναμικών Συστημάτων) με εφαρμογές σε σχεδόν όλους τους κλάδους της Μηχανικής, καθώς και των Οικονομικών, της Βιολογίας, της Μαθηματικής Οικολογίας και άλλων πεδίων Φυσικών Επιστημών. Η θεωρία εξετάζει συστήματα διαφορικών εξισώσεων με βαθμούς ελευθερίας ως προς ορισμένες μεταβλητές. Για παράδειγμα, έστω το σύστημα δ.ε. που γράφεται σε διανυσματική μορφή ως:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

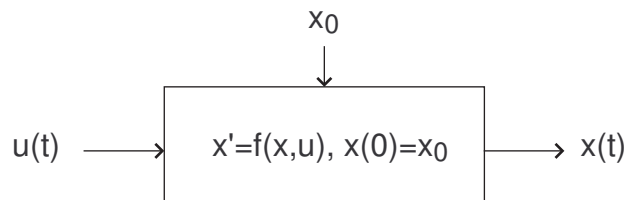
όπου $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ορίζονται, αντίστοιχα, ως το διάνυσμα κατάστασης χώρου και το διάνυσμα εισόδου (ελέγχου). Ισοδύναμα το σύστημα γράφεται στη μορφή των βαθμωτών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad x_1(0) = x_1^0 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ x_2' &= f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad x_2(0) = x_2^0 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad x_n(0) = x_n^0 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{f}^T = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n], \quad \mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \quad \text{και} \quad \mathbf{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m]$$

Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διάνυσμα βαθμωτών συναρτήσεων u_i τις οποίες μπορούμε να επιλέξουμε ελεύθερα (η σχεδόν ελεύθερα κάτω από ορισμένους περιορισμούς). Κάθε διαφορετική επιλογή των συναρτήσεων αυτών δίνει μια διαφορετική λύση στο αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών ως προς τις μεταβλητές κατάστασης $x_1, \dots, x_n$. (Υποθέτουμε ότι όλες οι μεταβλητές ανήκουν σε κατάλληλη κλάση συναρτήσεων που μαζί με τις ιδιότητες των f_i εγγυώνται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του ΠΑΤ σε όλο το διάστημα $[0, \infty)$). Διαγραμματικά:



Το βασικό πρόβλημα της Θεωρίας Ελέγχου (με γενικούς όρους που θα συγκεκριμενοποιηθούν αργότερα) είναι η επιλογή κατάλληλης συνάρτησης εισόδου $\mathbf{u} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ώστε το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}(t)$ που είναι η λύση του ΠΑΤ να έχει επιθυμητές ιδιότητες (ποιοτικές/ποσοτικές). Παρατηρούμε ότι αυτό είναι πρόβλημα σύνθεσης και αφορά την κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων εισόδου ώστε η λύση του συστήματος να ικανοποιεί τους στόχους σχεδίασης.

Παράδειγμα: Έστω ότι ο πληθυσμός ψαριών $x(t)$ σε κάποιο οικοσύστημα (π.χ. λίμνη) την χρονική στιγμή t ικανοποιεί την δ.ε. (παραλλαγή του λογιστικού μοντέλου):

$$x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) - x(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

όπου r, M θετικές σταθερές και $u(t)$ η συνάρτηση συγκομιδής (ένταση αλιείας), η οποία είναι η συνάρτηση ελέγχου του συστήματος. Πώς πρέπει να επιλέξουμε την συνάρτηση u ώστε να έχουμε αρκούντως μεγάλο ρυθμό συγκομιδής (δηλ. μεγάλο $u(t)$) αλλά και βιωσιμότητα του οικοσυστήματος (δηλαδή να μην μειωθεί δραματικά ο πληθυσμός σε κάποιο χρόνο στο μέλλον); Παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα οι δύο στόχοι είναι αντίθετοι και επομένως απαιτείται κάποιος συμβιβασμός μεταξύ τους, κάτι που είναι σύνηθες φαινόμενο σε πολλά πρακτικά προβλήματα ελέγχου (π.χ. ύπαρξη αντικρουόμενων στόχων σχεδίασης ως προς την ευστάθεια και την επίδοση του συστήματος).

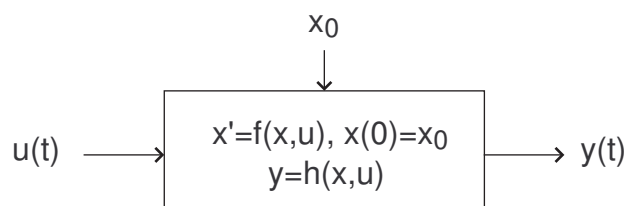
2.2 Συστήματα ελέγχου εξόδου (output control)

Ένα σημαντικό μειονέκτημα του προηγούμενου είδους ελέγχου είναι η απαίτηση ότι όλες οι εσωτερικές μεταβλητές κατάστασης είναι μετρήσιμες. Στην πράξη, η απαίτηση αυτή είναι πολύ ισχυρή, καθώς απαιτεί έναν αισθητήρα για κάθε εσωτερική μεταβλητή (state), και επομένως συνεπάγεται αυξημένη πολυπλοκότητα και κόστος για συστήματα με μεγάλη διάσταση του χώρου κατάστασης. Πολλές φορές, μόνο ένας μικρός αριθμός από τις εσωτερικές μεταβλητές χρειάζεται για τον επιτυχή έλεγχο του συστήματος, ακόμα και αν η διάσταση του χώρου κατάστασης είναι άπειρη, όπως αυτό συμβαίνει, π.χ., σε προβλήματα απόσβεσης μηχανικών ταλαντώσεων που περιγράφονται από συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Σε συστήματα εξόδου, υποθέτουμε ότι το διάνυσμα καταστάσεων του συστήματος δεν είναι απαραίτητα προσβάσιμο και η πληροφορία για τον εσωτερικό μηχανισμό του συστήματος δίνεται έμμεσα από κάποιο διάνυσμα εξόδου της μορφής:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t \geq 0$$

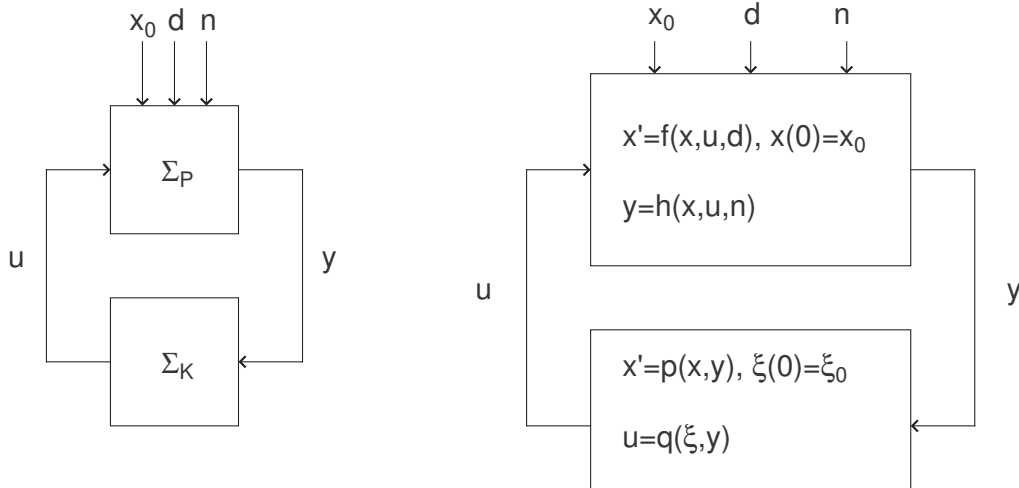
Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα εξόδου $\mathbf{y}(t)$ είναι μετρήσιμο σε πραγματικό χρόνο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει κατάλληλο διάνυσμα εισόδου $\mathbf{u}(t)$ (ελέγχου) έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\mathbf{x}_i(t)$ που προκύπτουν από την επίλυση του ΠΑΤ: $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ και οι αντίστοιχες συναρτήσεις εξόδου $\mathbf{y}_i(t)$ που προκύπτουν από το (αλγεβρικό) σύστημα εξισώσεων $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ να έχουν επιθυμητές ιδιότητες. Διαγραμματικά το σύστημα περιγράφεται ως εξής:



2.3 Συστήματα ανάδρασης εξόδου (output feedback) και δυναμικοί αντισταθμιστές

Για λόγους που συνδέονται κυρίως με την ύπαρξη αβεβαιότητας στο μοντέλο του συστήματος που θέλουμε να ελέγξουμε (plant Σ_P), π.χ. αβεβαιότητα στις παραμέτρους των δ.ε. του Σ_P , συνήθως υλοποιούμε το σύστημα ελέγχου μέσω αντισταθμιστή ανάδρασης εξόδου, δηλ. δεν εφαρμόζουμε την (προ-υπολογισμένη) συνάρτηση ελέγχου $\mathbf{u}(t)$ στην είσοδο του Σ_P , αλλά την δημιουργούμε σε πραγματικό χρόνο από την έξοδο δυναμικού συστήματος που σχεδιάζουμε (αντισταθμιστής Σ_K), η είσοδος του οποίου ($\mathbf{y}$) ταυτίζεται με την έξοδο του του Σ_P . Με τον τρόπο αυτό, πιθανή απόκλιση των μεταβλητών του συστήματος

από την προβλεπόμενη τροχιά τους (που μπορεί να προκύψει, π.χ. λόγω σφαλμάτων των παραμέτρων του μοντέλου, η λόγω εξωτερικών διαταραχών) παρακολουθείται συνεχώς και μπορεί να διορθωθεί από το σύστημα ανάδρασης. Το σύστημα (Σ_P, Σ_K) που προκύπτει από τα δύο επιμέρους συστήματα μέσω συνδεσμολογίας ανάδρασης αναφέρεται συνήθως ως σύστημα κλειστού βρόγχου. Σε αντίθεση, το σύστημα ανοιχτού βρόγχου στο οποίο εφαρμόζουμε προ-υπολογισμένη συνάρτηση στην είσοδο του Σ_P είναι τυφλό σε διαταραχές ή λανθασμένες παραμέτρους, εξ' αιτίας των οποίων το σύστημα μπορεί να αποκλίνει από την πορεία του, όπως αυτή καταγράφεται στις προσομοιώσεις, χωρίς να μπορεί να την διορθώσει.



Στις εξισώσεις του συστήματος προσθέσαμε συνάρτησης διαταραχής (disturbance, $\mathbf{d}(t)$) και συνάρτησης θορύβου (noise, $\mathbf{n}(t)$) που προέρχεται από τους αισθητήρες του Σ_P . Οι διαταραχές αναφέρονται σε μη επιθυμητά σήματα είσοδου που προέρχονται από το εξωτερικό περιβάλλον, π.χ. ριπές ανέμου που επηρεάζουν την κατεύθυνση και την ταχύτητα εναέριου οχήματος, κ.λ.π.

Το γενικό πρόβλημα της Θεωρίας Ελέγχου επομένως είναι ο σχεδιασμός του αντισταθμιστή Σ_K ώστε να επιτυγχάνεται:

- Δυναμική Ευστάθεια του Συστήματος Κλειστού Βρόγχου (Σ_P, Σ_K) .
- Δυναμική Επίδοση του Συστήματος Κλειστού Βρόγχου (Σ_P, Σ_K) που συνήθως ορίζεται από τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ και $\mathbf{u}(t)$ και αφορά στόχους σχεδίασης όπως: η παρακολούθηση (tracking) εξωτερικού σήματος με μικρό σφάλμα, ταχεία απόκριση, ταχεία απόσβεση ταλαντώσεων, μικρός υπερακοντισμός, μικρή ευαισθησία σε εξωτερικές διαταραχές και σήματα θορύβου, κ.λ.π.
- Ευρωστία: Μικρή επίδραση σφαλματος μαθηματικού μοντέλου στις παραπάνω δύο ιδιότητες (εύρωστη ευστάθεια, εύρωστη επίδοση).

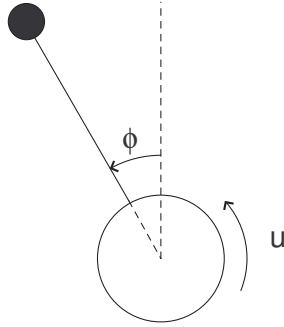
Παράδειγμα: Εξετάζουμε το δυναμικό σύστημα που ορίζεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\phi''(t) - \phi(t) = u(t) + d(t)$$

με αρχικές συνθήκες $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = -1$ (γραμμικοποιημένο σύστημα ανεστραμμένου εκκρεμούς που ελέγχεται με κινητήρα, όπου ϕ η γωνία που σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο, u είναι η συνάρτηση ελέγχου (ροπή που ασκεί ο κινητήρας) και $d(t)$ συνάρτηση διαταραχής).

Ισοδύναμα οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται σε μορφή καταστάσεως χώρου:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) + Bd d(t), \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



και

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι η έξοδος του συστήματος ταυτίζεται με το διάνυσμα κατάστασης, δηλαδή ότι και οι δύο μεταβλητές ϕ και ϕ' είναι μετρήσιμες. Έστω επίσης ότι η διαταραχή $d(t)$ είναι ο παλμός:

$$d(t) = \begin{cases} \epsilon & \text{αν } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Έστω επίσης ότι η συνάρτηση ελέγχου ορίζεται μέσω ανάδρασης καταστάσεων:

$$u(t) = - \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{bmatrix} = -\alpha\phi(t) - \beta\phi'(t) \quad \text{όπου } \alpha = \beta = 3$$

Μπορεί αυτή η συνάρτηση να φέρει το σύστημα ασυμπτωτικά στο σημείο ισορροπίας $\phi' = \phi = 0$ (παρά την διαταραχή $d(t)$);

Αναλύουμε αρχικά το σύστημα με μηδενική διαταραχή. Οι εξίσωση κλειστού βρόγχου είναι:

$$\phi'' - \phi = u = -3\phi - 3\phi' \Rightarrow \phi'' + 3\phi' + 2\phi = 0$$

Η εξίσωση είναι ομογενής με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = -2$$

Άρα η γενική λύση είναι:

$$\phi(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} \Rightarrow \phi'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

Επομένως

$$\phi(0) = A + B = 1 \quad \text{και} \quad \phi'(0) = -A - 2B = -1$$

Προσθέτοντας

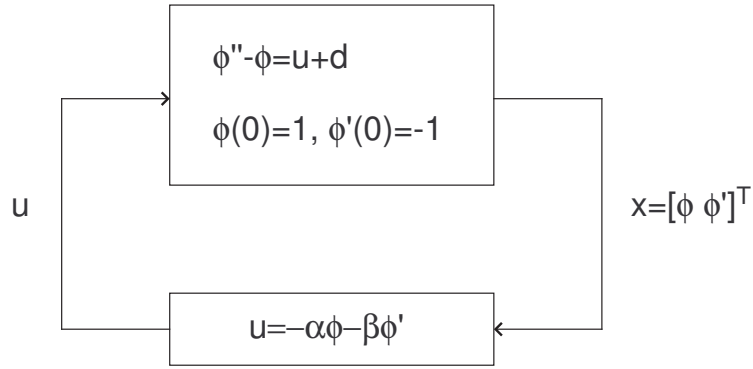
$$-B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = 1$$

Άρα

$$\phi(t) = e^{-t}, \quad \phi'(t) = -e^{-t} \quad \text{και} \quad \text{συνεπώς} \quad u(t) = -3(\phi(t) + \phi'(t)) = 0$$

δηλαδή το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι (ασυμπτωτικά) ευσταθές και $\phi(t) \rightarrow 0$, $\phi'(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

Στην συνέχεια αναλύουμε το σύστημα με διαταραχή:



A. Διάστημα $0 \leq t \leq 1$: Στο διάστημα αυτό $d(t) = 0$ και επομένως $\phi(t) = e^{-t}$, $\phi'(t) = -e^{-t}$ και $u(t) = 0$ όπως προηγούμενως. Στο τέλος του διαστήματος: $\phi(1) = e^{-1}$, $\phi'(1) = -e^{-1}$.

B. Διάστημα $1 \leq t \leq 2$: Στο διάστημα αυτό $d(t) = \epsilon$. Επομένως:

$$\phi'' - \phi = -3\phi - 3\phi' + \epsilon \Rightarrow \phi'' + 3\phi' + 2\phi = \epsilon$$

Γενική λύση ομογενούς εξίσωσης: $\phi_{\text{om}}(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$. Ειδική λύση μη-ομογενούς εξίσωσης: $\phi_{\text{mo}}(t) = \frac{\epsilon}{2}$. Άρα:

$$\phi(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \phi'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

Λόγω συνέχειας οι αρχικές συνθήκες γράφονται:

$$\phi(1) = Ae^{-1} + Be^{-2} + \frac{\epsilon}{2} = e^{-1} \quad \text{και} \quad \phi'(1) = -Ae^{-1} - 2Be^{-2} = -e^{-1}$$

Προσθέτοντας έχουμε: $B = \frac{1}{2}\epsilon e^2$ και άρα $A = 1 - \epsilon e$. Άρα:

$$\phi(t) = (1 - \epsilon e)e^{-t} + \frac{\epsilon}{2}e^2e^{-2t} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \phi'(t) = -(1 - \epsilon e)e^{-t} - \epsilon e^2e^{-2t}$$

Επίσης:

$$u(t) = -3(\phi + \phi') = -3\left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}e^2e^{-2t}\right) = -\frac{3\epsilon}{2}\left(1 - e^{-2(t-1)}\right)$$

Στο τέλος του διαστήματος ($t = 2$):

$$\phi(2) = (1 - \epsilon e)e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \phi'(2) = -(1 - \epsilon e)e^{-2} - \epsilon e^{-2}, \quad u(2) = -\frac{3\epsilon}{2}(1 - e^{-2})$$

Γ. Διάστημα $t \geq 2$: Στο διάστημα αυτό:

$$\phi(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}, \quad \phi'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

Επομένως (λόγω συνέχειας):

$$\phi(2) = Ae^{-2} + Be^{-4} = (1 - \epsilon e)e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \phi'(2) = -Ae^{-2} - 2Be^{-4} = -(1 - \epsilon e)e^{-2} - \epsilon e^{-2}$$

Προσθέτοντας και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$B = -\frac{\epsilon e^2}{2}(e^2 - 1) \quad \text{και} \quad A = \epsilon e^2 - \epsilon e + 1$$

Επομένως:

$$\phi(t) = (\epsilon e^2 - \epsilon e + 1)e^{-t} - \frac{\epsilon}{2}e^2(e^2 - 1)e^{-2t}, \quad \phi'(t) = -(\epsilon e^2 - \epsilon e + 1)e^{-t} + \epsilon e^2(e^2 - 1)e^{-2t}$$

Επίσης

$$u(t) = -3(\phi(t) + \phi'(t)) = -\frac{3\epsilon}{2}e^2(e^2 - 1)e^{-2t} \Rightarrow u(t) = -\frac{3\epsilon}{2}(e^2 - 1)e^{-2(t-1)}$$

και

$$u(t) = -\frac{3\epsilon}{2}(1 - e^{-2})e^{-2(t-2)}, \quad u(2) = -\frac{3\epsilon}{2}(1 - e^{-2})$$

Παρατηρούμε ότι

$$\phi(t) \rightarrow 0, \quad \phi'(t) \rightarrow 0 \text{ και } u(t) \rightarrow 0$$

καθώς $t \rightarrow \infty$ και επομένως το σύστημα τείνει ασυμπτωτικά στο σημείο ισορροπίας $\phi = \phi' = 0$.

Η παραπάνω ανάλυση απλουστεύεται με χρήση μετασχηματισμού Laplace. Η διαφορική εξίσωση γράφεται ως:

$$\phi''(t) + 3\phi'(t) + 2\phi = d(t) \Rightarrow (s^2\hat{\phi}(s) - s\phi(0) - \phi'(0)) + 3(s\hat{\phi}(s) - \phi(0)) + 2\hat{\phi}(s) = \hat{d}(s)$$

Επομένως:

$$(s^2 + 3s + 2)\hat{\phi}(s) = s + 2 + \frac{\epsilon e^{-s}}{s} - \frac{\epsilon e^{-2s}}{s} \Rightarrow \hat{\phi}(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 2)} + \frac{\epsilon(e^{-s} - e^{-2s})}{s(s + 1)(s + 2)}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 2}$$

και επομένως για $t \geq 2$ έχουμε:

$$\phi(t) = e^{-t} + \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right) - \epsilon(e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)}) + \frac{\epsilon}{2}(e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)}) \rightarrow 0$$

καθώς $t \rightarrow \infty$.

Αν εφαρμόσουμε την προ-υπολογισμένη είσοδο $u(t) = 0$ στο Σ_p ταυτόχρονα με την διαταραχή $d(t)$, τότε η έξοδος του Σ_P προκύπτει από την λύση της δ.ε.

$$\phi'' - \phi = 0 + d(t) \Rightarrow (s^2\hat{\phi}(s) - s\phi(0) - \phi'(0)) - \hat{\phi}(s) = \hat{d}(s) \Rightarrow (s^2 - 1)\hat{\phi}(s) - s + 1 = \hat{d}(s)$$

Επομένως:

$$\hat{\phi}(s) = \frac{s - 1}{(s - 1)(s + 1)} + \frac{\epsilon}{s} \left(\frac{e^{-s}}{(s - 1)(s + 1)} - \frac{e^{-2s}}{(s - 1)(s + 1)} \right) = \frac{1}{s + 1} + \frac{\epsilon}{s(s - 1)(s + 1)}(e^{-s} - e^{-2s})$$

Έχουμε:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s + 1} \right) = e^{-t} \text{ και } \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s(s - 1)(s + 1)} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(-\frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 1} \right) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

Επομένως αν $t \geq 2$,

$$\phi(t) = e^{-t} + \frac{\epsilon}{2}e^{t-1} - \frac{\epsilon}{2}e^{t-2} + \frac{\epsilon}{2}e^{-(t-1)} - \frac{\epsilon}{2}e^{-(t-2)} = e^{-t} + \frac{\epsilon}{2}(e^{-1} - e^{-2})e^t + \frac{\epsilon}{2}(e - e^2)e^{-t}$$

και άρα $|\phi(t)| \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

Άσκηση: Να επαναλάβετε την ανάλυση του Παραδείγματος στις σελίδες 4-7 αν η εξίσωση του συστήματος υπό έλεγχο (plant) είναι $\phi'' - \phi = u(t) + d(t)$ με αρχικές συνθήκες $\phi(0) = 1$ και $\phi'(0) = -2$ όπου $u(t)$ η είσοδος και $d(t)$ συνάρτηση διαταραχής. Υποθέτουμε ότι: (α) Η είσοδος $u(t)$ του plant παράγεται από την έξοδο αντισταθμιστή ανάδρασης ως $u(t) = -\phi(t) - 2\phi'(t)$, ότι οι μετρήσεις $\phi(t)$ και $\phi'(t)$ παρέχονται στην είσοδο του αντισταθμιστή από την έξοδο του plant και ότι η συνάρτηση διαταραχής είναι ο παλμός $d(t) = \epsilon$, $1 \leq t \leq 2$ (και $d(t) = 0$ διαφορετικά). (β) Υπολογίστε την συνάρτηση $u(t)$ στο (α) αν $d(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. (γ) Υπολογίστε την συνάρτηση $\phi(t)$ αν εφαρμόσουμε την συνάρτηση $u(t)$ που υπολογίσατε στο (β) στην είσοδο του plant με τον αντισταθμιστή αποσυνδεδεμένο, αλλά υπό την επίδραση της (μη-μηδενικής) διαταραχής που περιγράφεται στο (α).

Άσκηση: Δείξτε ότι αν η διαφορική εξίσωση $\phi''(t) - \phi(t) = 3e^{-2t}$ λυθεί με αρχικές συνθήκες $\phi(0) = 1$ και $\phi'(0) = -2 + \epsilon$ όπου ϵ αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός, τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = +\infty$, ενώ αν $\epsilon < 0$ τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = -\infty$.

2.4 Αξιωματική θεμελίωση συστημάτων καταστάσεων χώρου

Στην παρούσα ενότητα δίνεται ένα σύνολο από ορισμούς αυστηρής θεμελίωσης συστημάτων καταστάσεων χώρου (έτσι ώστε να περιλαμβάνει γενικές κατηγορίες, όπως αυτές των γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων, συστημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου, κλπ).

Η χρονική εξέλιξη του συστήματος ορίζεται μέσω ενός συνόλου $\mathcal{T}$, όπου $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ ή $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$. Χρονικά διαστήματα (ανοικτά, κλειστά ή άπειρα) περιορίζονται στο $\mathcal{T}$, π.χ $[a, b) = \{t \in \mathcal{T} : a \leq t < b\}$. Για κάθε σύνολο $\mathcal{U}$ και διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}$ το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το $\mathcal{I}$ στο $\mathcal{U}$ ορίζεται ως: $\mathcal{U}^{\mathcal{I}} = \{\omega : \omega : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{U}\}$. Αν το διάστημα $\mathcal{I}$ είναι κενό (π.χ. $\mathcal{I} = [\sigma, \sigma)$) γράφουμε συμβατικά $\mathcal{U}^{\mathcal{I}} = \{\diamond\}$. Έστω ότι $\sigma, \tau, \mu \in \mathcal{T}$ τέτοια ώστε $\sigma \leq \tau \leq \mu$. Αν $\omega_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$ και $\omega_2 \in \mathcal{U}^{[\tau, \mu)}$, η διαδοχική τους συνένωση $\omega_1 \omega_2$ είναι η συνάρτηση $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$ που ορίζεται ως:

$$\omega(t) := \begin{cases} \omega_1(t) & \text{αν } t \in [\sigma, \tau) \\ \omega_2(t) & \text{αν } t \in [\tau, \mu) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\omega \diamond = \diamond \omega = \omega$.

Το σύστημα καταστάσεων χώρου ορίζεται ως εξής (στην συνέχεια ο ορισμός θα επεκταθεί για συστήματα με εξόδους):

Ορισμός: Ένα σύστημα καταστάσεων χώρου $\Sigma(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ αποτελείται από:

- Ένα σύνολο χρόνου $\mathcal{T}$.
- Ένα σύνολο $\mathcal{X} \neq \emptyset$ που ονομάζεται χώρος καταστάσεων του Σ .
- Ένα σύνολο $\mathcal{U} \neq \emptyset$ που ονομάζεται σύνολο τιμών ελέγχου (τιμών εισόδου) του Σ .
- Μία απεικόνιση $\phi : \mathcal{D}_\phi \rightarrow \mathcal{X}$ που ονομάζεται συνάρτηση μετάβασης του Σ , με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο $\mathcal{D}_\phi$ του $\{(\tau, \sigma, x, \omega) : \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}\}$

με τις παρακάτω ιδιότητες:

- (Μη-τετριμμένη ιδιότητα): Για κάθε κατάσταση $x \in \mathcal{X}$, υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος (σ, τ) με $\sigma < \tau$ στο $\mathcal{T}$ και κάποιο $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$ τέτοια ώστε το ω είναι επιτρεπτό για την κατάσταση x , δηλαδή $(\tau, \sigma, x, \omega) \in \mathcal{D}_\phi$
- (Ιδιότητα περιορισμού): Αν $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau)}$ είναι επιτρεπτό για την κατάσταση x , τότε για κάθε $\tau \in [\sigma, \mu)$ ο περιορισμός $\omega_1 := \omega|_{[\sigma, \tau)}$ του ω στο διάστημα $[\sigma, \tau)$ είναι επίσης επιτρεπτός για την κατάσταση x και ο περιορισμός $\omega_2 := \omega|_{[\tau, \mu)}$ είναι επιτρεπτός για την κατάσταση $\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1)$.

- (Ιδιότητα ημιομάδας - μεταβατική): Αν $\sigma, \tau, \mu \in \mathcal{T}$ με $\sigma < \tau < \mu$, αν $\omega_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma, \tau]}$ και $\omega_2 \in \mathcal{U}^{[\tau, \mu]}$ και αν το x είναι κατάσταση τέτοια ώστε

$$\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1) = x_1 \text{ και } \phi(\mu, \tau, \sigma, x_1, \omega_2) = x_2$$

τότε $\omega = \omega_1 \omega_2$ είναι επιτρεπτό για την κατάσταση x και $\phi(\mu, \sigma, x, \omega) = x_2$. (Ιδιότητα ταυρότητας»: Για κάθε $\sigma \in \mathcal{T}$ και κάθε $x \in \mathcal{X}$, η κενή εφόδος $\diamond \in \mathcal{U}^{[\sigma, \sigma]}$ είναι επιτρεπτή για την κατάσταση x και $\phi(\sigma, \sigma, x, \diamond) = x$.

Για συστήματα με έξοδο ο ορισμός του συστήματος γενικεύεται ως $\Sigma(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi, \mathcal{Y}, h)$ όπου

- $\mathcal{Y}$ είναι το σύνολο των τιμών μετρήσεων (χώρος τιμών εξόδου) και
- $h : \mathcal{T} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ είναι η συνάρτηση μετρήσεων η εξόδου.

Παρατήρηση: Ερμηνεύουμε την συνάρτηση μετάβασης $\phi(\tau, \sigma, x, \omega)$ ως “η κατάσταση σε χρόνο τ που προκύπτει αρχίζοντας σε χρόνο σ στην κατάσταση x και εφαρμόζοντας την συνάρτηση εισόδου ω ”. Ο ορισμός επιτρέπει μη επιτρεπτες μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων, π.χ. το φαινόμενο έκρηξης της λύσης μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε πεπερασμένο χρόνο,

3.1 Γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα καταστάσεων χώρου

Μη-γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα καταστάσεων χώρου περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

όπου $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ (διάνυσμα κατάστασης), $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ (διάνυσμα εισόδου), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ (διάνυσμα εξόδου) και $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{h} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο αν η μεταβλητή του χρόνου δεν είναι ανεξάρτητη μεταβλητή των συναρτήσεων $\mathbf{f}$ και $\mathbf{h}$, δηλ.

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

Στην περίπτωση αυτή η αρχική κατάσταση ορίζεται χωρίς βλάβη γενικότητας στο σημείο $t_0 = 0$. Σε γραμμικά συστήματα οι συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{h}$ είναι γραμμικές. Γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής:

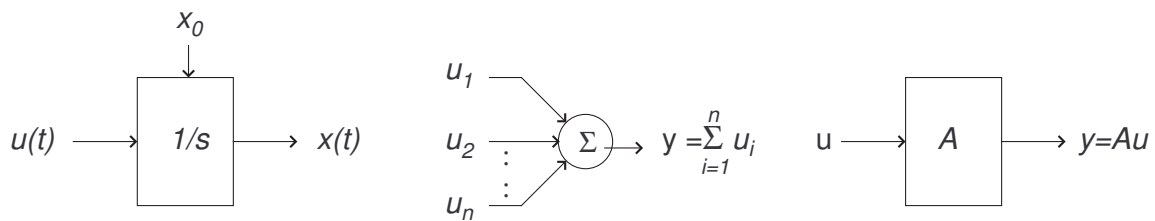
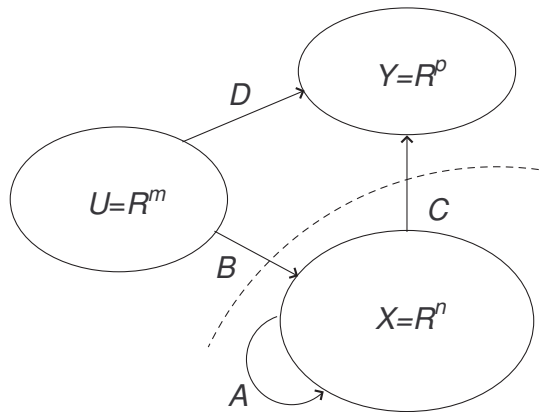
$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t)$$

όπου οι πίνακες $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ και $D(t)$ συνήθως θεωρούνται συνεχείς συναρτήσεις του t . Σε γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα συστήματα έχουμε $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ (σύστημα με n μεταβλητές κατάστασης, m εισόδους και p εξόδους. Διαγραμματικά:

3.2 Διαγράμματα βαθμίδων

Τα διαγράμματα βαθμίδων χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της συνδεσμολογίας συστημάτων και (σε προηγούμενα χρόνια) τη προσομοίωση τους μέσω αναλογικού υπολογιστή. Για γραμμικά συστήματα τα τρία βασικά στοιχεία διαγράμματος βαθμίδων είναι: (α) Ολοκληρωτής, (β) Αθροιστής και (γ) Πολλαπλασιαστής.

- Ολοκληρωτής: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{u}(\tau) d\tau$ όπου $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Αν $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, τότε $\hat{\mathbf{x}}(s) = \frac{\hat{\mathbf{u}}(s)}{s}$.
- Αθροιστής: Η έξοδος είναι $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i$, όπου $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots, m$.
- Πολλαπλασιαστής: Αν η είσοδος είναι $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ και $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ η έξοδος είναι $\mathbf{y} = A\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$.



Το διάγραμμα βαθμίδων του γενικού γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος καταστάσεων χώρου είναι ως εξής:

3.3 Στοιχεία μοντελοποίησης

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε το πρόβλημα κατασκευής μοντέλου καταστάσεων χώρου που αντιστοιχεί σε φυσικά συστήματα (μηχανικά, ηλεκτρικά, κλπ).

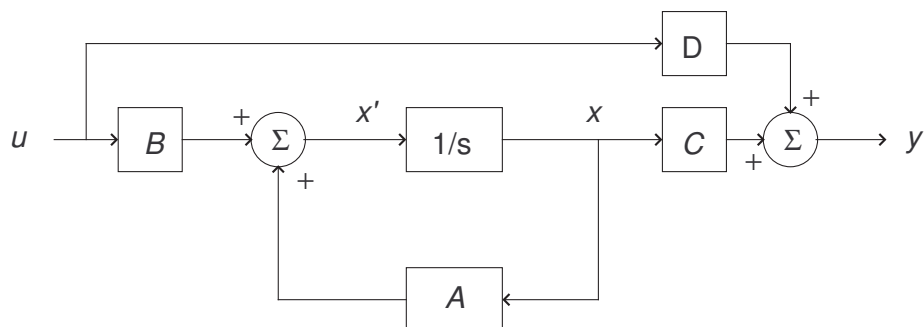
Παράδειγμα: Κύκλωμα RC:

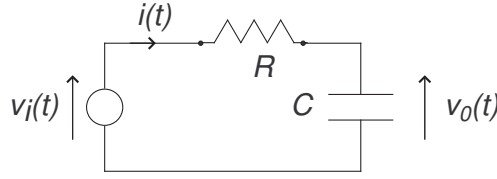
όπου: $i(t)$ ηλεκτρικό ρεύμα, $v_i(t)$ τάση εισόδου και $v_o(t)$ τάση εξόδου. Από τον νόμο Kirchoff έχουμε:

$$i(t) = \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R} = C \frac{dv_o}{dt} \Rightarrow \frac{dv_o(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}v_o(t) + \frac{1}{RC}v_i(t)$$

Ορίζοντας: $x(t) = y(t) = v_o(t)$ και $u(t) = v_i(t)$ έχουμε:

$$x'(t) = -\frac{1}{RC}x(t) + \frac{1}{RC}u(t), \quad y(t) = x(t)$$





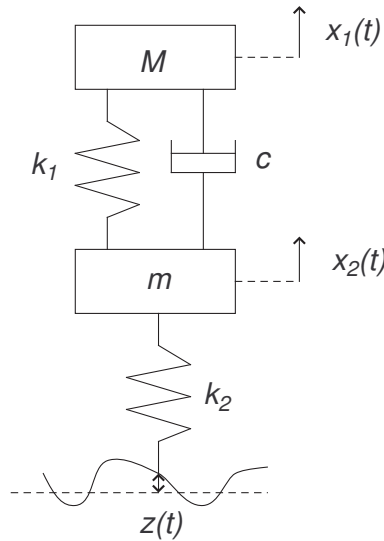
και άρα $A = -\frac{1}{RC}$, $B = \frac{1}{RC}$, $C = 1$ και $D = 0$.

Παράδειγμα: Μηχανικό σύστημα ανάρτησης (1/4 αυτοκινήτου)

Εδώ M μάζα 1/4 οχήματος, m μάζα συστήματος τροχού, k_1 και k_2 σταθερές Hook ελατηρίων, c συντελεστής απόσβεσης. Επίσης: x_1 και x_2 μετατόπιση μάζας M και m , αντίστοιχα, από θέσεις ισορροπίας. z η διαταραχή δρόμου. Δυναμικές εξισώσεις:

$$Mx_1'' = -k_1(x_1 - x_2) - c(x_1' - x_2'), \quad mx_2'' = k_1(x_1 - x_2) + c(x_1' - x_2') - k_2(x_2 - z)$$

Ορίζοντας διάνυσμα κατάστασης: $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_1' \ x_2 \ x_2']$ και εσοόδου διαταραχής $u = z$:



$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_1''(t) \\ x_2'(t) \\ x_2''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{c}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m} & \frac{c}{m} & -\frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ x_2(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m} \end{bmatrix} z$$

που είναι της μορφής $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d z(t)$. Οι πίνακες εξόδου εξαρτώνται από ποιούς αισθητήρες έχουμε. Έστω ότι μετράμε: (α) Σχετική μετατόπιση $x_1 - x_2$ και (β) επιτάχυνση μάζας m_1 . Τότε:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{c}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ x_2(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} z$$

που είναι της μορφής $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}z$.

4.1 Μεταχηματισμός Laplace:

Ορισμός: Έστω $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης y ορίζεται από το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st} dt$$

αν αυτό συγκλίνει για κάποιο $s \in \mathbb{C}$. Αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $s \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, τότε το Ω είναι περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού. (Ισοδύναμοι συμβολισμοί για τον μετασχηματισμό $\hat{y}(s)$ είναι $Y(s)$ και $\mathcal{L}(y(t))$.)

Παράδειγμα: Έστω $y(t) = 1$, $t \geq 0$ (συνάρτηση μοναδιαίου βήματος). Τότε:

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{s} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{s} = \frac{1}{s}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Omega = \{s : \operatorname{Re}(s) > 0\}$.

Παράδειγμα: Έστω $y(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ (εκθετική συνάρτηση). Τότε:

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{s-a} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} = \frac{1}{s-a}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Omega = \{s : \operatorname{Re}(s) > a\}$.

Ένας πίνακας μετασχηματισμού Laplace συνηθισμένων συναρτήσεων είναι ο παρακάτω:

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
1	$1/s$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
t	$1/s^2$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
t^2	$2/s^3$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{(n-1)!}{(s+a)^n}$

Ορισμός: Μία συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ αν και μόνο αν υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές M , c και T τέτοιες ώστε $|f(t)| \leq Me^{ct}$ για κάθε $t \geq T$. Η σταθερά c ονομάζεται εκθέτης φραγής.

Το επόμενο Θεώρημα δίνει μία ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace:

Θεώρημα: Εάν η συνάρτηση $f(t)$, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s)$ υπάρχει. Ειδικότερα, αν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ με εκθέτη φραγής c , τότε η $\hat{f}(s)$ υπάρχει για κάθε $s \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re}(s) > c$.

Μερικές χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace δίνονται στην συνέχεια αυτής της ενότητας (χωρίς αποδείξεις):

Θεώρημα: Ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός τελεστής, δηλ. $\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$ και $\mathcal{L}(cf) = c\mathcal{L}(f)$, $c \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ (και άρα οι συναρτήσεις $\hat{f}(s)$ και $\hat{g}(s)$ υπάρχουν). Αν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\hat{f}(s) = \hat{g}(s)$

για κάθε s σε περιοχή $\operatorname{Re}(s) > c$, τότε $f(t) = g(t)$ σε όλα τα υποδιαστήματα του $[0, \infty)$ στα οποία οι f και g είναι συνεχείς.

Παρατήρηση: Από το παραπάνω Θεώρημα, δύο τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις f και g με $\hat{f} = \hat{g}$ μπορεί να διαφέρουν μόνο στα σημεία ασυνέχειας. Επομένως στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$, ο μετασχηματισμός Laplace είναι 1-1 και ο αντίστροφος μετασχηματισμός υπάρχει (και είναι επίσης γραμμικός τελεστής).

Θεώρημα (μετασχηματισμός Laplace παραγώγου): Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $f'(t)$ είναι συνεχής και τμηματικά συνεχής, αντίστοιχα, στο διάστημα $[0, T]$ για όλα τα $T > 0$. Έστω ακόμα ότι η f είναι εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$. Τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f'(t)$ και δίνεται από την σχέση: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$.

Παρατήρηση: Αν οι υποθέσεις του παραπάνω Θεωρήματος ισχύουν για την συνάρτηση $g(t) = f'(t)$, τότε με διπλή εφαρμογή του Θεωρήματος έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

και γενικά, κάτω από αντίστοιχη υπόθεση:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Η μέθοδος μετασχηματισμού των παραγώγων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων μετατρέποντας την διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική, επιλύοντας την αλγεβρική εξίσωση ως προς $\mathcal{L}\{f(t)\}$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό.

Παράδειγμα: Έστω το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών: $y'' + 3y' + 2y = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Λόγω γραμμικότητας και εφόσον η (μοναδική) λύση είναι εκθετικής τάξης και κλάσης C^∞ ,

$$(s^2\hat{y}(s) - s) + 3(s\hat{y}(s) - 1) + 2\hat{y}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow (s^2 + 3s + 2)\hat{y} = \frac{1}{s} + s + 3 \Rightarrow (s+1)(s+2)\hat{y} = \frac{1}{s} + s + 3$$

Ισοδύναμα,

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$\hat{y}(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1/2}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1/2}{s+2}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό,

$$y(t) = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

για $t \geq 0$.

Θεώρημα (μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος): Αν $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση για $t \geq 0$ και εκθετικής τάξης, δηλ. $|f(t)| \leq Me^{ct}$, για $t \geq T$, τότε

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}, \quad \text{για } \operatorname{Re}(s) > c,$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, η ισοδύναμα

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Θεώρημα (μετατόπισης): Αν για μία συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace: $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για $\operatorname{Re}(s) > c$, τότε ο $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ υπάρχει για $\operatorname{Re}(s) > a + c$ και $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$.

Θεώρημα: Αν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, τότε $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$.

Θεώρημα: Έστω ότι $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ και $\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Τότε $\hat{f}(s) \rightarrow 0$ καθώς $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$.

Ορισμός (συνέλιξη συναρτήσεων): Η συνέλιξη δύο τμηματικά συνεχών συναρτήσεων $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως: $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$.

Παρατήρηση: Η συνέλιξη είναι μεταθετική, δηλ. $f * g = g * f$.

Θεώρημα: Αν οι συναρτήσεις $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε η συνέλιξη $f * g$ είναι εκθετικής τάξης και $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$.

Θεώρημα (αρχικής τιμής): Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s)$ υπάρχει. Αν η f είναι φραγμένη στο διάστημα $(0, \infty)$ και το όριο $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ υπάρχει, τότε $\lim_{s \rightarrow \infty} s\hat{f}(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.

Θεώρημα (τελικής τιμής): Έστω ότι $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και ότι η $\hat{f}(s)$ υπάρχει. Έστω ότι κάθε πόλος της $\hat{f}(s)$ είναι στο $\mathbb{C}_- = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) < 0\}$ η στο σημείο $s = 0$ και ότι αν η $\hat{f}(s)$ έχει πόλο στο σημείο $s = 0$, τότε ο πόλος αυτός είναι απλός. Τότε $s\hat{f}(s) \rightarrow L \in \mathbb{R}$ καθώς $s \rightarrow 0$ και $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = L$.

Θεώρημα: Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ με μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(s)$, $\operatorname{Re}(s) \geq c$. Τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}$ δίνεται ως:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} \hat{f}(s) ds$$

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στην ευθεία $\operatorname{Re}(s) = \gamma$ του μιγαδικού επιπέδου, όπου το γ είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό μέρος κάθε ιδιάζοντος σημείου της $\hat{f}(s)$ και όπου η $\hat{f}$ είναι φραγμένη πάνω στην ευθεία (π.χ. η ευθεία ανήκει στην περιοχή σύγκλισης).

Η προηγούμενη μέθοδος υπολογισμού βασίζεται στο Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy. Για ρητές συναρτήσεις ο υπολογισμός μέσω απλών κλασμάτων είναι απλούστερος.

Παρατήρηση: Στην συνέχεια θα εξετάσουμε συναρτήσεις $f(t)$ (συναρτήσεις Bohl) ο μετασχηματισμός Laplace των οποίων $\hat{f}(s)$ ορίζει ρητές και κανονικές συναρτήσεις. (Μία συνάρτηση $\hat{f}(s)$ είναι ρητή αν είναι το πηλίκο δύο πολυωνύμων $p(s)$ και $q(s)$, δηλ. αν $\hat{f}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$. Στη περίπτωση αυτή η συνάρτηση λέγεται κανονική αν $\partial p(s) \leq \partial q(s)$, δηλ. αν ο βαθμός του πολυωνύμου $p(s)$ δεν υπερβαίνει το βαθμό του $q(s)$ - και αυστηρά κανονική αν $\partial p(s) < \partial q(s)$. Η κλάση αυτή συναρτήσεων μπορεί να περιγράψει την συμπεριφορά όλων των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων δυναμικών συστημάτων.

Έστω $\hat{f}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ ρητή και κανονική συνάρτηση, όπου p και q είναι πρώτα μεταξύ τους. Τότε, ένας μιγαδικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$ λέγεται πόλος της $\hat{f}(s)$ αν $\lim_{s \rightarrow \lambda} \hat{f}(s) = \infty$. Λέμε επίσης ότι ο $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι πόλος τάξης m της $\hat{f}$ αν είναι πόλος της $\hat{f}$ και ο m είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε ο λ δεν είναι πόλος της $(s - \lambda)^m \hat{f}(s)$.

Ορισμός (Συναρτήσεις Bohl): Συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γραμμικός συνδιασμός συναρτήσεων της μορφής: $t^k e^{\lambda t}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, ονομάζεται συνάρτηση Bohl. Οι αριθμοί λ που εμφανίζονται στον γραμμικό συνδιασμό (δεν απαλείφονται) λέγονται χαρακτηριστικοί εκθέτες της συνάρτησης. Το σύνολο των χαρακτηριστικών εκθετών συνάρτησης Bohl $p(t)$ ονομάζεται το φάσμα της συνάρτησης και συμβολίζεται ως $\sigma(p)$.

Θεώρημα: Αν p και q συναρτήσεις Bohl, τότε $p + q$, pq και p' είναι επίσης συναρτήσεις Bohl. Επίσης: $\sigma(pq) \subseteq \sigma(p) + \sigma(q)$, $\sigma(p+q) \subseteq \sigma(p) \cup \sigma(q)$ και $\sigma(p') \subseteq \sigma(p)$. Επιπλέον, $r(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau$ είναι συνάρτηση Bohl και $\sigma(r) \subseteq \sigma(p) \cup \{0\}$.

Παρατήρηση: Κάθε συνάρτηση Bohl είναι κλάσης C^∞ και εκθετικής τάξης. Άρα οι υποθέσεις των Θεωρημάτων της ενότητας αυτομάτως ικανοποιούνται.

Παράδειγμα: Έστω $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u(t) = e^{at}$. Από προηγούμενο Θεώρημα:

$$u'(t) = au(t) \Rightarrow s\hat{u}(s) - u(0) = a\hat{u}(s) \Rightarrow \hat{u}(s) = \frac{1}{s-a}$$

Γενικότερα, αν $u_k(t) := t^k e^{at}$, $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, τότε

$$u'_k(t) = kt^{k-1}e^{at} + at^k e^{at} \Rightarrow u'_k(t) = ku_{k-1}(t) + au_k(t)$$

και επομένως

$$s\hat{u}_k(s) = k\hat{u}_{k-1}(s) + a\hat{u}_k(s) \Rightarrow \hat{u}_k(s) = \frac{k}{s-a}\hat{u}_{k-1}(s)$$

Επαγωγικά, $\hat{u}_k(s) = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}$.

Θεώρημα: Μιά συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ είναι συνάρτηση Bohl αν και μόνο αν η $\hat{u}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση, δηλ. πηλίκο δύο πολυωνύμων.

Απόδειξη: Από το προηγούμενο παράδειγμα $\mathcal{L}\{t^k e^{at}\} = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}}$ που είναι ρητή συνάρτηση. Επομένως, λόγω γραμμικότητας, κάθε συνάρτηση Bohl έχει ρητό μετασχηματισμό Laplace. Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι εκθετικής τάξης καθώς $t \rightarrow \infty$ και ότι η $\hat{f}(s)$ είναι ρητή συνάρτηση. Τότε, από προηγούμενη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace: $\hat{f}(s) \rightarrow 0$ καθώς $\text{Re}(s) \rightarrow \infty$, δηλαδή ο βαθμός του πολυωνύμου στον αριθμητή της $\hat{f}(s)$ είναι αυστηρά μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου στον παρονομαστή της $\hat{f}(s)$. Συνεπώς η $\hat{f}(s)$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός κλασμάτων της μορφής $c(s-a)^{-k}$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Κάθε όρος αυτού του αθροίσματος είναι συνάρτηση Bohl (της μορφής $ct^{k-1}e^{at}/(k-1)!$) και επομένως το ίδιο ισχύει για τον γραμμικό συνδιασμό τους. $\square$

Στην συνέχεια εξετάζουμε την εκθετική συνάρτηση e^{At} όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Η συνάρτηση προκύπτει από τη λύση $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ του αυτόνομου γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Από την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace και την ιδιότητα της παραγώγου προκύπτει ότι (εφόσον $e^{At} \in C^\infty$): $s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = A\hat{\mathbf{x}}(s)$, και επομένως $\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{x}_0$, $\text{Re}(s) > \max\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Θεώρημα: Τα στοιχεία της συνάρτησης e^{At} , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, είναι συναρτήσεις Bohl.

Απόδειξη: Από την επόμενη ενότητα προκύπτει ότι:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}, \quad \text{Re}(s) > \max\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Επομένως,

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \frac{\text{adj}(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)} := \frac{N(s)}{\det(sI - A)}, \quad \text{Re}(s) > \max\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

και

$$\mathcal{L}\{(e^{At})_{ij}\} = \frac{N_{ij}(s)}{\det(sI - A)} = \frac{N_{ij}(s)}{\phi(s)}, \quad \text{Re}(s) > \max\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

όπου $\phi(s)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A . Έχουμε $\partial N_{ij}(s) < \partial \phi(s) = n$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, και από το προηγούμενο Θεώρημα κάθε στοιχείο της e^{At} είναι συνάρτηση

Bohl. Εφόσον το πολυώνυμο $\phi(s)$ εμφανίζεται στον παρονομαστή κάθε στοιχείου του $(sI_n - A)^{-1}$, οι χαρακτηριστικοί εκθέτες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A . $\square$

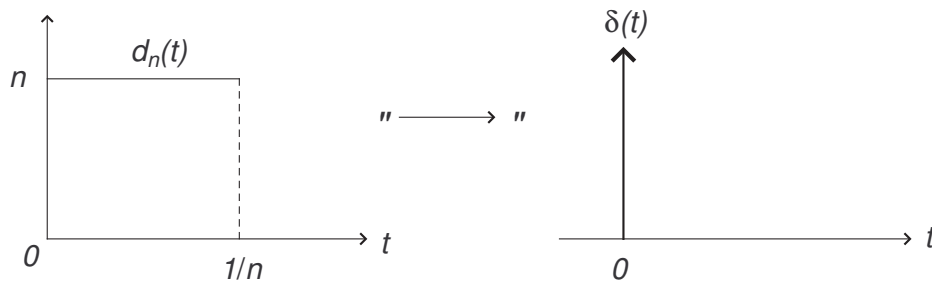
Στη συνέχεια θα ορίσουμε την (γενικευμένη) συνάρτηση κρούσης $\delta(t)$ και τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$.

Ορισμός (Ακολουθία Dirac): Μία ακολουθία συναρτήσεων (d_n) , $d_n : \text{PC}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (τμηματικά συνεχών συναρτήσεων από το $[0, \infty)$ στο $\mathbb{R}$), τέτοια ώστε:

- (i) $d_n(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Υπάρχει ακολουθία (τ_n) , $\tau_n > 0$ και $\tau_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.
- (iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $d_n(t) = 0$ αν $t > \tau_n$ και $\int_0^\infty d_n(\tau) d\tau = 1$

Ένα παράδειγμα ακολουθίας Dirac είναι η εξής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$d_n(t) = \begin{cases} n & \text{αν } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & t > \frac{1}{n} \end{cases}$$



Η ακολουθία $d_n(t)$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες του ορισμού. Επίσης:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty d_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n} = 1$$

Συμβολικά γράφουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty d_n(t) dt = 1 \quad " = " \quad \int_0^\infty " \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(t) " dt = \int_0^\infty \delta(t) dt$$

Η έκφραση αυτή έχει αυστηρά συμβολικό χαρακτήρα. Η εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος δεν έχει νόημα καθώς το όριο " $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(t)$ " δεν ορίζει συνάρτηση. Η $\delta(t)$ ορίζεται ως γενικευμένη συνάρτηση (κατανομή).

Αν $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t) d_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n f(t) dt$$

Από το Θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, υπάρχει $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \int_0^{\frac{1}{n}} n dt = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(0)$$

εφόσον η f είναι συνεχής και $t_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Συμβολικά πάλι γράφουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(t) d_n(t) dt = \int_0^\infty f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

Παρόμοια για $a \in \mathbb{R}_+$ συμβολικά γράφουμε: $\int_0^\infty f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$.

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $\delta(t)$. Έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} d_n(t) dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

και συμβολικά γράφουμε $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ με περιοχή σύγκλισης όλο το $\mathbb{C}$.

5.1. Απόκριση γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων καταστάσεων χώρου

Έστω το αυτόνομο σύστημα $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Είναι γνωστό (Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις) ότι η λύση του συστήματος είναι μοναδική σε όλο το $\mathbb{R}$ και δίνεται από την εξίσωση $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$. (Επαλήθευση: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης e^{At} έχουμε: $\mathbf{x}' = Ae^{At}\mathbf{x}_0 = A(e^{At}\mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}(t)$ και επομένως $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ είναι λύση του διαφορικού συστήματος. Επιπλέον, αφού $e^{At}\mathbf{x}_0|_{t=0} = e^{A0}\mathbf{x}_0 = I_n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$, η λύση αυτή ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη και άρα είναι (η μοναδική) λύση του Π.Α.Τ.)

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace:

$$s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}_0 = A\hat{\mathbf{x}}(s) \Rightarrow (sI_n - A)\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0$$

και άρα

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0, \quad \text{Re}(s) > \max\{\text{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

Επομένως,

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathcal{L}\{e^{At}\}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}$$

εφόσον το $\mathbf{x}_0$ είναι αυθαίρετο διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Από αποτέλεσμα της προηγούμενης ενότητας, τα στοιχεία του πίνακα $e^{At} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συναρτήσεις Bohl (και τα στοιχεία του $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI_n - A)^{-1}$ ρητές, αυστηρά κανονικές συναρτήσεις).

Στη συνέχεια εξετάζουμε το συνολικό σύστημα καταστάσεων χώρου (με είσοδο και έξοδο):

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Η λύση του συστήματος προκύπτει με την μέθοδο “μεταβολής σταθερών”:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \Rightarrow e^{-At}\mathbf{x}'(t) - e^{-At}A\mathbf{x}(t) = e^{-At}B\mathbf{u}(t) \Rightarrow (e^{-At}\mathbf{x}(t))' = e^{-At}B\mathbf{u}(t)$$

Ολοκληρώνοντας:

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) = e^{-At}\mathbf{x}(t) \Big|_{t=0} + \int_0^t e^{-A\tau} B\mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

και επομένως:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau = e^{At}\mathbf{x}_0 + e^{At}B * \mathbf{u}(t)$$

όπου “ $*$ ” συμβολίζει την συνέλιξη συναρτήσεων. Επίσης

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau + D\mathbf{u}(t)$$

Ισοδύναμα

$$\mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + Ce^{At}B * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

5.2 Συνάρτηση μεταφοράς

Εξετάζουμε το σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 = A\hat{\mathbf{x}}(s) + B\hat{\mathbf{u}}(s) \Rightarrow (sI_n - A)\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + B\hat{\mathbf{u}}(s)$$

και επομένως

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0 + (sI_n - A)^{-1}B\hat{\mathbf{u}}(s), \operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$$

και

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = C(sI_n - A)^{-1}\mathbf{x}_0 + (C(sI_n - A)^{-1}B + D)\hat{\mathbf{u}}(s)$$

Έστω $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Τότε

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s), \quad \hat{G}(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D$$

όπου $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι χρήσιμη στην Θεωρία γραμμικών συστημάτων και γραμμικού ελέγχου για δύο κυρίως λόγους: (i) Μετατρέπει το πρόβλημα σχεδίασης αντισταθμιστή ανάδρασης σε αλγεβρικό πρόβλημα, και (ii) επιτρέπει την ανάλυση του προβλήματος στο πεδίο των συχνοτήτων.

Γράφουμε:

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI_n - A)}{\det(sI_n - A)} = \frac{\operatorname{adj}(sI_n - A)}{\phi(s)}$$

όπου $\phi(s)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A . Επομένως:

$$\hat{G}(s) = \frac{C\operatorname{adj}(sI_n - A)B}{\phi(s)} + D = \frac{C\operatorname{adj}(sI_n - A)B + \phi(s)D}{\phi(s)} := \frac{N(s)}{\phi(s)}$$

όπου $N(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$. Έχουμε: $\partial\phi(s) = n$ και $\partial[\operatorname{adj}(sI_n - A)]_{ij} \leq n - 1$, $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$. Επομένως:

$$D_{ij} \neq 0 \Rightarrow \partial N_{ij}(s) = n = \partial\phi(s), \quad D_{ij} = 0 \Rightarrow \partial N_{ij}(s) \leq n - 1 < \partial\phi(s) = n$$

Αν για κάθε ζεύγος $(i, j) \in \{1, 2, \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, m\}$, έχουμε $D_{ij} = 0$, τότε $\partial N_{ij}(s) < \partial\phi(s) = n$ για κάθε (i, j) και η συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s)$ λεγεται αυστηρά κανονική. Αν για ένα τουλάχιστον ζεύγος $(i, j) \in \{1, 2, \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ έχουμε $D_{ij} \neq 0$, τότε για αυτό το ζεύγος έχουμε $\partial N_{ij}(s) = \partial\phi(s) = n$ και η συνάρτηση μεταφοράς λεγεται (απλά) κανονική

Παράδειγμα: Έστω σύστημα $\Sigma(A, B, C, 0)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$\phi(s) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{2} & s + \frac{3}{2} \end{bmatrix} = s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2} = (s + 1)(s + \frac{1}{2}) \quad \text{και} \quad \operatorname{adj}(sI_2 - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{1/2}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{1}{(s+1)(2s+1)}$$

Παρατηρούμε ότι οι πόλοι του συστήματος $\{-1, -\frac{1}{2}\}$ ταυτίζονται με το $\sigma(A)$ (στην γενική περίπτωση $\{\text{πόλοι του } \hat{G}(s)\} \subseteq \sigma(A)$).

5.3 Κρουστική απόκριση: Εξετάζουμε πάλι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Από προηγούμενη ανάλυση η λύση του συστήματος είναι:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{At}\mathbf{x}_0 + (e^{At}B) * \mathbf{u}(t)$$

και

$$\mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + (Ce^{At}B) * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

Έστω ότι $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Τότε:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^{(1)}(t) + \mathbf{y}^{(2)}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau = (Ce^{At}B) * \mathbf{u}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t) = D\mathbf{u}(t)$$

Εξετάζουμε πρώτα την συνάρτηση $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ που είναι η συνάρτηση εξόδου του συστήματος όταν $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ και $D = 0$. Έστω $G(t) = Ce^{At}B$. Τότε:

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \int_0^t G(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Έστω ότι $\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}_l\delta(t)$ όπου $\mathbf{e}_l$ η l -στήλη του μοναδιαίου πίνακα I_m (δηλ. $\mathbf{e}_l = (I_m)_l$). Τότε:

$$\hat{\mathbf{y}}^{(1)}(s) = \mathcal{L}\{[G(t)]\} \cdot \mathcal{L}\{\mathbf{e}_l\delta(t)\} = C(sI - A)^{-1}B\mathbf{e}_l, l = 1, 2, \dots, m$$

Επομένως η k -συνιστώσα της $\mathbf{y}^{(1)}(t)$ είναι:

$$y_k^{(1)}(t) = [G(t)]_{kl} := g_{kl}(t) = \mathbf{C}_k^T e^{At} \mathbf{B}_l(t), \quad k \in \{1, 2, \dots, p\}, l \in \{1, 2, \dots, m\}$$

όπου $\mathbf{C}_k^T$ η k -γραμμή του πίνακα C και $\mathbf{B}_l$ η l -στήλη του πίνακα B .

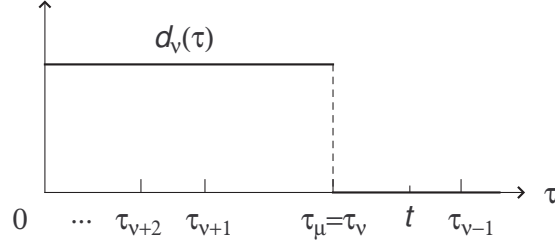
Με την επιλογή $\mathbf{u}(t) = \mathbf{e}_l\delta(t)$ έχουμε $\mathbf{y}^{(2)}(t) = D\mathbf{e}_l\delta(t) = \mathbf{D}_l\delta(t)$ όπου $\mathbf{D}_l$ η l -στήλη του πίνακα D και επομένως $y_k^{(2)}(t) = D_{lk}\delta(t)$.

Συνεπώς, η k συνάρτηση εξόδου όταν εφαρμόζουμε κρουστική συνάρτηση εισόδου $\delta(t)$ στην l -είσοδο (και με $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$) είναι

$$y_k^{(1)}(t) + y_k^{(2)}(t) = \mathbf{C}_k^T e^{At} \mathbf{B}_l(t) + D_{lk}\delta(t), \quad t \geq 0, k \in \{1, 2, \dots, p\}, l \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Η συνάρτηση $Ce^{At}B + D\delta(t)$, $t \geq 0$, είναι ο πίνακας κρουστικής απόκρισης του συστήματος (με $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$).

Παρατήρηση: Επισημαίνεται ότι οι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται η συνάρτηση $\delta(t)$ ερμηνεύονται συμβολικά (δείτε προηγούμενη ενότητα μετασχηματισμού Laplace). Μία αυστηρή διατύπωση της κρουστικής απόκρισης γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων καταστάσεων χώρου δίνεται στο παρακάτω Θεώρημα.



Θεώρημα: Έστω (d_ν) ακολουθία συναρτήσεων Dirac (π.χ. $d_\nu(t) = \nu$ για $t \in [0, \frac{1}{\nu}]$ και $d_\nu(t) = 0$ για $t > \frac{1}{\nu}$). Ορίζουμε: $\delta_{\nu,l} \in PC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$, $\delta_{\nu,l}(t) = d_\nu(t)\mathbf{e}_l$ όπου $\mathbf{e}_l$ η l -στήλη του πίνακα I_m . Τότε αν $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ και $\mathbf{u}(t) = \delta_{\nu,l}(t)$,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} y_k^{(1)}(t) = [G(t)]_{kl} := g_{kl}(t), \quad t > 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad l \in \{1, 2, \dots, m\}$$

όπου $y_k^{(1)}(t)$ η k -συνιστώσα της $\mathbf{y}^{(1)}(t)$.

Απόδειξη: Έστω $t > 0$ σταθεροποιημένο αλλά αυθαίρετο. Επιλέγουμε ακέραιο μ τέτοιον ώστε $\tau_\nu \leq t$ για κάθε $\nu \geq \mu$. Τότε, για κάθε $\nu \geq \mu$:

$$y_k^{(1)}(t) = \int_0^t g_{kl}(t-\tau) d_\nu(\tau) d\tau = \int_0^{\tau_\nu} g_{kl}(t-\tau) d_\nu(\tau) d\tau$$

Εφαρμόζουμε αλλαγή μεταβλητών: $\xi = t - \tau$, $\tau = 0 \Rightarrow \xi = t$, $\tau = \tau_\nu \Rightarrow \xi = t - \tau_\nu$, $d\xi = -d\tau$. Επομένως:

$$y_k^{(1)}(t) = \int_t^{t-\tau_\nu} g_{kl}(\xi) d_\nu(t-\xi) (-d\xi) = \int_{t-\tau_\nu}^t g_{kl}(\xi) d_\nu(t-\xi) d\xi$$

Επομένως, από το Θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, υπάρχει $t_\nu \in [t - \tau_\nu, t]$ τέτοιο ώστε:

$$y_k^{(1)}(t) = g_{kl}(t_\nu) \int_{t-\tau_\nu}^t d_\nu(t-\xi) d\xi$$

Εφαρμόζουμε πάλι αλλαγή μεταβλητών: $\tau = t - \xi$, $\xi = t - \tau_\nu \Rightarrow \tau = \tau_\nu$, $\xi = t \Rightarrow \tau = 0$, $d\tau = -d\xi$. Επομένως:

$$y_k^{(1)}(t) = g_{kl}(t_\nu) \int_{\tau_\nu}^0 d_\nu(\tau) (-d\tau) = g_{kl}(t_\nu) \int_0^{\tau_\nu} d_\nu(\tau) d\tau = g_{kl}(t_\nu) \int_0^\infty d_\nu(\tau) d\tau = g_{kl}(t_\nu)$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας το όριο $\nu \rightarrow \infty$ στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης, αφού $t_\nu \rightarrow t$ καθώς $\nu \rightarrow \infty$ και λόγω συνέχειας της συνάρτησης g_{kl} . $\square$

5.4 Παράμετροι Markov: Έστω $\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ συνάρτηση μεταφοράς γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος καταστάσεων χώρου. Αν $|s| > \|A\|$ όπου $\|A\|$ μία επαγόμενη νόρμα του A (π.χ. $\|A\| = \sqrt{\rho(A^T A)}$ όπου $\rho(\cdot)$ η φασματική ακτίνα), τότε:

$$\hat{G}(s) = D + C \left[\frac{1}{s} \left(I - \frac{A}{s} \right) \right] B = D + C \left[\frac{1}{s} \left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \dots \right) \right] B = D + \frac{CB}{s} + \frac{CAB}{s^2} + \frac{CA^2B}{s^3} + \dots$$

που αντιστοιχεί στην σειρά Laurent στο $\{s : |s| > \|A\|\}$. (Παρατηρούμε ότι αν περιορίσουμε την περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace στο σύνολο: $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \|A\|\}$, τότε:

$$\begin{aligned} s \in \Omega &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(s) > \|A\| \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(s) > \rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(s) > \max\{\operatorname{Re}(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} \end{aligned}$$

καθώς και

$$s \in \Omega \Leftrightarrow \operatorname{Re}(s) > \|A\| \Rightarrow |s| > \|A\|$$

και επόμενως οι δύο ιδιότητες σύγκλισης ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Παίρνοντας αντίστροφο μεταχηματισμό Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{G}(s)\} = G(t) = D\delta(t) + C \left[I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots \right] B = D\delta(t) + Ce^{At}B, \quad t \geq 0$$

όπως περιμένουμε).

Η ακολουθία πινάκων $(G_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, $G_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$ όπου $G_0 = D$, $G_k = CA^{k-1}B$, $k \geq 1$ ονομάζεται ακολουθία Markov. Οι όροι της ακολουθίας σχετίζονται με τη χρονιστική απόκριση του συστήματος μέσω της σχέσης:

$$G_k = CA^{k-1}B = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} G(t)|_{t=0} = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} Ce^{At}B|_{t=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Άσκηση: Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$\hat{g}(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Δείξτε ότι η ακολουθία Markov παράγεται από τις αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} g_0 &= b_n \\ g_1 &= b_{n-1} - g_0 a_{n-1} \\ g_2 &= b_{n-2} - g_1 a_{n-1} - g_0 a_{n-2} \\ &\vdots \\ g_n &= b_0 - g_{n-1} a_{n-1} - \dots - g_0 a_0 \end{aligned}$$

5.5 Συνάρτηση συχνότητας

Μία ιδιότητα γραμμικών χρονικά-αναλλοίωτων συστημάτων αφορά την απόκριση των συστημάτων αυτών σε μονοχρωματικές (δηλ. μοναδικής συχνότητας) ημιτονοειδείς ταλαντώσεις. Κάτω από την υπόθεση ασυμπτωτικής ευστάθειας του συστήματος, το όριο (καθώς $t \rightarrow \infty$) της απόκρισης της εξόδου σε συναρτήσεις εισόδου αυτού του είδους, είναι μία ημιτονοειδής ταλάντωση της ίδιας συχνότητας, αλλά με διαφορετικού πλάτους ταλάντωσης και γωνίας φάσης, σε σχέση με τα χαρακτηριστικά αυτά της συνάρτησης εισόδου. Η ιδιότητα αυτή έχει σημαντικές επιπτώσεις, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Το βασικό αποτέλεσμα συνοψίζεται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω ότι $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$. Για $\omega \in \mathbb{R}$ ορίζουμε συνάρτηση εισόδου $\mathbf{u}_{l,\omega}(t) = \sin(\omega t)\mathbf{e}_l$ όπου $\mathbf{e}_l$ η l -στήλη του πίνακα I_m . Τότε, για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t) - |g_{kl}(i\omega)| \sin(\omega t + \phi_{kl})) = 0$$

όπου $\phi_{kl} = \arg(g_{kl}(i\omega))$, $0 \leq \phi_{kl} < 2\pi$.

Απόδειξη: Από προηγούμενη ανάλυση η έξοδος του συστήματος είναι:

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}_0 + (Ce^{At}B) * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

(ο νέος συμβολισμός δίνει έμφαση στην εξάρτηση της $\mathbf{y}$ από την αρχική κατάσταση και την συνάρτηση εισόδου). Εφόσον $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_- = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) < 0\}$ έχουμε $e^{At} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ (απόδειξη σε επόμενη ενότητα!) και επομένως μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη γενικότητας ότι $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Επομένως:

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{0}, \mathbf{u}) = \int_0^t G(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t) = G(t) * \mathbf{u}(t) + D\mathbf{u}(t)$$

όπου $G(t) = Ce^{At}B$. Έστω $\mathbf{u}(t) = \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l$, $t \geq 0$. Τότε η k συνιστώσα της συνάρτησης εξόδου είναι:

$$y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) = g_{kl}(t) * \exp(i\omega t) + D_{kl} \exp(i\omega t)$$

όπου $g_{kl} = [Ce^{At}B]_{kl}$ και D_{kl} το (k, l) στοιχείο του πίνακα D . Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) &= \int_0^t g_{kl}(\tau) \exp(i\omega(t - \tau)) d\tau + D_{kl} \exp(i\omega t) \\ &= \exp(i\omega t) \left[\int_0^t g_{kl}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau + D_{kl} \right] \end{aligned}$$

Όμως:

$$\hat{g}_{kl}(s) = \int_0^\infty g_{kl}(\tau) e^{-s\tau} d\tau \Rightarrow \hat{g}_{kl}(i\omega) = \int_0^\infty g_{kl}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \hat{g}_{kl}(s)|_{s=i\omega}$$

και επομένως,

$$\begin{aligned} y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) &= \exp(i\omega t) \left[\int_0^\infty g_{kl}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau - \int_t^\infty g_{kl}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau + D_{kl} \right] \\ &= \exp(i\omega t) \left[\hat{g}_{kl}(i\omega) - \int_t^\infty g_{kl}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau + D_{kl} \right] \end{aligned}$$

Άρα,

$$y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - \hat{g}_{kl}(i\omega) \exp(i\omega t) = - \int_t^\infty g_{kl}(\tau) \exp(i\omega(t - \tau)) d\tau$$

Όμως

$$\left| \int_t^\infty g_{kl}(\tau) \exp(i\omega(t - \tau)) d\tau \right| \leq \int_t^\infty |g_{kl}(\tau)| \cdot |\exp(i\omega(t - \tau))| d\tau = \int_t^\infty |g_{kl}(\tau)| d\tau \rightarrow 0$$

καθώς $t \rightarrow \infty$ και επομένως,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - \hat{g}_{kl}(i\omega) \exp(i\omega t)) = 0$$

Έστω $\hat{g}_{kl}(i\omega) = |\hat{g}_{kl}(i\omega)| \exp(i\phi_{kl})$ όπου $\phi_{kl} = \arg(\hat{g}_{kl}(i\omega))$. Τότε,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t; \mathbf{0}, \exp(i\omega t)\mathbf{e}_l) - |\hat{g}_{kl}(i\omega)| \exp(i(\omega t + \phi_{kl}))) = 0$$

Εφόσον η παραπάνω μιγαδική συνάρτηση συγκλίνει, το ίδιο συμβαίνει για το φανταστικό (και το πραγματικό) της μέρος, και άρα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t; \mathbf{0}, \operatorname{Im}(\exp(i\omega t))\mathbf{e}_l) - |\hat{g}_{kl}(i\omega)| \operatorname{Im}(\exp(i(\omega t + \phi_{kl})))) = 0$$

η

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_k(t; \mathbf{0}, \sin(\omega t)\mathbf{e}_l) - |\hat{g}_{kl}(i\omega)| \sin(\omega t + \phi_{kl})) = 0$$

□

Η συνάρτηση $\omega \mapsto \hat{G}(i\omega)$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{p \times m}$, λέγεται συνάρτηση συχνотήτων του συστήματος. Στις μεθόδους σχεδίασης που βασίζονται στο πεδίο των συχνотήτων χρησιμοποιούμε τα γραφήματα των συναρτήσεων:

$$\omega \mapsto m_{kl}(\omega) := |\hat{G}_{kl}(i\omega)|, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (\text{συνάρτηση μέτρου συχνотήτων})$$

και

$$\omega \mapsto \phi_{kl}(\omega) := \arg \hat{G}_{kl}(i\omega), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (\text{συνάρτηση φάσης συχνотήτων})$$

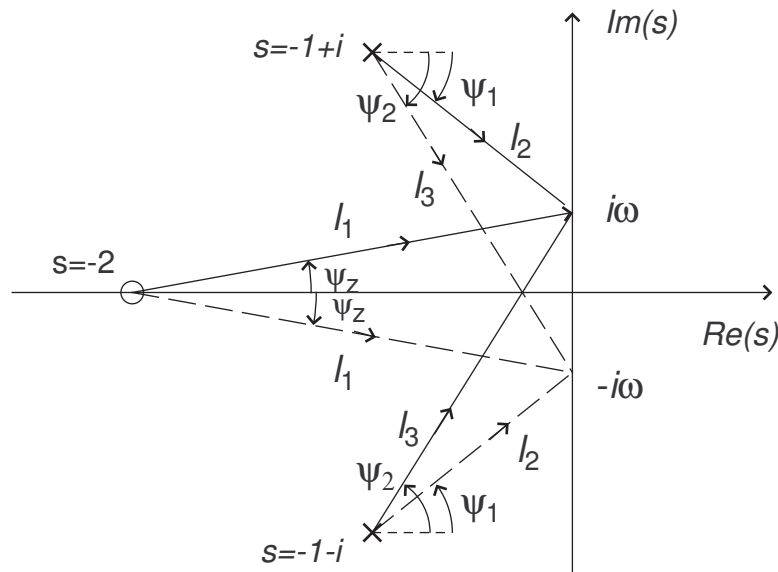
Εφόσον η $G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$ είναι πραγματική (γενικευμένη) συνάρτηση του t ,

$$\hat{G}(i\omega) = \int_0^\infty G(t)e^{-i\omega t} dt \Rightarrow \hat{G}(-i\omega) = \int_0^\infty G(t)e^{i\omega t} dt = \overline{\int_0^\infty G(t)e^{-i\omega t} dt} = \overline{\hat{G}(i\omega)}$$

Άρα, αν $\hat{g}_{kl}(i\omega) = m_{kl}(\omega)e^{i\phi_{kl}(\omega)}$, τότε $\overline{\hat{g}_{kl}(i\omega)} = m_{kl}(\omega)e^{i(-\phi_{kl}(\omega))}$ και $\hat{g}_{kl}(-i\omega) = m_{kl}(-\omega)e^{i\phi_{kl}(-\omega)}$ και άρα $m_{kl}(-\omega) = m_{kl}(\omega)$ (άρτια συνάρτηση του ω) και $\phi_{kl}(\omega) = -\phi_{kl}(-\omega)$ (περιττή συνάρτηση του ω). Επομένως τα γραφήματα των συναρτήσεων συχνοτήτων μέτρου και φάσης στην πράξη ορίζονται στο διάστημα $\omega \in [0, \infty)$ (και σχεδιάζονται συνήθως σε λογαριθμική κλίμακα).

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$\hat{g}(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1} = \frac{s+2}{(s+1+i)(s+1-i)}$$



Γεωμετρικά, η τιμή της συνάρτησήςω μέτρου και φάσης σε συχνότητα $\omega \in \mathbb{R}_+$ είναι:

$$m(\omega) = |\hat{g}(i\omega)| = \frac{l_1}{l_2 l_3} = |\hat{g}(-i\omega)| = m(-\omega) \text{ και } \phi(\omega) = \arg \hat{g}(i\omega) = \psi_z - (-\psi_1 + \psi_2) = -\phi(-\omega)$$

και άρα η $m(\omega)$ είναι άρτια και η $\phi(\omega)$ περιττή συνάρτηση.

Παράδειγμα: Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και ασυμπτωτικά ευσταθές σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = \frac{1}{s+1}$. Η συνάρτηση συχνοτήτων είναι

$$\hat{G}(i\omega) = \frac{1}{i\omega + 1} = m(\omega)e^{i\phi(\omega)}, \text{ όπου } m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \text{ και } \phi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega)$$

και επομένως αν $u(t) = \sin(\omega t)$, $t \geq 0$, έχουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - m(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(y(t) - \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \sin(\omega t - \tan^{-1}(\omega)) \right) = 0$$

(συμβατικά πολλές φορές γράφουμε: $y_{ss}(t) = m(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$) (η έξοδος σε συνθήκες steady-state). Τα χαρακτηριστικά μέτρου και φάσης της συνάρτησης συχνοτήτων είναι αυτά φίλτρου low-pass: Το μέτρο φθίνει μονοτονικά από την τιμή $m(0) = 1$ και τείνει όριο $\lim_{\omega \rightarrow \infty} m(\omega) = 0$. Η φάση είναι μονοτονικά

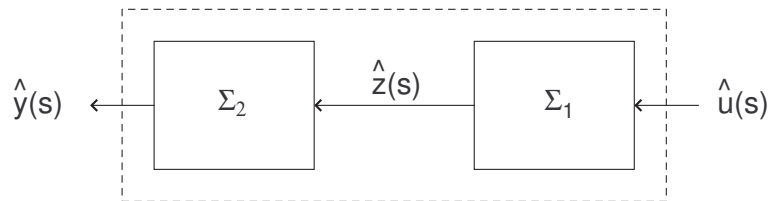
φθίνουσα για $\omega \in \mathbb{R}_+$ από την τιμή $\phi(0) = 0$ και τείνει στο όριο $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ rads (καθυστέρηση φάσης).

Άσκηση: Περιγράψτε τα χαρακτηριστικά μέτρου και φάσης της συνάρτησης συχνότητας κάθε συστήματος από τα παρακάτω που έχει συνάρτηση μεταφοράς: $\hat{g}(s) = \frac{1}{s}$, $\hat{g}(s) = \frac{1}{s^2}$, $\hat{g}(s) = \frac{s+1}{1+s/10}$, $\hat{g}(s) = \frac{1+s/10}{s+1}$, $\hat{g}(s) = \frac{1}{(s+1)(1+s/10)}$, $\hat{g}(s) = \frac{s-1}{s+1}$ και $\hat{g}(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$.

5.6 Συνδεσμολογία συστημάτων

Η έννοια της συνάρτησης μεταφοράς επιτρέπει την ανάλυση συμπεριμένως συστημάτων με αλγεβρικές μεθόδους:

1. Συστήματα σε σειρά $\Sigma = \Sigma_2 \Sigma_1$:



Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων Σ_1 και Σ_2 , αντίστοιχα. Τότε:

$$\hat{y}(s) = \hat{G}_2(s)\hat{z}(s) = \hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s)\hat{u}(s) = (\hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s))\hat{u}(s) := \hat{G}(s)\hat{u}(s)$$

όπου $\hat{G}(s) := \hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος $\Sigma := \Sigma_2 \Sigma_1$. Αν $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1, 2$, τα αντίστοιχα μοντέλα καταστάσεων χώρου, δηλ.

$$\Sigma_1 : \mathbf{x}'_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u}, \mathbf{z}_1 = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u}$$

και

$$\Sigma_2 : \mathbf{x}'_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{z}, \mathbf{y} = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{z}$$

τότε

$$\Sigma_2 : \mathbf{x}'_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2(C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u}), \mathbf{y} = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2(C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u})$$

και το σύστημα Σ έχει πραγματοποίηση:

$$\Sigma = \Sigma_2 \Sigma_1 : \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 \mathbf{u}$$

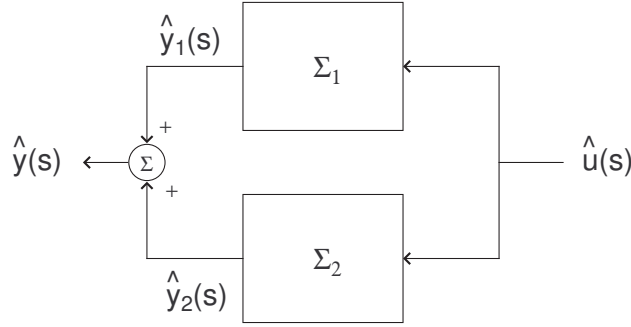
2. Συστήματα σε παραλληλία $\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$:

Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων Σ_1 και Σ_2 , αντίστοιχα. Τότε:

$$\hat{y}(s) = \hat{y}_1(s) + \hat{y}_2(s) = \hat{G}_1(s)\hat{u}(s) + \hat{G}_2(s)\hat{u}(s) = (\hat{G}_1 + \hat{G}_2)(s)\hat{u}(s) := \hat{G}(s)\hat{u}(s)$$

όπου $\hat{G}(s) := \hat{G}_1(s) + \hat{G}_2(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος $\Sigma := \Sigma_1 \parallel \Sigma_2$. Αν $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1, 2$, τα αντίστοιχα μοντέλα καταστάσεων χώρου, δηλ.

$$\Sigma_1 : \mathbf{x}'_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u}, \mathbf{y}_1 = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u}$$



και

$$\Sigma_2 : \mathbf{x}'_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{u}, \mathbf{y} = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{u}$$

τότε το συστήμα Σ έχει πραγματοποίηση:

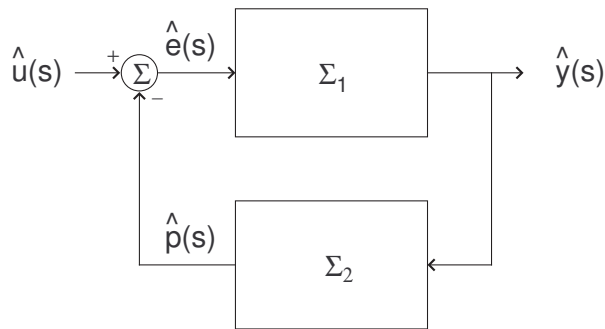
$$\Sigma = \Sigma_1 \parallel \Sigma_2 : \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + (D_1 + D_2) \mathbf{u}$$

3. Σύνδεση αρνητικής ανάδρασης $\Sigma = (\Sigma_1, -\Sigma_2)$:

Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων Σ_1 και Σ_2 , αντίστοιχα. Τότε:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}(s) &= \hat{G}_1(s)(\hat{\mathbf{u}}(s) - \hat{G}_2(s)\hat{\mathbf{y}}(s)) \Rightarrow (I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))\hat{\mathbf{y}}(s) = \hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{y}}(s) &= (I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}\hat{G}_1(s)\hat{\mathbf{u}}(s) = \hat{G}(s)\hat{\mathbf{u}}(s) \end{aligned}$$

όπου $\hat{G}(s) = (I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}\hat{G}_1(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος $\Sigma := (\Sigma_1, -\Sigma_2)$. Υποθέτουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση μεταφοράς $(I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s))^{-1}$ υπάρχει ως ρητή κανονική συνάρτηση, ισοδύναμα ότι $\det(I + \hat{G}_1(\infty)\hat{G}_2(\infty)) \neq 0$ (στην περίπτωση αυτή το σύστημα ανάδρασης (κλειστού βρόγχου) λέγεται καλά τοποθετημένο (well posed).)



Αν $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1, 2$, τα αντίστοιχα μοντέλα καταστάσεων χώρου, δηλ.

$$\Sigma_1 : \mathbf{x}'_1 = A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{e}, \mathbf{y} = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{e}$$

και

$$\Sigma_2 : \mathbf{x}'_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{y}, \mathbf{p} = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{y}$$

Ισχύει επίσης: $\mathbf{e}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{p}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Μπορούμε να υπολογίσουμε μία πραγματοποίηση του Σ ως εξής:

Εφόσον $\mathbf{e}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{p}(t)$, έχουμε:

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1(\mathbf{u} - \mathbf{p}) = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u} - D_1(C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{y}) = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u} - D_1 C_2 \mathbf{x}_2 - D_1 D_2 \mathbf{y}$$

Ισοδύναμα:

$$(I + D_1 D_2) \mathbf{y} = C_1 \mathbf{x}_1 + D_1 \mathbf{u} - D_1 C_2 \mathbf{x}_2$$

και επομένως αν $\det(I + D_1 D_2) \neq 0$,

$$\mathbf{y} = L_1 C_1 \mathbf{x}_1 - L_1 D_1 C_2 \mathbf{x}_2 + L_1 D_1 \mathbf{u} \quad \text{όπου} \quad L_1 := (I + D_1 D_2)^{-1}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 \mathbf{y} = C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 (L_1 C_1 \mathbf{x}_1 - L_1 D_1 C_2 \mathbf{x}_2 + L_1 D_1 \mathbf{u}) \\ &= D_2 L_1 C_1 \mathbf{x}_1 + (I - D_2 L_1 D_1) C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 L_1 D_1 \mathbf{u} \end{aligned}$$

Επομένως οι εξισώσεις για το Σ_1 γράφονται:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u} - B_1 \mathbf{p} \\ &= A_1 \mathbf{x}_1 + B_1 \mathbf{u} - B_1 [D_2 L_1 C_1 \mathbf{x}_1 + (I - D_2 L_1 D_1) C_2 \mathbf{x}_2 + D_2 L_1 D_1 \mathbf{u}] \\ &= (A_1 - B_1 D_2 L_1 C_1) \mathbf{x}_1 - B_1 (I - D_2 L_1 D_1) C_2 \mathbf{x}_2 + B_1 (I - D_2 L_1 D_1) \mathbf{u} \end{aligned}$$

και για το Σ_2 :

$$\mathbf{x}'_2 = A_2 \mathbf{x}_2 + B_2 \mathbf{y} = B_2 L_1 C_1 \mathbf{x}_1 + (A_2 - B_2 L_1 D_1 C_2) \mathbf{x}_2 + B_2 L_1 D_1 \mathbf{u}$$

Σε διανυσματική μορφή:

$$\Sigma = (\Sigma_1, -\Sigma_2) : \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 D_2 L_1 C_1 & -B_1 (I - D_2 L_1 D_1) C_2 \\ B_2 L_1 C_1 & A_2 - B_2 L_1 D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 (I - D_2 L_1 D_1) \\ B_2 L_1 D_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

και

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} L_1 C_1 & -L_1 D_1 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + L_1 D_1 \mathbf{u}$$

όπου $L_1 := (I + D_1 D_2)^{-1}$.

Άσκηση: Αν τα συστήματα Σ_1 και Σ_2 έχουν συναρτήσεις μεταφοράς $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$, αντίστοιχα, όπου

$$\hat{G}_i(s) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{11}^{(i)}(s) & \hat{G}_{12}^{(i)}(s) \\ \hat{G}_{21}^{(i)}(s) & \hat{G}_{22}^{(i)}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^{(i)} & D_{12}^{(i)} \\ D_{21}^{(i)} & D_{22}^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^{(i)} \\ C_2^{(i)} \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1^{(i)} & B_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2$, υπολογίστε την συνάρτηση μεταφοράς και μία πραγματοποίηση του συνδεδεμένου συστήματος (για το δεύτερο υποθέστε ότι $D_{ij}^{(k)} = 0$, $(i, j, k \in \{1, 2\})$).

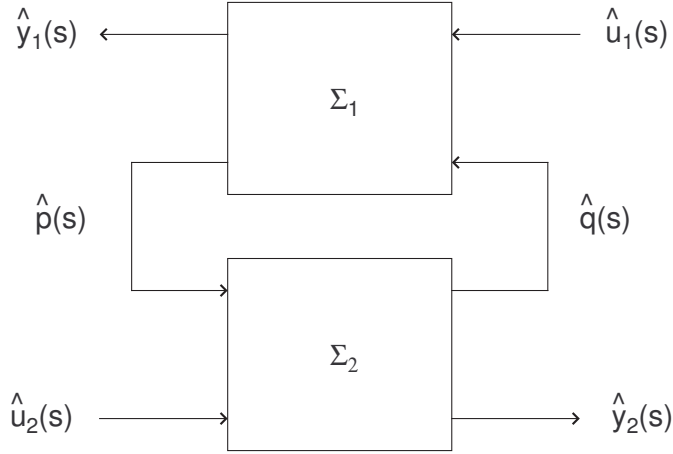
Άσκηση: Έστω $D_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ και $D_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Δείξτε ότι $\det(I_p + D_1 D_2) \neq 0$ αν και μόνο αν $\det(I_m + D_2 D_1) \neq 0$.

Λύση: Από γνωστό Θεώρημα Sylvester $\sigma(AB) \setminus \{0\} = \sigma(BA) \setminus \{0\}$. Επομένως $\sigma(I + D_1 D_2) \setminus \{-1\} = \sigma(I + D_2 D_1) \setminus \{-1\}$ και επομένως $0 \in \sigma(I + D_1 D_2) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(I + D_2 D_1)$.

Άσκηση: Έστω $\hat{G}_1(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ και $\hat{G}_2(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ρητές κανονικές συναρτήσεις και έστω ότι $\det(I_p + \hat{G}_1(\infty) \hat{G}_2(\infty)) \neq 0$. Δείξτε ότι $(I + \hat{G}_1(s) \hat{G}_2(s))^{-1} \hat{G}_1(s) = \hat{G}_1(s) (I + \hat{G}_2(s) \hat{G}_1(s))^{-1}$.

Λύση: Από την προηγούμενη άσκηση $(I + \hat{G}_1(s) \hat{G}_2(s))^{-1} \hat{G}_1(s)$ ρητή κανονική συνάρτηση αν και μόνο αν $\hat{G}_1(s) (I + \hat{G}_2(s) \hat{G}_1(s))^{-1}$ ρητή κανονική συνάρτηση, αν και μόνο αν $\det(I + \hat{G}_1(\infty) \hat{G}_2(\infty)) \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή,

$$(I + \hat{G}_1 \hat{G}_2)^{-1} \hat{G}_1 - \hat{G}_1 (I + \hat{G}_2 \hat{G}_1)^{-1} = (I + \hat{G}_1 \hat{G}_2)^{-1} [\hat{G}_1 (I + \hat{G}_2 \hat{G}_1) - (I + \hat{G}_1 \hat{G}_2) \hat{G}_1] (I + \hat{G}_2 \hat{G}_1)^{-1} = 0$$



Άσκηση: Έστω συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$. Βρείτε μια πραγματοποίηση του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}^T(s)$.

Λύση: $\hat{G}^T(s) = [D + C(sI - A)^{-1}B]^T = D^T + B^T((sI - A)^T)^{-1}C^T = D^T + B^T(sI - A^T)^{-1}C^T$.

5.7 Ισοδύναμα συστήματα

Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\Sigma(A, B, C, D) : \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

όπου $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ και $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$. Θέλουμε να ορίσουμε νέο διάνυσμα κατάστασης $\tilde{\mathbf{x}}$ ώστε η σχέση εισόδου-εξόδου να μείνει αναλλοίωτη.

Ορίζουμε γραμμικό μετασχηματισμό $\mathbf{x} = P\tilde{\mathbf{x}}$, $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\det(P) \neq 0$. Τότε $\tilde{\mathbf{x}}' = P^{-1}\mathbf{x}'$ και

$$\tilde{\mathbf{x}}' = P^{-1}(A\mathbf{x} + B\mathbf{u}) = P^{-1}AP\tilde{\mathbf{x}} + P^{-1}B\mathbf{u} := \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{B}\mathbf{u}$$

Επίσης

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} = CP\tilde{\mathbf{x}} + D\mathbf{u}$$

Τα συστήματα $\Sigma(A, B, C, D)$ και $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ λέγονται ισοδύναμα και γράφουμε: $\Sigma \sim \tilde{\Sigma}$. Τα παρακάτω χαρακτηριστικά παραμένουν αναλλοίωτα από τον μετασχηματισμό:

- $\sigma(A) = \sigma(P^{-1}AP)$: Το φάσμα πίνακα παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμό ομοιότητας (καθώς και οι αλγεβρικές πολλαπλότητες κάθε ιδιοτιμής). Επομένως το ίδιο ισχύει και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\tilde{\phi}(s) = \det(sI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(sI - A) \det(P) = \det(sI - A) = \phi(s)$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς, ως συνάρτηση μεταξύ εισόδου και εξόδου παραμένει αναλλοίωτη:

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &= \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D = CP[sI - P^{-1}AP]^{-1} + D \\ &= CPP^{-1}(sI - A)^{-1}PP^{-1} + D \\ &= C(sI - A)^{-1} + D = \hat{G}(s) \end{aligned}$$

- Η ακολουθία Markov, ως συνάρτηση μεταξύ εισόδου και εξόδου παραμένει αναλλοίωτη:

$$\tilde{G}_0 = G_0 = D, \quad \tilde{G}_k = \tilde{C}\tilde{A}^{k-1}\tilde{B} = CP(P^{-1}AP)^{k-1}P^{-1}B = CP(P^{-1}A^{k-1}P)P^{-1}B = CA^{k-1}B,$$

για $k \geq 1$.

Άσκηση: Δείξτε ότι η σχέση $\sim$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) $\Sigma \sim \Sigma$ (ανακλαστική), (β) $\Sigma_1 \sim \Sigma_2 \Leftrightarrow \Sigma_2 \sim \Sigma_1$ (συμμετρική) και (γ) $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$ και $\Sigma_2 \sim \Sigma_3 \Rightarrow \Sigma_1 \sim \Sigma_3$ (μεταβατική) και άρα είναι σχέση ισοδυναμίας.

Άσκηση: Δείξτε με παράδειγμα ότι δύο συστήματα μπορούν να έχουν την ίδια συνάστηση μεταφοράς χωρίς να είναι ισοδύναμα.

Άσκηση: Έστω συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\hat{G}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$, $\det D \neq 0$. Δείξτε ότι: $\hat{G}^{-1}(s) = D^{-1} - D^{-1}C(sI - A + BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}$. Υπόδειξη: Υπολογίστε μία πραγματοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς $\hat{G}^{-1}\hat{G}(s)$ με εφαρμόστε έναν κατάλληλο μετασχηματισμό ισοδυναμίας.

Άσκηση: Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα $\Sigma(A, B, C, D)$ όπου $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ και έστω ότι υπάρχουν μοναδικές λύσεις $P = P^T \succ 0$ και $Q = Q^T \succ 0$ των αλγεβρικών εξισώσεων Lyapunov

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad \text{και} \quad A^TQ + QA + C^TC = 0$$

αντίστοιχα. (Οι πίνακες P και Q ονομάζονται πίνακας Gramian ελεγχιμότητας και πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας, αντίστοιχα). Έστω το ισοδύναμο σύστημα $\tilde{\Sigma}(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$. Δείξτε ότι στις νέες συντεταγμένες οι πίνακες P και Q μετασχηματίζονται σε $\tilde{P} = T^{-1}PT^{-T} = \tilde{P}^T \succ 0$ και $\tilde{Q} = T^TQT = \tilde{Q}^T \succ 0$ και επομένως το φάσμα του πίνακα PQ είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας. (Ο πίνακας T^{-T} ορίζεται ως $(T^{-1})^T$, ισοδύναμα $(T^T)^{-1}$).

Άσκηση: Συνάρτηση μεταφοράς $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}(s)$ λέγεται all-pass αν $G^T(-s)G(s) = I_p$. Έστω Q ο πίνακας Gramian παρατηρησιμότητας (δείτε την προηγούμενη άσκηση) και έστω ότι $QB + C^TD = 0$ και $D^TD = I_p$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $G(s)$ είναι all-pass.

Γ. Χαλικιάς, 10-3-2025