Εξισώσεις Διαφορών

Έστω (y_k) ακολουθία, $k \in \mathbb{N}_0$ και έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$y_{k+n} = f(k, y_{k+n-1}, y_{k+n-2}, \dots, y_k)$$

Η σχέση εκφράζει μιά εξίσωση διαφορών ή "διαφοροεξίσωση".

Η τάξη της εξίσωσης είναι η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου δείκτη, δηλ $k+n-k=n$.

Η εξίσωση είναι γραμμική αν είναι της μορφής:

$$y_{k+n} + a_1(k)\, y_{k+n-1} + \dots + a_n(k) = R_k \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Η εξίσωση λέγεται ομογενής αν $R_k = 0$, διαφορετικά μή ομογενής.

Παράδειγμα:

$y_{k+1} - 3y_k + y_{k-1} = e^{-k}$: Γραμμική, μή ομογενής, τάξης n

$y_{k+1} = y_k^2$: Μή-γραμμική $1^{ης}$ τάξης

$y_{k+4} - y_k = 0$: Γραμμική ομογενής τέταρτης τάξης

$y_{k+3} = \cos y_k$: Μή-γραμμική $3^{ης}$ τάξης.

Ορισμός: Μια λύση της εξίσωσης διαφορών είναι συνάρτηση $\varphi(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, που καθιστά την εξίσωση ταυτότητα.

Παρατήρηση: Αν η εξίσωση είναι γραμμική ομογενής καί $\varphi_1(k)$, $\varphi_2(k)$ δύο λύσεις, τότε κάθε γραμμικός συνδιασμός: $c_1\varphi_1(k)+c_2\varphi_2(k)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, είναι επίσης λύση.

Παραδείγματα / Εφαρμογές

Π1 Έστω A_0 αρχικό κεφάλαιο καί r τό (σταθερό) επιτόκιο. Αν A_n τό κεφάλαιο μετά n-έτη: $A_{n+1}=A_n+rA_n$. Επομένως:

$$A_n=(1+r)A_{n-1}=(1+r)^2A_{n-2}=\cdots=(1+r)^nA_0$$

Π2 Έστω N_k ο πληθυσμός χρονική στιγμή t_k, $k\in\mathbb{N}_0$. Αν στό διάστημα (t_k,t_{k+1}) έχουμε bN_k γεννήσεις καί dN_k θανάτους $(b,d>0)$, τότε:

$$N_{k+1}-N_k=bN_k-dN_k$$

$$\Rightarrow\quad N_{k+1}=(1+b-d)N_k:=\lambda N_k$$

$$\Rightarrow\quad N_k=\lambda^kN_0\quad(k\in\mathbb{N}_0)$$

Αν $\lambda>1$ ($\Leftrightarrow b>d$) $N_k\uparrow$, αν $\lambda<1$ ($\Leftrightarrow b<d$) $N_k\downarrow$.

Π3 Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με τήν μέθοδο δυναμοσειρών. Έστω δ.ε.

$$y''+3ty'+3y=0$$

Λύση σέ μορφή δυναμοσειράς:

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k=\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}t^{k-2}=c_0+c_1t+c_2t^2+\ldots$$

Έχουμε: $y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k t^{k-1}$

$$\Rightarrow t y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k t^k = \sum_{k=2}^{\infty} (k-2) c_{k-2} t^{k-2}$$

$$y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2}$$

Επομένως με αντικατάσταση:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[k(k-1) c_k + 3(k-2) c_{k-2} + 3 c_{k-2} \right] t^{k-2} = 0$$

$$\Rightarrow k(k-1) c_k + 3(k-2) c_{k-2} + 3 c_{k-2} = 0.$$

$$\Rightarrow k\cancel{(k-1)} c_k + 3\cancel{(k-1)} c_{k-2} = 0$$

$$\Rightarrow c_k = -\frac{3}{k} c_{k-2}$$

(Γραμμική, ομογενής εξίσωση διαφορών $2^{ης}$ τάξης).

Π4 Αριθμητική ~~εξισω~~ επίλυση διαφορικών εξισώσεων:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Έστω $y_k = y(t_k)$, $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Προσεγγίζουμε:

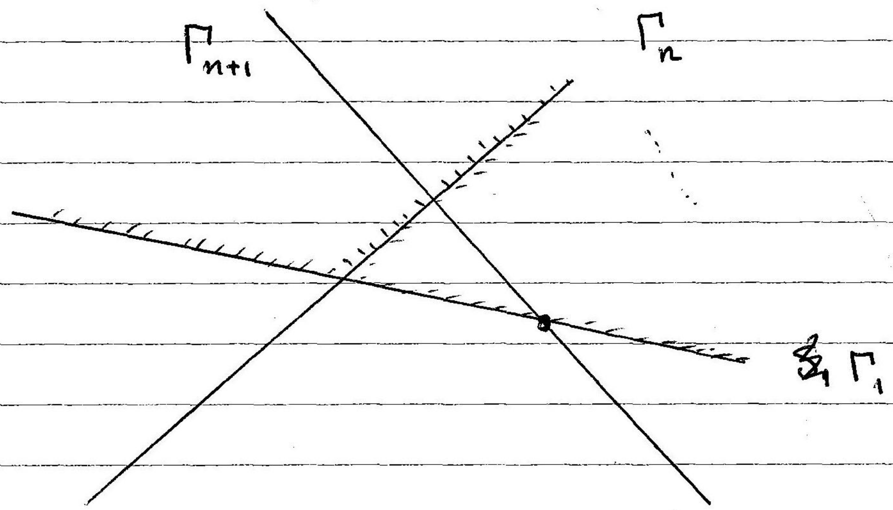
$$y'(t_k) \cong \frac{y(t_k + \Delta t) - y(t_k)}{\Delta t} = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\Delta t}$$

$$= \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t}$$

Επομένως: $y_{k+1} - y_k = f(t_k, y(t_k)) = f(k \cdot \Delta t, y_k)$

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + f(k \cdot \Delta t, y_k) := y_k + g(k, y_k).$$

Π.5 Έστω n ευθείες στό επίπεδο σέ "γενική θέση" (κάθε ζεύγος ευθειών τέμνεται σέ 1 σημείο). Σέ πόσα χωρία S_n υποδιαιρείται τό επίπεδο;



Προσθέτοντας την ευθεία Γ_{n+1}, $n+1$ χωρία χωρίζονται, άρα προσθέτονται $n+1$ χωρία. Επομένως

$$S_{n+1} = S_n + n + 1 \quad \text{ή} \quad S_n = S_{n-1} + n$$

μέ $S_1 = 2$. Έχουμε

$$S_n = S_{n-1} + n = S_{n-2} + (n-1) + n$$

$$= \cdots = S_1 + 2 + 3 + \cdots n$$

$$= \underbrace{(S_1 - 1)}_{1} + 1 + 2 + \cdots + n$$

$$= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Παραγωγή Εξισώσεων Διαφορών.

Έστω y_k ο γενικός όρος μιάς ακολουθίας, $k \in \mathbb{N}_0$, ορίζεται ως συνάρτηση k αυθαίρετων σταθερών

$$y_k = f(k, c_1, c_2, \dots c_n) \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Από τις εξισώσεις ($n+1$ τον αριθμό):

$$\left.\begin{aligned} y_k &= f(k, c_1, c_2, \dots c_n) \\ y_{k+1} &= f(k+1, c_1, c_2, \dots, c_n) \\ &\vdots \\ y_{k+n} &= f(k+n, c_1, c_2, \dots, c_n). \end{aligned}\right\}$$

κάνουμε απαλειφή των c_i και προκύπτει μία σχέση της μορφής:

$$G(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n}) = 0$$

που είναι εξίσωση διαφορών n-τάξης

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $y_k = c_1 2^k + c_2 5^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= c_1 2^{k+1} + c_2 5^{k+1} \\ y_{k+2} &= c_1 2^{k+2} + c_2 5^{k+2} \end{aligned}\right\}.$$

Οι εξισώσεις γράφονται:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_k & 2^k & 5^k \\ y_{k+1} & 2^{k+1} & 5^{k+1} \\ y_{k+2} & 2^{k+2} & 5^{k+2} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{0}}$$

Αν $\det(A) \neq 0$ θα είχαμε $\underline{x} = A^{-1}\underline{0} = \underline{0}$ (άτοπο).
Επομένως

$$\det \begin{bmatrix} y_k & 1\cdot 2^k & 1\cdot 5^k \\ y_{k+1} & 2\cdot 2^k & 5\cdot 5^k \\ y_{k+2} & 4\cdot 2^k & 25\cdot 5^k \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2^k \cdot 5^k \cdot \det \begin{bmatrix} y_k & 1 & 1 \\ y_{k+1} & 2 & 5 \\ y_{k+2} & 4 & 25 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow y_k(50-20) - y_{k+1}(25-4) + y_{k+2}(5-2) = 0$$

$$\Rightarrow 30y_k - 21y_{k+1} + 3y_{k+2} = 0$$

$$\Rightarrow y_{k+2} - 7y_{k+1} + 10y_k = 0.$$

Θεώρημα ύπαρξης και μονοσήμαντου λύσης

Θεώρημα: Έστω:

$$y_{k+n} = f(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n-1}) \quad , k \in \mathbb{N}_0$$

εξίσωση διαφορών n-τάξης. Η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση για κάθε αυθαίρετη n-άδα αρχικών συνθηκών: $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$

Απόδειξη: Για $k=0$: $y_n = f(0, y_0, \dots y_{n-1})$, άρα οι αρχικές συνθήκες καθορίζουν το y_n μονοσήμαντα. Οι συνθήκες τώρα $(y_1, y_2, \dots y_n)$ καθορίζουν μονοσήμαντα το y_{n+1}, κλπ. $\square$
(Αυστηρή απόδειξη με επαγωγή!)

Τελεστές διαφορών (Δ και E).

Ορισμός: Ο τελεστής Δ δρά στους όρους μιάς ακολουθίας ως εξής: $\Delta(y_k) = y_{k+1} - y_k$ (τελεστής πρώτης διαφοράς).

Ορισμός: Ο τελεστής $\Delta^2 := \Delta \circ \Delta$ δρά επί του y_k ως εξής:

$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) =$$

$$= (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) =$$

$$= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

(τελεστής $2^{ης}$ διαφοράς). Επαγωγικά ορίζουμε τελεστή n-διαφοράς: $\Delta^n(y_k) = \Delta(\Delta^{n-1} y_k)$. Ισχύει:

$$\Delta^m \cdot \Delta^n y_k = \Delta^n \Delta^m y_k = \Delta^{n+m} y_k \quad (\forall\, m, n \in \mathbb{N})$$

Ο $\Delta(\cdot)$ είναι γραμμικός τελεστής:

$$\Delta(x_k + y_k) = \Delta x_k + \Delta y_k \quad , \quad \Delta(c y_k) = c\,\Delta y_k \quad (c \in \mathbb{R})$$

και για κάθε γραμμικό συνδιασμό:

$$\Delta(c_1 x_k + c_2 y_k) = c_1 \Delta x_k + c_2 \Delta y_k.$$

Θεώρημα: Ισχύει ότι:

$$\Delta^n y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, {}^nC_i\, y_{k+n-i} = y_{k+n} - n y_{k+n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} y_{k+n-2} + \dots + (-1)^i \frac{n!}{i!\,(n-i)!} y_{k+n-i} + \dots$$

$$+ \dots + (-1)^n y_k \qquad \left({}^nC_i \equiv \binom{n}{i}\right)$$

Απόδειξη: Επαγωγικά. Γιά $n=1$: $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ (ισχύει). Έστω ότι η σχέση ισχύει γιά n. Θα δείξουμε ότι ισχύει καί γιά $n+1$. Έχουμε:

$$\Delta^{n+1} y_k = \Delta^n \Delta y_k = \Delta^n (y_{k+1} - y_k) = \Delta^n y_{k+1} - \Delta^n y_k.$$

Από την υπόθεση έχουμε:

$$\Delta^n y_k = \underline{y_{k+n}} - n\, \underline{\underline{y_{k+n-1}}} + \frac{n(n-1)}{2} y_{k+n-2} + \dots + (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!\, i!} y_{k+n-i} + \dots + (-1)^n y_k$$

καί

$$\Delta^{n} y_{k+1} = y_{k+n+1} - \underline{n\, y_{k+n}} + \frac{n(n-1)}{2!} \underline{\underline{y_{k+n-1}}} + \dots + (-1)^i \frac{n!}{(n-i)!\, i!} y_{k+n+1-i} + \dots + (-1)^n y_{k+1}.$$

Επομένως:

$$\Delta^n y_{k+1} - \Delta^n y_k = y_{k+n+1} - (n+1) y_{k+n} + \left[\frac{n(n-1)}{2} + n\right] y_{k+n-1}$$

$$+ \dots + \left[(-1)^i \cancel{n!}\, {}^nC_i\, y_{k+n+1-i} - (-1)^{i-1}\, {}^nC_{i-1}\, y_{k+n+1-i}\right].$$

$$+ \dots \underbrace{(-1)^n y_{k+1}} + (-1)^{n+1} y_k.$$

Έχουμε: $\cancel{(-1)^i - (-1)^{i+1}}$

$$\left[(-1)^i \, {}^nC_i - (-1)^{i-1} \, {}^nC_{i-1}\right] y_{k+n+1-i} =$$

$$= (-1)^i \left[{}^nC_i + {}^nC_{i-1}\right] y_{k+n+1-i} \qquad , \text{ και}$$

$${}^nC_i + {}^nC_{i-1} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} + \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i+1)!}$$

$$= n! \left[\frac{n-\cancel{i}+1 + \cancel{i}}{i!\,(n-i+1)!}\right].$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{i!\,(n-i+1)!} = \frac{(n+1)!}{i!\,(n+1-i)!} = {}^{n+1}C_i$$

Άρα:

$$\Delta^{n+1} y_k = y_{k+n+1} - (n+1)\, y_{k+n} + \frac{n(n+1)}{2!}\, y_{k+n-1}$$

$$+ \dots + (-1)^i \, {}^{n+1}C_i \, y_{k+n+1-i} + \dots + (-1)^n y_{k+1}.$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, {}^{n+1}C_i \, y_{k+(n+1)-i}$$

και επομένως η σχέση ισχύει για $n+1$. $\square$

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$(\alpha_1 + \beta_1 \Delta)(\alpha_2 + \beta_2 \Delta) y_k = \left[\alpha_1(\alpha_2 + \beta_2\Delta) + \beta_1 \Delta(\alpha_2 + \beta_2 \Delta)\right] y_k$$

$$= \alpha_1\alpha_2 y_k + \alpha_1\beta_2 \Delta y_k + \beta_1\alpha_2 \Delta y_k + \beta_1\beta_2 \Delta^2 y_k$$

$$= \dots = (\alpha_2 + \beta_2\Delta)(\alpha_1 + \beta_1\Delta) y_k$$

και οι δύο τελεστές αντιμετατίθενται. Αν $f(r)$ πολυώνυμο με ρίζες $r_1, r_2, \dots, r_m$, $f(r) = \prod_{i=1}^{m}(r-r_i)$, τότε

$$f(\Delta) = (\Delta - r_1)(\Delta - r_2)\cdots(\Delta - r_m) = \prod_{i=1}^{m}(\Delta - r_i)$$

και $f(\Delta) y_k = \prod_{i=1}^{m} (\Delta - r_i) y_k$

<u>Ορισμός</u>: Ο τελεστής E δρά στους όρους μιάς ακολουθίας ως εξής: $E y_k = y_{k+1}$ (ο τελεστής μετατόπισης). Γενικά: $E^p y_k = y_{k+p}$ $(p \in \mathbb{N})$ και $E^0 y_k = y_k$. Επίσης:

$$E^p(c_1 x_k + c_2 y_k) = c_1 E^p x_k + c_2 E^p y_k \quad \text{(γραμμικότητα)}$$

$$E^p E^q y_k = E^q E^p y_k = E^{p+q} y_k.$$

Παρόμοια ορίζουμε πολυωνυμικούς τελεστές του E.

<u>Σχέση τελεστών Δ και E</u>: Είναι προφανές ότι αφού:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = E y_k - y_k ,$$

$\Delta = E - I \iff E = \Delta + I$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής. Αν $f(r)$, $g(r)$ πολυώνυμα του r, $f(E) = f(I+\Delta)$, $g(\Delta) = g(E-I)$.

<u>Θεώρημα</u>: Ισχύει ότι

$$y_{k+n} = \sum_{i=0}^{n} {}^nC_i \, \Delta^i y_k =$$

$$= y_k + n\Delta y_k + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_k + \dots + \Delta^n y_n$$

Απόδειξη:

$$y_{k+n} = E^n y_k = (I+\Delta)^n y_k = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_i \, \Delta^i y_k$$

Ιδιότητα τελεστών γινομένων / πηλίκων.

- $\Delta(x_k y_k) = x_{k+1} y_{k+1} - x_k y_k = x_{k+1} y_{k+1} - x_{k+1} y_k + x_{k+1} y_k - x_k y_k$

$$= x_{k+1}(y_{k+1} - y_k) + (x_{k+1} - x_k) y_k$$

$$= x_{k+1} \Delta y_k + \cancel{\Delta y_k}\, \Delta x_k \cdot y_k .$$

(Συγκρίνετε με $(fg)' = f'g + fg'$).

- $\Delta\left(\frac{x_k}{y_k}\right) = \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}} - \frac{x_k}{y_k} = \frac{x_{k+1} y_k - y_{k+1} x_k}{y_{k+1} y_k}$

$$= \frac{x_{k+1} y_k - x_k y_k + x_k y_k - y_{k+1} x_k}{y_{k+1} y_k}$$

$$= \frac{(x_{k+1} - x_k) y_k - x_k (y_{k+1} - y_k)}{y_{k+1} y_k}$$

$$= \frac{\Delta x_k \cdot y_k - x_k \Delta y_k}{y_{k+1} y_k} \qquad (y_k \neq 0)$$

(Συγκρίνετε με $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$).

Αν $S_k = y_0 + y_1 + \dots + y_k$, τότε $S_{k+1} = y_0 + \dots + y_k + y_{k+1}$
$\Rightarrow S_{k+1} = S_k + y_{k+1} \Rightarrow \Delta S_k := S_{k+1} - S_k = y_{k+1}$.

Θεώρημα (Leibnitz)

$$\Delta^n (x_k y_k) = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r \left(\Delta^r x_k\right)\left(\Delta^{n-r} y_{k+r}\right)$$

$$= x_k \Delta^n y_k + n(\Delta x_k)(\Delta^{n-1} y_{k+1}) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\Delta^2 x_k\right)\left(\Delta^{n-2} y_{k+2}\right)$$

$$+ \dots + \left(\Delta^n x_k\right) y_{k+n}$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τελεστές E_1, E_2

$$E_1(x_k y_k) = x_{k+1} y_k \quad , \quad E_2(x_k y_k) = x_k y_{k+1}$$

Ισχύει $E_1 E_2 (x_k y_k) = x_{k+1} y_{k+1} = E(x_k y_k)$ στι $E = E_1 E_2 = E_2 E_1$. Επιπλέον ορίζουμε:

$$\Delta_1 = E_1 - I \quad \text{και} \quad \Delta_2 = E_2 - I$$

Συνεπώς: $\Delta = E - I = \underset{\sim}{E_1} E_2 - I = (I + \Delta_1) E_2 - I$

$$= E_2 + \Delta_1 E_2 - I = \Delta_1 E_2 + \Delta_2$$

και $\Delta^n (x_k y_k) = (\Delta_1 E_2 + \Delta_2)^n (x_k y_k)$. Αλλά:

$$\cancel{\Delta^n (x_k} \; (\Delta_1 E_2 + \Delta_2)^n (x_k y_k) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r (\Delta_1 E_2)^r \Delta_2^{n-r} (x_k y_k)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r \Delta_1^r E_2^r \Delta_2^{n-r} (x_k y_k),$$

Έχουμε:

$$\Delta_1^r E_2^r \Delta_2^{n-r} (x_k y_k) = \Delta_1^r E_2^r (x_k \Delta^{n-r} y_k)$$

$$= \Delta_1^r (x_k E^r \Delta^{n-r} y_k)$$

$$= \Delta_1^r (x_k \Delta^{n-r} E^r y_k)$$

$$= \Delta_1^r (x_k \Delta^{n-r} y_{k+r})$$

$$= (\Delta^r x_k)(\Delta^{n-r} y_{k+r}). \qquad (*)$$

Χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες:

$$\Delta E = E\Delta \Rightarrow \Delta^n E^m = E^m \Delta^n \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Delta_2 (x_k y_k) = x_k \Delta y_k$$

$$E_2 (x_k y_k) = x_k E y_k$$

$$\Delta_1 (x_k y_k) = (\Delta x_k) y_k.$$

Από την $(*)$ έχουμε τη ζητούμενη σχέση. $\square$

<u>Παραδείγματα</u>:

1. $y_k = c \Rightarrow \Delta y_k = c - c = 0$
2. $y_k = k \Rightarrow \Delta y_k = (k+1) - k = 1$
3. $y_k = k^n \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \Delta y_k = (k+1)^n - k^n \Rightarrow$

$$\Delta y_k = \cancel{k^n} + n k^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} k^{n-2} + \dots + 1 - \cancel{k^n}$$

$$= n k^{n-1} + {}^nC_2 k^{n-2} + \dots + 1$$

4. $y_k = (-1)^k \Rightarrow \Delta y_k = y_{k+1} - y_k = (-1)^{k+1} - (-1)^k$
$= 2(-1)^{k+1}$

5. $y_k = k(-1)^k \Rightarrow \Delta y_k = (k+1)(-1)^{k+1} - k(-1)^k \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta y_k = (k+1+k)(-1)^{k+1} = (2k+1)(-1)^{k+1}$

6. $y_k = a^k \Rightarrow \Delta y_k = a^{k+1} - a^k = (a-1)a^k$
και γενικότερα $\Delta^n y_k = (a-1)^n a^k$ καί γιά $a=2$
$\Delta^n(2^k) = 2^k$.

<u>Ιδιότητες τελεστή E</u>:

1. $E(x_k y_k) = x_{k+1} y_{k+1} = E(x_k)\, E(y_k)$
2. $E(y_k^n) = y_{k+1}^n = [E(y_k)]^n$
3. Αν $f_i(k)$, $i=1,2,\dots n$, πολυώνυμα ως πρός k:
$E^m[f_1(k) \dots f_n(k)] = E^m[f_1(k)] \dots E^m[f_n(k)]$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω P_k πολυώνυμο ως πρός k βαθμού n:

$$P_k = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n$$

Τότε: $\Delta^n P_k = a_0\, n!$ καί $\Delta^{n+m} P_k = 0$ $(m \in \mathbb{N})$.

<u>Απόδειξη</u>: $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k = a_0(k+1)^n + a_1(k+1)^{n-1} + \dots + a_n$

$$-(a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_n)$$

$$\Rightarrow \Delta P_k = a_0(\cancel{k^n} + n k^{n-1} + \dots + 1) + a_1(\cancel{k^{n-1}} + (n-1)k^{n-2} + \dots)$$

$$+ a_n - (\cancel{a_0 k^n} + \cancel{a_1 k^{n-1}} + \dots + a_n).$$

$$= n a_0 k^{n-1} + q_k^n \quad , \quad \partial(q_k^n) < n-1$$

Επαγωγικά: $\Delta^2 P_k = a_0 n(n-1) k^{n-2} + q_k^{n-1}$, $\partial(q_k^{n-1}) < n-2$

καί $\Delta^n P_k = a_0 n(n-1)\cdots 1 = a_0 n!$ (σταθερά)

καί επομένως $\Delta^{n+1} P_k = \Delta^{n+2} P_k = \cdots = 0$.

Ο τελεστής Δ^{-1}

Ορισμός(*): Ο τελεστής Δ^{-1} δρά πάνω στό y_k έτσι ώστε $\Delta(\Delta^{-1}y_k) = y_k$. Έστω $\Delta^{-1}y_k = z_k \Rightarrow y_k = \Delta z_k$
$\Rightarrow z_{k+1} - z_k = y_k$, δηλ.:

$$\left.\begin{aligned} z_k - \cancel{z_{k-1}} &= y_{k-1} \\ \cancel{z_{k-1}} - \cancel{z_{k-2}} &= y_{k-2} \\ &\vdots \\ \cancel{z_2} - z_1 &= y_1 \end{aligned}\right\}$$

Προσθέτοντας $z_k - z_1 = y_1 + y_2 + \cdots + y_{k-1} = \sum_{r=1}^{k-1} y_r$

$$\Rightarrow z_k = \Delta^{-1} y_k = c + \sum_{r=1}^{k-1} y_r, \quad c \in \mathbb{R} \text{ (αυθαίρετη σταθερά)}$$

Παρατήρηση: $\Delta\Delta^{-1} \neq \Delta^{-1}\Delta$

$$(\Delta^{-1}\Delta)y_k = \Delta^{-1}(\Delta y_k) = \Delta^{-1}(y_{k+1} - y_k) = c_1 + \sum_{r=1}^{k-1}(y_{r+1} - y_r)$$

$$= c_1 + (\cancel{y_2} - y_1) + (y_3 - \cancel{y_2}) + \cdots + (y_k - \cancel{y_{k-1}})$$

$$= c_1 + y_k - y_1 = c_2 + y_k = c_2 + (\Delta\Delta^{-1})y_k$$

Άρα $\Delta^{-1}\Delta y_k$ καί $\Delta\Delta^{-1}y_k$ διαφέρουν κατά μια σταθερά.

(*) Θεωρούμε ότι οι ακολουθίες ορίζονται ως $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Γιά ακολουθίες $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ έχουμε $\Delta^{-1}(y_k) = c + \sum_{r=0}^{k-1} y_r$.

<u>Ερμηνεία:</u> Ο τελεστής Δ είναι απεικόνιση (γραμμική) από τον χώρο των ακολουθιών $\{(y_k) : k \in \mathbb{N}\} := A(\mathbb{N})$ στον εαυτό του.

$$\Delta : A(\mathbb{N}) \to A(\mathbb{N})$$

$$\Delta[(y_k)] = (y_{k+1}) - (y_k)$$

Αν $(y_k) = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots)$

$$(y_{k+1}) = (y_2, y_3, y_4, \dots, y_{n+1}, \dots)$$

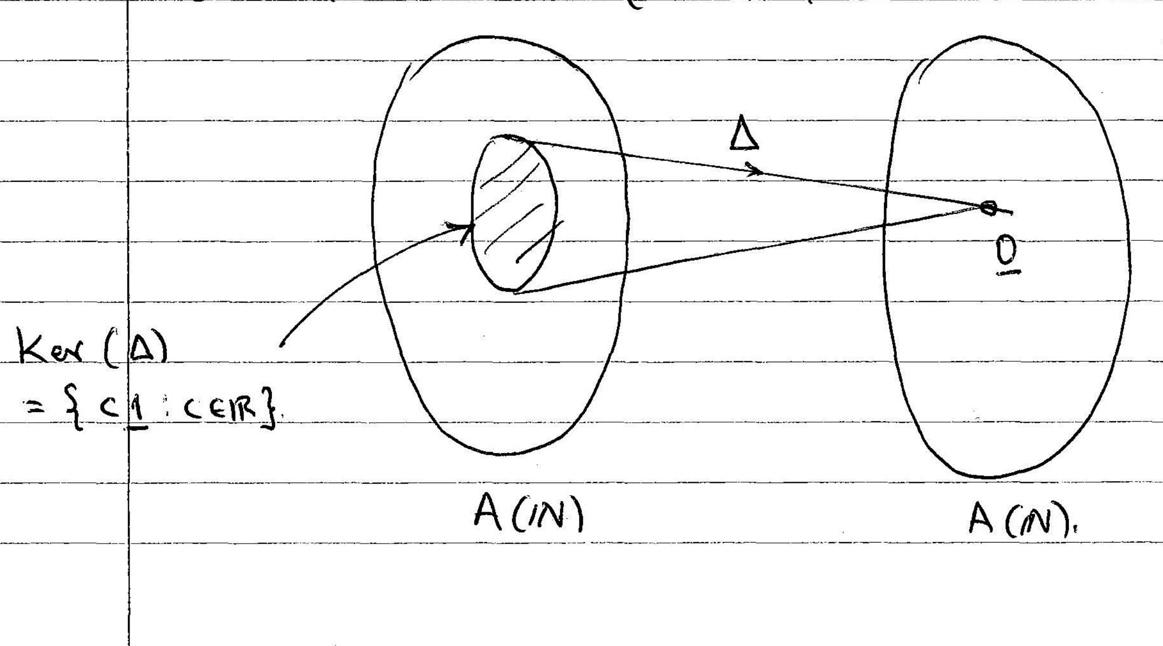
και $\Delta[(y_k)] = (y_2 - y_1, y_3 - y_2, \dots, y_{n+1} - y_n, \dots)$.

Η $\Delta(\cdot)$ δεν είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Ο πυρήνας της $\Delta(\cdot)$ είναι:

$$\mathrm{Ker}(\Delta) = \{ (y_k) \in A(\mathbb{N}) : \Delta(y_k) = \underline{0} \}$$

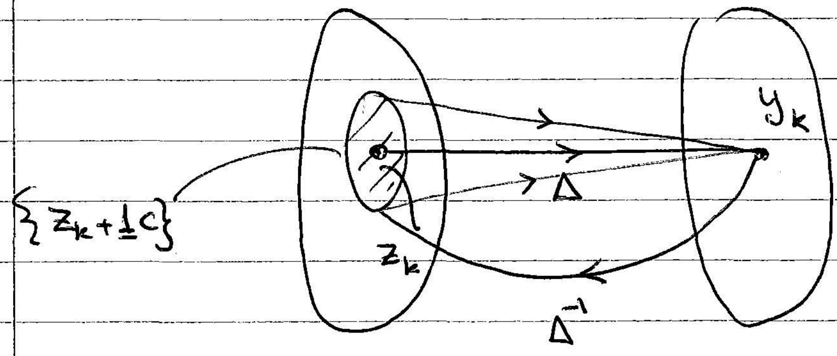
$$= \{ c\underline{1} = (c, c, \dots c, \dots) : c \in \mathbb{R} \} =$$

τό σύνολο των σταθερών ακολουθιών.



Επομένως, αν $\Delta(z_k) = y_k$, τότε και

$\Delta(z_k + c\,\underline{1}) = y_k \quad \forall c \in \mathbb{R}$



και $\Delta(\Delta^{-1} y_k) = y_k$, $\Delta^{-1}(\Delta(z_k)) = z_k + \underline{1}c$

<u>Πρόταση.</u> Γιά κάθε ζεύγος $(x_k), (y_k)$, $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{r=1}^{k-1} y_r \Delta x_r = x_k y_k - \sum_{r=1}^{k-1} x_{r+1} \Delta y_r - x_1 y_1.$$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\Delta(x_k y_k) = x_{k+1} \Delta y_k + y_k \Delta x_k$$

$$\Rightarrow y_k \Delta x_k = \Delta(x_k y_k) - x_{k+1} \Delta y_k$$

$$\Rightarrow \Delta^{-1}(y_k \Delta x_k) = \Delta^{-1}\Delta(x_k y_k) - \Delta^{-1}(x_{k+1} \Delta y_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{k-1} y_r \Delta x_r + c_1 = x_k y_k + c_2 - \left[\sum_{r=1}^{k-1} x_{r+1} \Delta y_r + c_3\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{r=1}^{k-1} y_r \Delta x_r = x_k y_k - \sum_{r=1}^{k-1} x_{r+1} \Delta y_r + c$$

Εφαρμόζοντας γιά $k = 1 \Rightarrow 0 = x_1 y_1 + c \Rightarrow c = -x_1 y_1$

$\square$

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

Η γενική μορφή μιάς γραμμικής ε.δ. πρώτης τάξης:

$$y_{k+1} - P_k y_k = q_k \qquad (*)$$

οπου P_k, q_k δοθείσες ακολουθίες. Αν $q_k = 0$ $\forall k$, τότε η εξίσωση είναι ομογενής (διαφορετικά μή-ομογενής).

<u>Θεώρημα:</u> Τό πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ):

$$y_{k+1} - P_k y_k = q_k, \quad y_0 = \alpha \ (\cancel{P_k \neq 0}), \ k \in \mathbb{N}_0$$

έχει μοναδική λύση.

<u>Απόδειξη:</u> Ειδική περίπτωση γενικότερου Θεωρήματος (Θ.1.1)

<u>Πόρισμα:</u> Αν $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$ λύσεις της ε.δ. (*) τότε η διαφορά τους $y_k^{(0)} = y_k^{(1)} - y_k^{(2)}$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς:

<u>Απόδειξη:</u> Από τήν υπόθεση: $y_{k+1}^{(1)} - P_k y_k^{(1)} = q_k$ καί $y_{k+1}^{(2)} - P_k y_k^{(2)} = q_k$ $\forall k$. Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$y_{k+1}^{(1)} - y_{k+1}^{(2)} - P_k \left(y_k^{(1)} - y_k^{(2)} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ $y_k^{(0)}$ είναι λύση της ε.δ.

<u>Θεώρημα:</u> Η γενική λύση της ε.δ. (*) είναι άθροισμα τής γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς καί μιάς μερικής (ειδικής) λύσης της (*).

<u>Απόδειξη</u>: Έστω

$\mathcal{L}_{\mu o} = \{ y_k : y_{k+1} - p_k y_k = q_k \quad \forall k \}$ καί

$\mathcal{L}_{o\mu} = \{ y_k : y_{k+1} - p_k y_k = 0 \quad \forall k \}$

τά σύνολα λύσεων της μή-ομογενούς καί ομογενούς, αντίστοιχα. Έστω $\hat{y}_k \in \mathcal{L}_{\mu o}$ καί $y_k \in \mathcal{L}_{\mu o}$ αυθαίρετη ακολουθία. Τότε $y_k - \hat{y}_k \in \mathcal{L}_{o\mu} \Rightarrow y_k = w_k + \hat{y}_k$ γιά κάποια $w_k \in \mathcal{L}_{o\mu}$ $\Rightarrow \mathcal{L}_{\mu o} \subseteq \mathcal{L}_{o\mu} + \{\hat{y}_k\}$. Αντίστροφα, αν $y_k = w_k + \hat{y}_k$ όπου w_k αυθαίρετη λύση της ομογενούς, τότε ~~και~~ y_k είναι λύση της μή ομογενούς, δηλ. $y_k \in \mathcal{L}_{\mu o}$ καί $\mathcal{L}_{o\mu} + \{\hat{y}_k\} \subseteq \mathcal{L}_{\mu o}$. Συνεπώς $\mathcal{L}_{\mu o} = \mathcal{L}_{o\mu} + \{\hat{y}_k\}$. □

<u>Πρόταση</u>: Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης: $y_{k+1} - p_k y_k = 0$ δίδεται από τήν εξίσωση:

$$y_k = c \prod_{i=0}^{k-1} p_i = c\, p_0 p_1 \cdots p_{k-1} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω y_0 η δοσμένη αρχική συνθήκη, οπότε

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= p_0 y_0 \\ y_2 &= p_1 y_1 \\ &\vdots \\ y_k &= p_{k-1} y_{k-1} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow y_k = p_0 p_1 \cdots p_{k-1} y_0 = y_0 \prod_{i=0}^{k-1} p_i$$

καί επειδή τό y_0 μπορεί νά πάρει οποιαδήποτε τιμή, η γενική λύση της ομογενούς είναι: $y_k = c \prod_{i=0}^{k-1} p_i$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Πρόταση: Μια ειδική λύση της (*) είναι η:

$$y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} p_i\right) \sum_{r=0}^{k-1} \frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i}$$

Απόδειξη: Η εξίσωση είναι:

$$y_{k+1} - p_k y_k = q_k \Rightarrow \frac{y_{k+1}}{\prod_{i=0}^{k} p_i} - \frac{y_k}{\prod_{i=0}^{k-1} p_i} = \frac{q_k}{\prod_{i=0}^{k} p_i}$$
$(k \in \mathbb{N}_0)$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{y_k}{\prod_{i=0}^{k-1} p_i}\right) = \frac{q_k}{\prod_{i=0}^{k} p_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_k}{\prod_{i=0}^{k-1} p_i} = \Delta^{-1}\left(\frac{q_k}{\prod_{i=0}^{k} p_i}\right) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i} + c$$

$$\Rightarrow y_k = \left(\prod_{i=0}^{k-1} p_i\right)\left(c + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i}\right) \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

όπου $c \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $c=0$ παίρνουμε μία ειδική λύση. □

Από τις δύο τελευταίες προτάσεις, η γενική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$(**) \qquad y_k = c \prod_{i=0}^{k-1} p_i + \prod_{i=0}^{k-1} p_i \sum_{r=0}^{k-1} \frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα: Η ομογενής εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης με σταθερούς αντελεστές: $y_{k+1} - \beta y_k = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, έχει γενική λύση $y_k = c_1 \beta^k$, όπου $c_1 \in \mathbb{R}$. Η αντίστοιχη μη-ομογενής: $y_{k+1} - \beta y_k = \alpha$, $k \in \mathbb{N}_0$, έχει λύση (**) με $p_i = \beta$, $q_i = \alpha$. Όταν $\beta = 0$, προφανώς η λύση είναι $y_k = \alpha$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Στην περίπτωση $\beta \neq 0$

$$\begin{cases} y_{k+1} - p_k y_k = q_k \quad (k \in \mathbb{N}_0) & ; \quad y_{k+1} - \beta y_k = \alpha \quad (k \in \mathbb{N}_0) \\ y_k = c_1 \prod_{i=0}^{k-1} p_i + \prod_{i=0}^{k-1} p_i \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i} \right) & ; \quad y_k = c_1 \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} \beta}_{\beta^k} + \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} \beta}_{\beta^k} \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i} \right) \end{cases}$$

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{q_r}{\prod_{i=0}^{r} p_i} = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha}{\beta^{r+1}} = \alpha \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} + \dots + \frac{1}{\beta^k} \right)$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\beta^{k-1}} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1 - \frac{1}{\beta^k}}{1 - \frac{1}{\beta}}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\frac{\beta^k - 1}{\beta^k}}{\frac{\beta - 1}{\beta}} = \frac{\alpha}{\cancel{\beta}} \frac{\cancel{\beta}(\beta^k - 1)}{\beta^k (\beta - 1)}$$

$$\Rightarrow y_k = c_1 \beta^k + \cancel{\beta^k} \frac{\alpha(\beta^k - 1)}{\cancel{\beta^k}(\beta - 1)} = c_1 \beta^k + \frac{\alpha \beta^k}{\beta - 1} - \frac{\alpha}{\beta - 1}$$

$$= \underbrace{\left(c_1 + \frac{\alpha}{\beta - 1} \right)}_{c \in \mathbb{R}} \beta^k - \frac{\alpha}{\beta - 1} = c \beta^k - \frac{\alpha}{\beta - 1} \quad (\beta \neq 1)$$

Όταν $\beta = 1$ η εξίσωση γίνεται: $y_{k+1} - y_k = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta y_k = \alpha \Rightarrow y_k = \sum_{r=0}^{k-1} \alpha + c = c + \alpha k \quad (c \in \mathbb{R}).$$

(Ισοδύναμα: $y_k = c_1 + \sum_{r=0}^{k-1} \left(\alpha / \prod_{i=0}^{r} 1 \right) = c_1 + \alpha k$).

Ισοδύναμη λύση γιά $\beta \neq 0, \beta \neq 1$: Η γενική λύση είναι της μορφής $y_k = y_k^{\mu o} + y_k^{o\mu}$ όπου $y_k^{o\mu}$ η γενική λύση της ομογενούς καί $y_k^{\mu o}$ μια οποιαδήποτε λύση της μη-ομογενούς:
Είναι $y_k^{o\mu} = c \beta^k$ καί επιλέγουμε $y_k^{\mu o} = y_{k+1}^{\mu o}$ (σταθερή λύση)

$$\Rightarrow y_k^{\mu o} = \frac{\alpha}{1 - \beta} \Rightarrow y_k = c \beta^k + \frac{\alpha}{1 - \beta} \quad (c \in \mathbb{R})$$

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση: $y_{k+1} - \underbrace{k}_{p_k} y_k = \underbrace{1}_{q_k}$, $k\in\mathbb{N}$.

Έχουμε: $$y_k = c\prod_{i=1}^{k-1} p_i + \prod_{i=1}^{k-1} p_i \sum_{r=1}^{k-1}\left(\frac{q_r}{\prod_{i=1}^{r} p_i}\right)$$

$$= c\prod_{i=1}^{k-1} \cancel{k} i + \prod_{i=1}^{k-1} i \sum_{r=1} \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} i}$$

$$= \cancel{c(k-1)!}\; c(k-1)! + (k-1)! \sum_{r=1}^{k-1}\left(\frac{1}{r!}\right)$$

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση: $y_{k+1} - \underbrace{e^{2k}}_{p_k} y_k = 0$ $(k\in\mathbb{N}_0)$

Έχουμε:

$$y_k = c\prod_{r=1}^{k-1} e^{2r} = c\, e^{2}\cdot e^{4}\cdots e^{2(k-1)}$$

$$= c\exp\{2\underbrace{(1+2+\cdots+k-1)}_{\frac{(k-1)k}{2}}\}$$

$$= c\, e^{(k-1)k}, \quad c\in\mathbb{R} \quad (k\in\mathbb{N}_0)$$

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση: $(k+1)y_{k+1} - k y_k = 0$ $(k\in\mathbb{N})$. Η εξίσωση γράφεται:

$$\Delta(k y_k) = 0 \Rightarrow k y_k = c \Rightarrow y_k = \frac{c}{k} \quad (c\in\mathbb{R})$$

Ισοδύναμα η εξίσωση γράφεται: $y_{k+1} - \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{p_k} y_k = 0$

$$\Rightarrow y_k = c\prod_{r=1}^{k-1} p_r = c\prod_{r=1}^{k-1}\frac{r}{r+1} = c\,\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdots\frac{\cancel{k-2}}{\cancel{k-1}}\cdot\frac{\cancel{k-1}}{k}$$

$$= \frac{c}{k} \quad (k\in\mathbb{N}).$$

Έστω η εξίσωση: $(k+1)y_{k+1} - k y_k = k$ $(k\in\mathbb{N})$

$$\Rightarrow \Delta(k y_k) = k \Rightarrow k y_k = \sum_{r=1}^{k-1} r + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k y_k = 1+2+\dots+(k-1) + c = \frac{k(k-1)}{2} + c$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{k-1}{2} + \frac{c}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η εξίσωση:

$$y_{k+1} - y_k = (n+1) k^n \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Η αντίστοιχη ομογενής: $y_{k+1} - y_k = 0 \Rightarrow y_k = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$

Η αρχική εξίσωση γράφεται:

$$\Delta y_k = (n+1) k^n \Rightarrow y_k = (n+1) \sum_{r=1}^{k-1} r^n + c_2$$

$$\Rightarrow y_k = \underbrace{c_1 + c_2}_{c} + (n+1) \sum_{r=1}^{k-1} r^n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

<u>Παράδειγμα</u>: $y_{k+1} - y_k = e^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Γραμμική μη-ομογενής μέ $p_k = 1$, $q_k = e^k$. Επομένως

$$y_k = c_1 \prod_{i=0}^{k-1} p_i + \prod_{i=0}^{k-1} p_i \sum_{r=0}^{k-1} \left(\frac{q_r}{\prod_{i=0}^{k-1} p_i} \right) =$$

$$= c_1 + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{e^r}{1} = c + 1 + e + e^2 + \dots e^{k-1}$$

$$= c_1 + \frac{e^k - 1}{e-1} = \underbrace{\left(c_1 - \frac{1}{e-1} \right)}_{c} + \frac{e^k}{e-1} = c + \frac{e^k}{e-1}.$$

<u>Ισοδύναμα</u>: Λύση ομογενούς $y_{k+1} - y_k = 0$: $y_k = c$ (σταθερά)

Σταθερή λύση μή ομογενούς: Δέν υπάρχει! Άλλη λύση:

$y_k = \alpha e^k \Rightarrow y_{k+1} = \alpha e^{k+1} = \alpha e \cdot e^k \Rightarrow \alpha e \cdot e^k - \alpha e^k = e^k$

$\Rightarrow \cancel{(\alpha - 1)}\ \alpha(e-1) = 1 \Rightarrow \alpha = 1/(e-1) \Rightarrow y_k = c + \frac{e^k}{e-1}.$

<u>Παράδειγμα</u>: Θεωρούμε τό Π.Α.Τ.: $y_{k+1} = y_k + k + 1$, $y_0 = 1$. Έχουμε $\Delta y_k = k+1 \Rightarrow y_k = \sum_{r=0}^{k-1} (r+1) + c =$

$= \underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + c = \frac{k(k+1)}{2} + c$. $y_0 = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow y_k = \frac{k(k+1)}{2} + 1$ $(k \in \mathbb{N}_0).$

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών $1^{ης}$ τάξης μέ σταθερούς συντελεστές

Εξετάζουμε την εξίσωση διαφορών (μέ $A \neq 0$):

$$y_{k+1} = A y_k + B \qquad , k \in \mathbb{N}_0$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση γιά $k = 0, 1, 2, \ldots$

$k=0 \Rightarrow \quad y_1 = A y_0 + B$

$k=1 \Rightarrow \quad y_2 = A y_1 + B = A(A y_0 + B) + B = A^2 y_0 + B(1+A)$

$k=2 \Rightarrow \quad y_3 = A y_2 + B = A\left[A^2 y_0 + B(1+A)\right] + B$

$$= A^3 y_0 + B(1 + A + A^2)$$

Επαγωγικά:

$$y_k = A^k y_0 + B(1 + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$$

Έχουμε: $\left.\begin{aligned} 1 + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} &= \frac{1-A^k}{1-A} && \text{αν } A \neq 1 \\ &= k && \text{αν } A = 1 \end{aligned}\right\}$

Επομένως: $\left.\begin{aligned} y_k &= A^k y_0 + B\,\frac{1-A^k}{1-A} && \text{αν } A \neq 1 \\ &= y_0 + kB && \text{αν } A = 1 \end{aligned}\right\}.$

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση: $y_{k+1} = 2 y_k + 1 \quad , k \in \mathbb{N}_0$.
Θέτοντας $A = 2,\ B = 1$:

$$y_k = 2^k y_0 + 1 \cdot \frac{1-2^k}{1-2} = 2^k y_0 + 2^k - 1$$

$$= (y_0+1)2^k - 1$$

Αν $y_0 = -1$ τότε $y_k = -1 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Αν $y_0 \neq -1$ τότε $\lim_{k\to\infty} y_k = +\infty$ αν $y_0 > -1$ και $\lim_{k\to\infty} y_k = -\infty$ αν $y_0 < -1$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η εξίσωση: $y_{k+1} = 0.5\, y_k + 2$. Θέτοντας $A = 0.5$, $B = 2$:

$$y_k = 0.5^k y_0 + 2 \frac{1-0.5^k}{1-0.5} = 0.5^k y_0 + 4(1-0.5^k)$$

$$= (y_0 - 4)\, 0.5^k + 4$$

Αν $y_0 = 4$ τότε $y_k = 4 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Αν $y_0 \neq 4$, τότε $\lim_{k\to\infty} y_k = 4$.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η εξίσωση: $y_{k+1} = -y_k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$
Θέτοντας $A = -1$, $B = 1$:

$$y_k = (-1)^k y_0 + 1 \frac{1-(-1)^k}{1-(-1)} = (-1)^k y_0 + \frac{1}{2}(1-(-1)^k)$$

$$= \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)(-1)^k + \frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι αν $y_0 = \frac{1}{2}$, τότε $y_k = \frac{1}{2} \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Αν $y_0 \neq \frac{1}{2}$ τότε γιά $k = 2n$ έχουμε $y_k = y_{2n} = y_0$ ενώ γιά $k = 2n+1$: $y_k = y_{2n+1} = -y_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 - y_0$, δηλ. δεν υπάρχει $\lim_{k\to\infty} y_k$ και η λύση ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος.

Παράδειγμα: Αν κάποιος πάρει δάνειο A με επιτόκιο ε την περίοδο το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε N περιόδους, πόση θα είναι η δόση ανά περίοδο;

Αν y_k το ποσό που απομένει μετά από k περιόδους, τότε

$$y_{k+1} = y_k + \varepsilon y_k - P \quad , k=0,1,2,\ldots$$

με συνοριακές συνθήκες $y_0 = A$, $y_N = 0$. Επομένως:

$$y_{k+1} = (1+\varepsilon) y_k - P$$

$$\Rightarrow y_k = A(1+\varepsilon)^k - P \frac{1-(\varepsilon+1)^k}{1-(\varepsilon+1)} =$$

$$= A(1+\varepsilon)^k + \frac{P}{\varepsilon}\left[1-(\varepsilon+1)^k\right]$$

Θέτοντας $k=N \Rightarrow y_N = 0$

$$0 = A(1+\varepsilon)^N + \frac{P}{\varepsilon}\left[1-(\varepsilon+1)^N\right].$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\varepsilon}\left[(\varepsilon+1)^N - 1\right] = A(1+\varepsilon)^N$$

$$\Rightarrow P = A \frac{\varepsilon(\varepsilon+1)^N}{(\varepsilon+1)^N - 1} = A \frac{\varepsilon}{1-(\varepsilon+1)^{-N}}$$

Σημεία Ισορροπίας - Ευστάθεια

Έστω η εξίσωση διαφορών $1^{ης}$ τάξης : $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

<u>Ορισμός</u> : Το σημείο α είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος αν είναι σταθερό σημείο της συνάρτησης $f(\cdot)$, δηλαδή ικανοποιεί την αλγεβρική εξίσωση $\alpha = f(\alpha)$. Ισοδύναμα στο α είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος αν $y_0 = \alpha \Rightarrow y_k = \alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

<u>Παράδειγμα</u> : Θεωρούμε τη γραμμική εξίσωση διαφορών $1^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές : $y_{k+1} = Ay_k + B$, $k \in \mathbb{N}_0$. Αν α είναι σημείο ισορροπίας τότε :

$$\alpha = A\alpha + B \Leftrightarrow (1-A)\alpha = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{B}{1-A}, \; A \neq 1$$

δηλ. το $\alpha = B(1-A)^{-1}$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Όταν $A = 1$ η εξίσωση δεν έχει σ.ι (εκτός αν $B = 0$, οπότε κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι σ.ι.)

<u>Παράδειγμα</u> : Θεωρούμε την μη-γραμμική εξίσωση διαφορών $2^{ης}$ τάξης :

$$y_{k+1} = (y_k + 4)y_k + 2 \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Τα σημεία ισορροπίας είναι οι λύσεις της εξίσωσης :

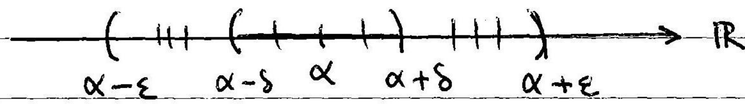
$$\alpha = (\alpha+4)\alpha + 2 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow (\alpha+1)(\alpha+2) = 0$$

δηλ. $\alpha = -1$ ή $\alpha = -2$. Άρα υπάρχουν δύο σταθερές λύσεις της εξίσωσης : $y_k = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$, και $y_k = -2 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

<u>Παρατήρηση</u> : Γεωμετρικά τα σ. ισορροπίας είναι τα σημεία τομής

του γραφήματος της $y=f(x)$ με την ευθεία $y=x$.

<u>Ορισμός</u>: Το σημείο ισορροπίας α είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : |y_0-\alpha|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |y_k-\alpha|<\varepsilon \quad \forall k\in \mathbb{N}_0$.



Το α είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν μπορούμε να περιορίσουμε την ακολουθία y_k (λύση του Π.Α.Τ) σε διάστημα κέντρου α και αυθαίρετης ακτίνας $\varepsilon>0$ (οσοδήποτε μικρής) περιορίζοντας την αρχική τιμή y_0 σε κατάλληλο διάστημα, κέντρου α και ακτίνας $\delta=\delta(\varepsilon)>0$.

<u>Ορισμός</u>: Αν ένα σημείο ισορροπίας δεν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov), τότε λέγεται ασταθές σ. ισορροπίας.

<u>Ορισμός</u>: Το σημείο ισορροπίας α είναι ελκυστής (σημείο έλξης) αν υπάρχει $\eta>0 : |y_0-\alpha|<\eta \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} y_k=\alpha$. Αν $\eta=\infty$ το α είναι καθολικός ελκυστής (καθολικό σημείο έλξης).

<u>Ορισμός</u>: Το σημείο ισορροπίας α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές κατά Lyapunov και σημείο έλξης. Αν $\eta=\infty$ (στον ορισμό του σημείου έλξης) τότε το α είναι καθολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

<u>Θεώρημα</u>: Το σημείο ισορροπίας $\alpha=B/(1-A)$ της εξίσωσης διαφορών:

$$y_{k+1}=Ay_k+B, \quad A\neq 1, \quad k\in\mathbb{N}_0$$

είναι καθολικά ασυμπτωτικά ευσταθές αν $|A|<1$. και $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=\alpha$

γιά κάθε αρχική τιμή $y_0 \in \mathbb{R}$. Όταν $|A|>1$ τό α είναι ασταθές και $\lim_{k\to\infty} |y_k| = \infty$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \neq \alpha$. Τέλος αν $A=-1$ τότε $y_0 = y_2 = y_4 = \cdots$ καί $y_1 = y_3 = y_5$ και τό α είναι ευσταθές κατά Lyapunov (αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές).

<u>Απόδειξη</u>: Αν $A \neq 1$ η λύση της εξίσωσης είναι:

$$y_k = y_0 A^k + B\,\frac{1-A^k}{1-A} = \Big(y_0 - \underbrace{\frac{B}{1-A}}_{\alpha}\Big) A^k + \underbrace{\frac{B}{1-A}}_{\alpha}.$$

$$\Rightarrow \quad y_k = (y_0-\alpha)A^k + \alpha$$

Συνεπώς: $y_k - \alpha = (y_0-\alpha)A^k \Rightarrow |y_k - \alpha| = |A|^k\,|y_0-\alpha|$.
Έστω $\varepsilon>0$ καί $\delta=\varepsilon$. Αν $|A|<1$, τότε $|y_0-\alpha|<\delta \Rightarrow$ $|y_k-\alpha| = |A|^k |y_0-\alpha| \le |y_0-\alpha| < \varepsilon$ και τό α είναι ευσταθές (κατά Lyapunov). Εφόσον επίσης $|A|<1 \Rightarrow y_k \to \alpha$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ τό α είναι καθολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Αν $|A|>1$ τό α είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Διότι, αν τό α ήταν ευσταθές (κατά Lyapunov), γιά $\varepsilon=1$ θά υπήρχε $\delta>0$ τέτοιο ώστε $\forall y_0$: $|y_0-\alpha|<\delta \Rightarrow |y_k-\alpha|<1$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.
Επομένως καί γιά τό $y_0 = \alpha + \frac{\delta}{2}$ θά είχαμε $|y_k - \alpha| < 1$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.
Αλλά τότε:

$$|y_k - \alpha| = |A|^k\,|y_0-\alpha| = |A|^k \frac{\delta}{2} < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad |A|^k < \frac{2}{\delta} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

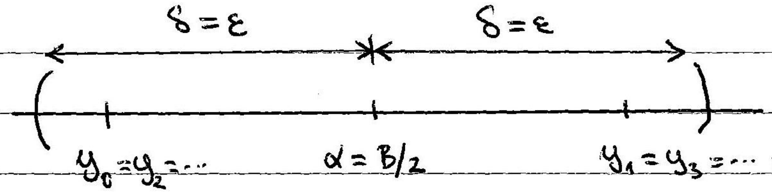
που είναι αδύνατον καθώς $|A|^k \to \infty$ όταν $|A|>1$. Άρα τό α σε αυτήν την περίπτωση είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

Τέλος στην περίπτωση $A=-1$ τό σημείο ισορροπίας είναι:

$\alpha = -\alpha + B \Rightarrow \alpha = B/2$. Επίσης:

$$y_{k+2} = -y_{k+1} + B = -(-y_k + B) + B = y_k$$

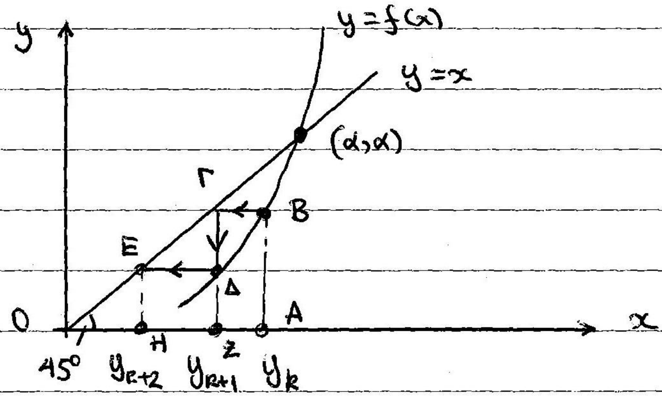
δηλαδή: $y_0 = y_2 = y_4 = \cdots = y_{2k} = \cdots \neq$ και $y_1 = y_3 = \cdots =$
$= \cdots = y_{2k+1} = \cdots = B - y_0$



Έστω $\varepsilon > 0$ (αυθαίρετο) και $\delta = \varepsilon$. Τότε, αν $|y_0 - \alpha| < \delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |y_0 - \frac{B}{2}| < \varepsilon$ έχουμε $|y_{2k} - B/2| < \varepsilon$ και $|y_{2k+1} - B/2|$
$= |B - y_0 - B/2| = |\frac{B}{2} - y_0| < \varepsilon$. Επομένως, γιά κάθε $k \in \mathbb{N}_0$
$|y_k - B/2| < \varepsilon$ και τό σύστημα είναι Lyapunov-ευσταθές. □

Γεωμετρική-γραφική μέθοδος χαρακτηρισμού σημείων ισορροπίας

Έστω η εξίσωση διαφορών $y_{k+1} = f(y_k)$. Τά σταθερά σημεία της $f(\cdot)$ είναι τά σημεία ισορροπίας και γεωμετρικά ορίζονται από τα σημεία τομής του γραφήματος της $f(\cdot)$ μέ την ευθεία $y = x$.

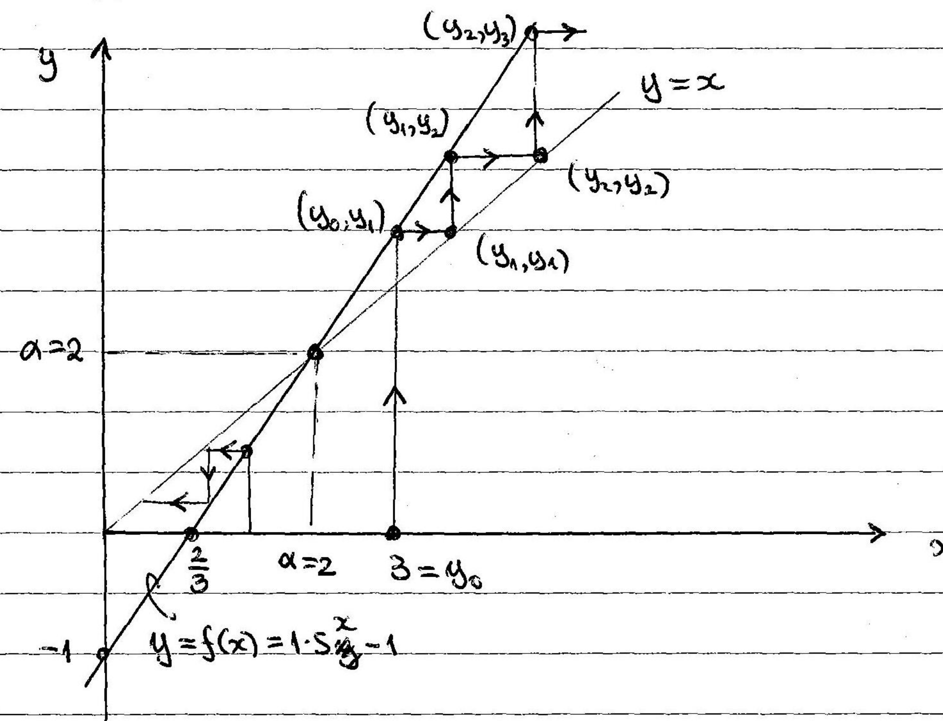


Αν το y_k αντιστοιχεί στό σημείο A γιά κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$, τότε $y_{k+1} =$
$= f(y_k) = (AB) = (\Gamma Z) = (OZ)$. Άρα τό σημείο Z αντιστοιχεί στό y_{k+1}.

Συνεχίζοντας αυτή την διαδικασία (αρχίζοντας από κάποιο y_0) η ακολουθία (γραφικά) συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας α, η αποκλίνει. Άρα μπορούμε να δούμε γραφικά τις ιδιότητα του α.

<u>Παράδειγμα</u>: $y_{k+1} = 1.5\, y_k - 1$, $y_0 = 3$

Το σημείο ισορροπίας: $\alpha = 1.5\alpha - 1 \Rightarrow \alpha = 2$

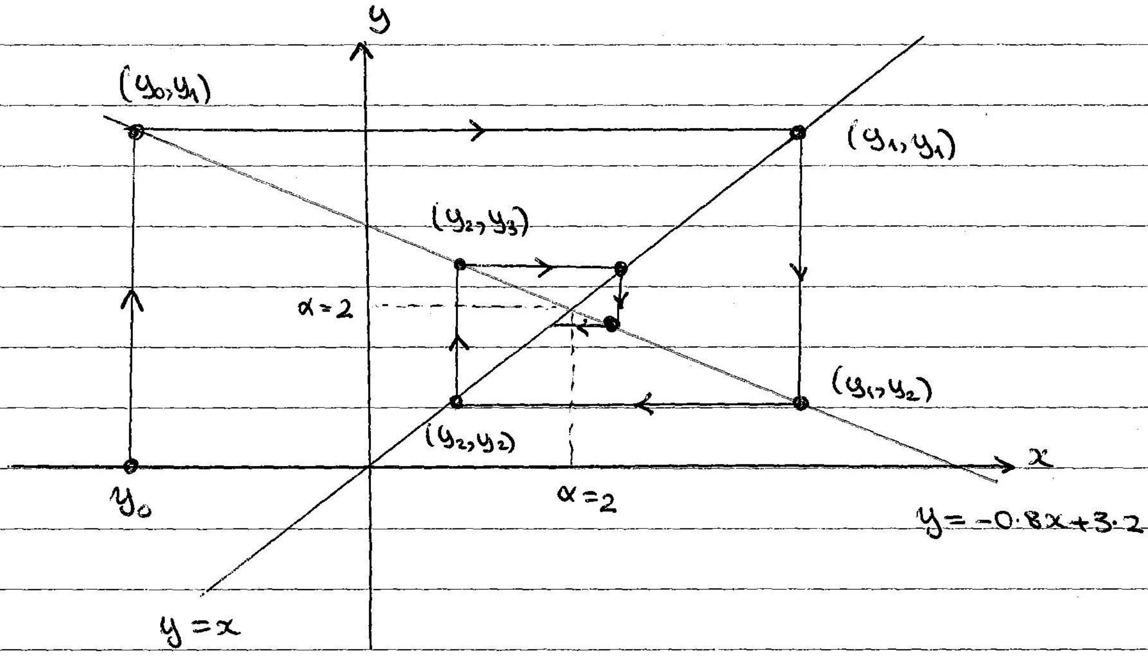


Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αποκλίνει (ανεξάρτητα από το αν $y_0 > \alpha = 2$ η $y_0 < \alpha = 2$). Το σημείο είναι ασταθή ($A = 1.5 > 1$).

<u>Παράδειγμα</u>: $y_{k+1} = -0.8\, y_k + 3.6$ $\quad y_0 = -4$

Το σημείο ισορροπίας είναι $\alpha = -0.8\alpha + 3.6 \Rightarrow 1.8\alpha = 3.6 \Rightarrow \alpha = 2$. Το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές: $|A| = |-0.8| = 0.8 < 1$ αλλά $A < 0$.

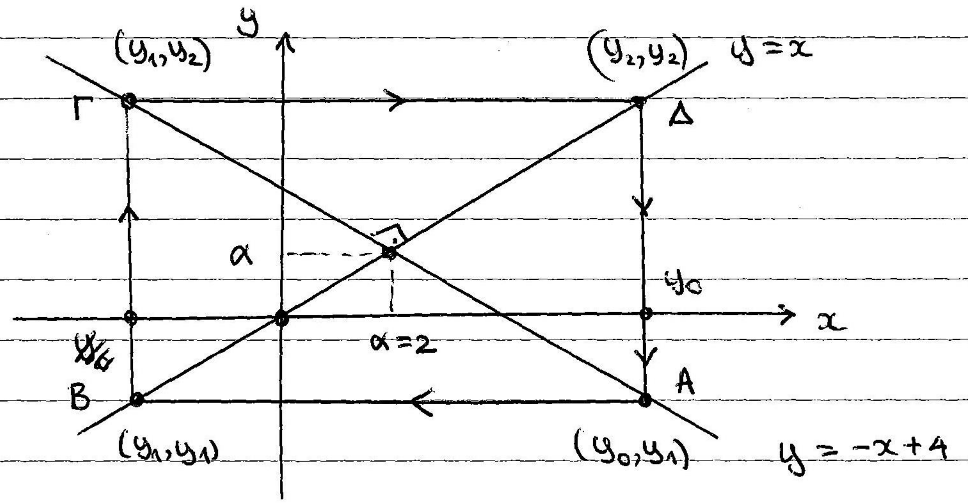
Έχουμε: $y_0 = -4$, $y_1 = 6.8$, $y_2 = -1.84$ κλπ.



Η ακολουθία σημείων (y_k, y_{k+1}) συγκλίνει στο σημείο (α, α) με "αποσβεσμένη" ταλάντωση ($A = -0.8$).

Παράδειγμα: $y_{k+1} = -y_k + 4$, $y_0 = 6$

Σημείο ισορροπίας: $\alpha = -\alpha + 4 \Rightarrow \alpha = 2$



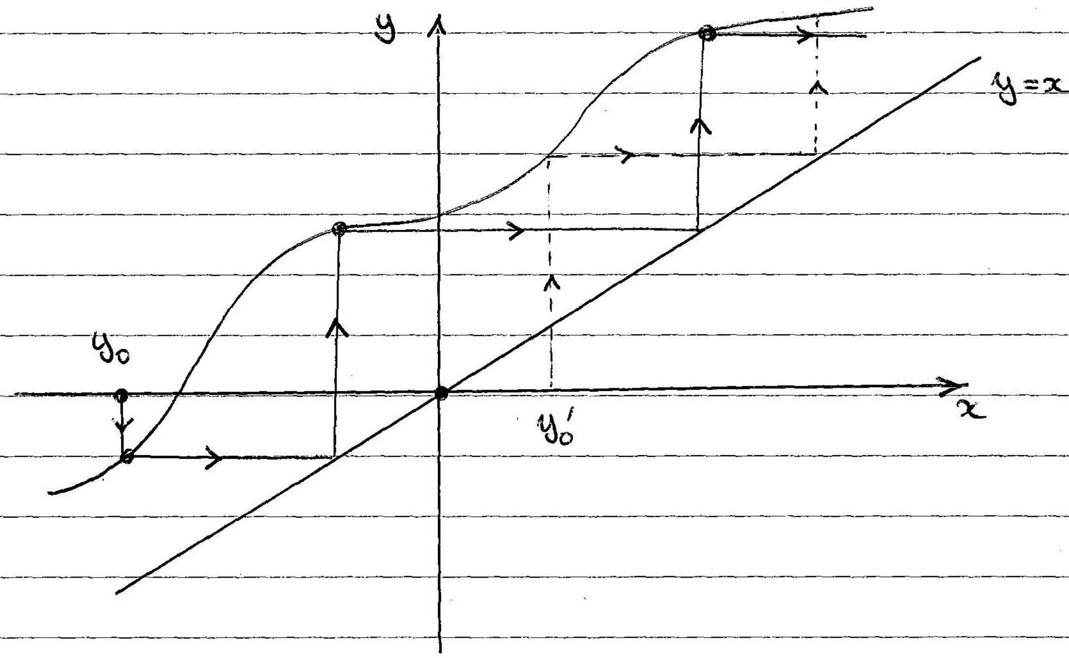
Σταθερή ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας (α, α)

Σημείο A: $(y_0, y_1), (y_2, y_3), \ldots, (y_{2k}, y_{2k+1}), \ldots$

Σημείο Γ: $(y_1, y_2), (y_3, y_4), \ldots, (y_{2k+1}, y_{2k+2}), \ldots$

Παρατηρούμε: Η γωνία μεταξύ των ευθειών $y = x$ και $y = -x + 4$ είναι $90°$.

Παράδειγμα: Έστω εξίσωση διαφορών $y_{k+1} = f(y_k)$ μέ $f(x) > x \ \forall x \in \mathbb{R}$, π.χ.



Εφόσον η εξίσωση $f(x) = x$ δεν έχει λύση, δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας. Γιά κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_k \to \infty$.

Η ανάλυση ευστάθειας γιά τό γραμμικό μοντέλο $y_{k+1} = Ay_k + B$ δίνει καθολικά (global) αποτελέσματα. Γιά τό μή γραμμικό σύστημα, $y_{k+1} = f(y_k)$ η "γραμμικοποίηση" κοντά σέ σημείο ισορροπίας καί η χρήση των αποτελεσμάτων του γραμμικού συστήματος δίνει ισοδύναμα, αλλά τοπικά, αποτελέσματα:

Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στό σημείο ισορροπίας α. Θέτουμε $y_k = \alpha + u_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, οπότε $f(y_k) = f(\alpha + u_k)$. Η γραμμική προσέγγιση στό σημείο $\alpha + u_k$ είναι $f(\alpha + u_k) \cong f(\alpha) + f'(\alpha) u_k$ $= \alpha + f'(\alpha) u_k = \alpha + f'(\alpha)(y_k - \alpha)$. Επομένως, η γραμμική προσέγγιση της εξίσωσης διαφορών $y_{k+1} = f(y_k)$ στό σημείο α είναι:

$$y_{k+1} = \alpha + f'(\alpha)(y_k - \alpha) = f'(\alpha) y_k + \alpha(1 - f'(\alpha))$$

πού είναι εξίσωση $1^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές:
$y_{k+1} = Ay_k + B$, $k \in \mathbb{N}_0$, όπου $A = f'(\alpha)$ και $B = \alpha(1-f'(\alpha))$
είναι δυνατόν νά εξάγουμε κριτήριο ~~της~~ ευστάθειας της μή-γραμμικής εξίσωσης ($y_{k+1} = f(y_k)$) από την γραμμική της προσέγγιση; Αν ναί, τότε περιμένουμε νά έχουμε:

(i) $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \alpha$ ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι.

(ii) $|f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow \alpha$ ασταθές σ.ι.

(Βέβαια τό περισσότερο που μπορούμε να ελπίζουμε είναι τοπικά αποτελέσματα ευστάθειας). Όπως δείχνει τό επόμενο θεώρημα, η διαίσθηση αυτή είναι σωστή. Στην περίπτωση $|f'(\alpha)| = 1$ η γραμμική προσέγγιση δέν αρκεί γιά τον προσδιορισμό τού είδους ευστάθειας του α.

Θεώρημα:

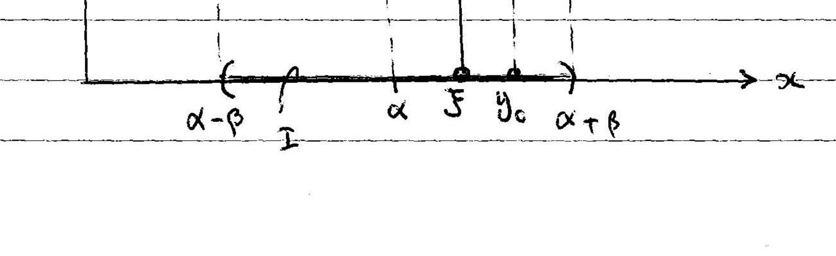
Έστω α σημείο ισορροπίας της $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, καί ότι η $f(\cdot)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο α. Τότε:

(i) $|f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow$ Το α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι.

(ii) $|f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow$ Το α είναι ασταθές σ.ι.

Απόδειξη:

(i) Έστω ότι $|f'(\alpha)| < M < 1$. Τότε, λόγω συνέχειας τής f' υπάρχει διάστημα $I = (\alpha-\beta, \alpha+\beta)$ τέτοιο ώστε $|f'(y)| \le M < 1$ γιά κάθε $y \in I$:



Αν $y_0 \in I$, $y_0 > \alpha$, τότε υπάρχει (από το Θεώρημα Μέσης Τιμής) $\xi \in (\alpha, y_0)$: $f(y_0) - f(\alpha) = f'(\xi)(y_0 - \alpha)$. Παρόμοια αν $y_0 \in I$, $y_0 < \alpha$, τότε υπάρχει $\xi \in (y_0, \alpha)$ με την ίδια ιδιότητα. Και στις δύο περιπτώσεις $\exists \xi \in I : f(y_0) - f(\alpha) = f'(\xi)(y_0 - \alpha)$, και επομένως:

$$|\underbrace{f(y_0)}_{y_1} - \underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}| = |f'(\xi)|\,|y_0 - \alpha| \Rightarrow |y_1 - \alpha| \leq M |y_0 - \alpha|$$

Επαγωγικά:

$$|y_k - \alpha| \leq \underbrace{M^k \overbrace{|y_0 - \alpha|}^{\leq \delta}}_{\leq \varepsilon} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (M<1)$$

Δοθέντος $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Τότε, αν $|y_0 - \alpha| < \delta$:

$$|y_k - \alpha| \leq M^k |y_0 - \alpha| < M^k \varepsilon \quad \begin{cases} < \varepsilon & (k \geq 1) \\ = \varepsilon & (k = 0) \end{cases}.$$

Επομένως $|y_k - \alpha| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ και το α είναι ευσταθές (κατά Lyapunov). Επιπλέον $\forall y_0 \in I$,

$$|y_k - \alpha| \leq M^k |y_0 - \alpha| \to 0 \quad \text{καθώς } k \to \infty$$

και επομένως $y_k \to \alpha$, δηλ. το α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(ii) Υποθέτουμε ότι $|f'(\alpha)| > 1$. Θα δείξουμε ότι το α είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists \varepsilon > 0 : \forall y_0$ με $|y_0 - \alpha| < \varepsilon$, $y_0 \neq \alpha$, $\exists k \in \mathbb{N} : |y_k - \alpha| \geq \varepsilon$.

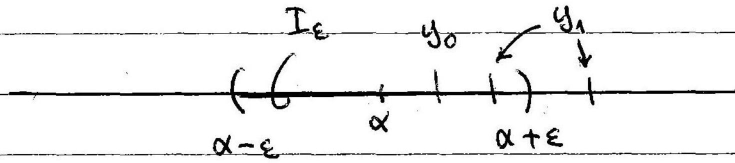
Αν $|f'(\alpha)| > 1$ τότε (λόγω συνέχειας της f') υπάρχει διάστημα $I_\varepsilon = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ και σταθερά $M > 1 : |f'(y)| \geq M > 1$ $\forall y \in I_\varepsilon$. Θα δείξουμε ότι $\forall y_0 \in I_\varepsilon$, $y_0 \neq \alpha$, $\exists k \in \mathbb{N}$ για το οποίο $y_k \notin I_\varepsilon$.

Έστω $y_0 \in I_\varepsilon$, $y_0 \neq \alpha$. Από τό Θεώρημα Μέσης Τιμής:

$$|y_1-\alpha| = |f(y_0)-f(\alpha)| = |f'(\xi)|\cdot|y_0-\alpha|$$

γιά κάποιο $\xi \in (\alpha, y_0)$ (ή $\xi \in (y_0, \alpha)$). Επομένως:

$$|y_1-\alpha| \geq M\,|y_0-\alpha| > |y_0-\alpha|$$



Αν $y_1 \notin I_\varepsilon$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε τήν διαδικασία καί έχουμε

$$|y_2-\alpha| \geq M\,|y_1-\alpha| \geq M^2\,|y_0-\alpha|$$

Επειδή $M>1$, $M^i \to \infty$ καθώς $i \to \infty$ καί είναι προφανές ότι μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων (έστω k) θά έχουμε $y_i \in I_\varepsilon$, $i=0,1,\dots,k-1$ καί $y_k \notin I_\varepsilon$. □

Παράδειγμα: Έστω η μή γραμμική εξίσωση διαφορών: $y_{k+1} = 1.5\,y_k - 0.5\,y_k^2$. Θέτουμε $y=f(x)=1.5x-0.5x^2$. Η λύση της εξίσωσης $x=f(x)$ είναι:

$$x = 1.5x - 0.5x^2 \Rightarrow 0.5x - 0.5x^2 = 0$$
$$\Rightarrow 0.5x(1-x)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } x=1$$

Επομένως $\alpha_1=0$ καί $\alpha_2=1$. Επίσης $f'(x)=1.5-x$ καί $f'(\alpha_1)=f'(0)=1.5$ καί $f'(\alpha_2)=f'(1)=0.5$. Εφόσον $|f'(0)| = 1.5>1$ το σ.ι. $\alpha_1=0$ είναι ασταθές καί εφόσον $|f'(1)|=0.5<1$ τό σ.ι. $\alpha_2=1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα: Έστω η μή-γραμμική εξίσωση διαφορών:

$$y_{k+1} = \frac{a y_k}{b + y_k} \quad , a > b > 0$$

Τα σημεία ισορροπίας είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{ax}{b+x} = x \Leftrightarrow bx + x^2 = ax$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (b-a)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = a-b$$

Άρα τα σημεία ισορροπίας είναι $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_2 = a-b$. Είναι:

$$f'(x) = \frac{a(b+x) - ax}{(b+x)^2} = \frac{ab}{(b+x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \text{ ασταθές σ.ι.}$$

$$\Rightarrow f'(a-b) = \frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a} < 1 \Rightarrow \alpha_2 = a-b$$
ασ. ευσταθές σ.ι.

Εξετάζουμε τήν περίπτωση $|f'(\alpha)| = 1$ όπου α σημείο ισορροπίας. Έχουμε ορίσει: $y_k = \alpha + u_k$ ($k \in \mathbb{N}_0$), δηλ. u_k = μετατόπιση από τό σημείο ισορροπίας. Σέ συνδιασμό μέ τήν εξίσωση $y_{k+1} = f(y_k)$ και τήν ανάπτυξη του $f(y_k)$ σέ σειρά Taylor γύρω από τό σημείο ισορροπίας (α), έχουμε:

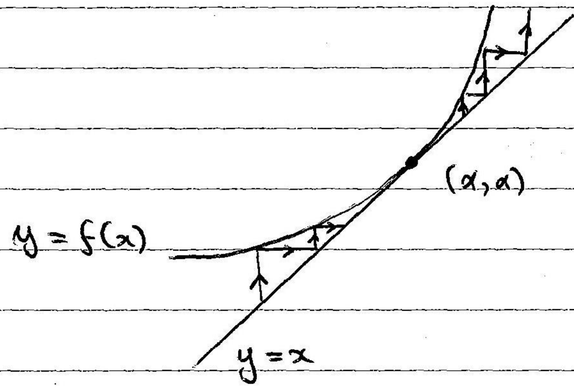
$$y_{k+1} = \alpha + u_{k+1} = f(\overbrace{\alpha + u_k}^{y_k}) = \overbrace{f(\alpha)}^{\alpha} + f'(\alpha) u_k + \frac{f''(\alpha)}{2!} u_k^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!} u_k^3 + \dots$$

$$\Rightarrow u_{k+1} = f'(\alpha) u_k + \frac{f''(\alpha)}{2} u_k^2 + \frac{f'''(\alpha)}{6} u_k^3 + \dots$$

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\underline{f'(\alpha) = 1}$, όπου η ευθεία $y = x$

εφάπτεται στό γράφημα της $y=f(x)$ στό σημείο α. Διακρίνουμε υποπεριπτώσεις:

(I) $f'(\alpha)=1$, $f''(\alpha)>0$. Τότε στό διάγραμμα της $y=f(x)$ η $f(x)$ στρέφει τά κοίλα πρός τά άνω

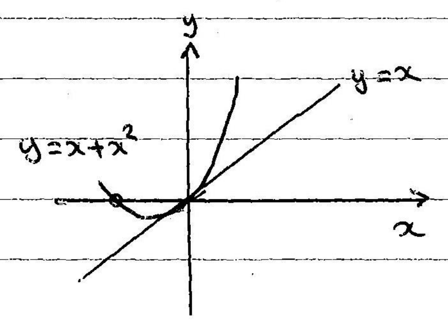


Από τό διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι: Αν y_0 αρκούντως κοντά στό σημείο ισορροπίας (α) καί $y_0<\alpha$, τότε $\lim_{k\to\infty} y_k = \alpha$, ενώ αν $y_0>\alpha$ τότε $\lim_{k\to\infty} y_k \neq \alpha$. Υπό κάποια έννοια τό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (τοπικά) γιά $y_0<\alpha$ καί ασταθές γιά $y_0>\alpha$. Τό είδος "ευστάθειας" αυτής ονομάζεται "κάτω ημιευστάθεια". Από τήν σειρά Taylor αγνοώντας όρους τάξης >2 (γιά $|u_k|$ "αρκούντως μικρό"), η εξίσωση διαφορών προσεγγίζεται ως:

$$u_{k+1} = u_k + c_1 u_k^2 \quad , \quad c_1 = \frac{1}{2} f''(\alpha) > 0$$

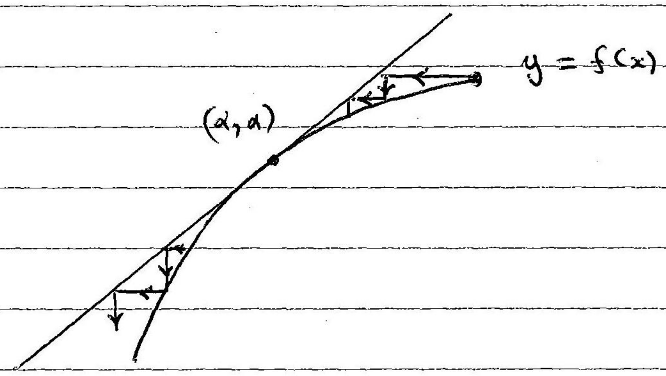
Θέτοντας $\varepsilon_k = c_1 u_k$ η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{c_1} = \frac{\varepsilon_k}{c_1} + \cancel{c_1} \frac{\varepsilon_k^2}{c_1^2} \Rightarrow \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \varepsilon_k^2$$



Από τό διάγραμμα προκύπτει ότι γιά μικρά $|\varepsilon_k|$, αν $\varepsilon_0<0$ τότε $\varepsilon_k\to 0$ ενώ αν $\varepsilon_0>0$ τότε $\varepsilon_k \not\to 0$.

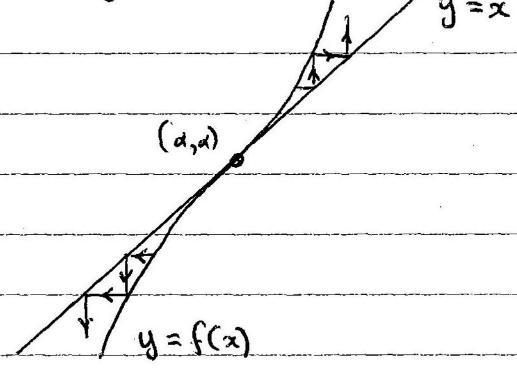
(II) $f'(\alpha)=1,\ f''(\alpha)<0$. Τό διάγραμμα της $y_{k+1}=f(y_k)$ στό σημείο (α,α) στρέφει τά κοίλα πρός τά κάτω:



Από τό ιστοδιάγραμμα συμπεραίνουμε ότι αν $y_0<\alpha$ (και "αρκούντως κοντά" στό α), τότε $\lim_k y_k \neq \alpha$, ενώ αν $y_0>\alpha$ (και πάλι "αρκούντως κοντά"), τότε $\lim_{k\to\infty} y_k=\alpha$. Η μορφή ευστάθειας αυτή ονομάζεται "άνω ημιευστάθεια".

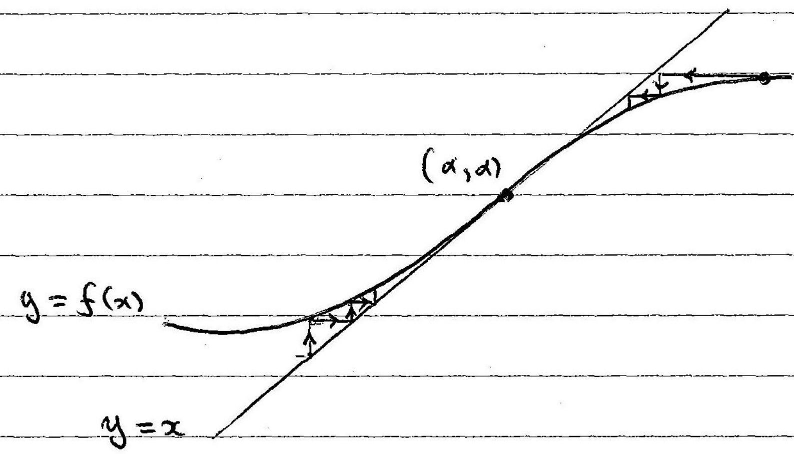
(III) Αν $f'(\alpha)=1$ και $f''(\alpha)=0$, τότε στό σημείο α αλλάζει η καμπυλότητα της f. Έχουμε τίς περιπτώσεις:

(IIIα) $f'(\alpha)=1,\ f''(\alpha)=0,\ f'''(\alpha)>0$. Τότε αριστερά του (α,α) η καμπύλη στρέφει τά κοίλα πρός τά κάτω και δεξιά του (α,α) στρέφει τά κοίλα πρός τά άνω:



Από τό ιστοδιάγραμμα συμπεραίνουμε ότι γιά y_0 κοντά στό σημείο ισορροπίας $y_k \not\to \alpha$ (α ασταθές).

(III β) $f'(\alpha)=1,\ f''(\alpha)=0,\ f'''(\alpha)<0$



Η περίπτωση αυτή είναι αντίθετη της περίπτωσης (III α). Αν y_0 "αρκετά κοντά" στό α, τότε από τό ισόγραμμα συμπεραίνουμε ότι $y_k \to \alpha$, δηλ. τό α είναι (τοπικά) ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Γιά μία αυστηρότερη ανάλυση δίνουμε τούς παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός: Τό σημείο ισορροπίας α της εξίσωσης $y_{k+1}=f(y_k)$, $k\in\mathbb{N}_0$, λέγεται άνω ημιευσταθές αν γιά κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε $y_0\in(\alpha,\alpha+\delta) \Rightarrow |y_k-\alpha|<\varepsilon\ \forall k\in\mathbb{N}_0$. Αν επιπλέον $\exists\, \eta>0$ τέτοιο ώστε $y_0\in(\alpha,\alpha+\eta) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_k=\alpha$, τότε τό α είναι ασυμπτωτικά άνω ημιευσταθές.

Αντίστοιχα έχουμε καί τον ορισμό τής κάτω ημιευστάθειας:

Ορισμός: Τό σημείο ισορροπίας α της εξίσωσης $y_{k+1}=f(y_k)$, $k\in\mathbb{N}_0$, λέγεται κάτω ημιευσταθές αν $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0: y_0\in(\alpha-\delta,\alpha) \Rightarrow |y_k-\alpha|<\varepsilon\ \forall k\in\mathbb{N}_0$. Αν επιπλέον $\exists\, \eta>0: y_0\in(\alpha-\eta,\alpha) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_k=\alpha$, τότε τό α είναι ασυμπτωτικά κάτω ημιευσταθές.

Θεώρημα: Έστω σημείο ισορροπίας α της εξίσωσης $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, δηλ. $\alpha = f(\alpha)$. Τότε:

(i) Έστω $f \in C^{2k}(\mathbb{R})$. Αν $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) = \cdots = f^{(2k-1)}(\alpha) = 0$ και $f^{(2k)}(\alpha) \neq 0$, τότε το α είναι:

- ασυμπτωτικά κάτω ημιευσταθές αν $f^{(2k)}(\alpha) > 0$.
- ασυμπτωτικά άνω ημιευσταθές αν $f^{(2k)}(\alpha) < 0$.

(ii) Έστω $f \in C^{2k+1}(\mathbb{R})$. Αν $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) = \cdots = f^{(2k)}(\alpha) = 0$ και $f^{(2k+1)}(\alpha) \neq 0$, τότε το α είναι

- ασυμπτωτικά ευσταθές αν $f^{(2k+1)}(\alpha) < 0$.
- ασταθές αν $f^{(2k+1)}(\alpha) > 0$.

Απόδειξη: (i) Έστω ότι $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) = \cdots = f^{(2k-1)}(\alpha) = 0$ και $f^{(2k)}(\alpha) > 0$. Από το Θεώρημα Taylor για $\delta > 0$ και $\xi \in (\alpha, \alpha+\delta)$

$$f(\alpha+\delta) = f(\alpha) + f'(\alpha)\delta + \cdots + \frac{f^{(2k-1)}(\alpha)\,\delta^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{f^{(2k)}(\xi)\,\delta^{2k}}{(2k)!}$$

Αν επιλέξουμε το δ αρκετά μικρό εξασφαλίζουμε (λόγω συνέχειας της $f^{(2k)}$) ότι $f^{(2k)}(\xi) > 0$ και επομένως:

$$f(\alpha+\delta) = \alpha + \delta + \frac{f^{(2k)}(\xi)\,\delta^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow f(\alpha+\delta) > \alpha + \delta$$

Παρόμοια για κάποιο $\xi \in (\alpha-\delta, \alpha)$:

$$f(\alpha-\delta) = \alpha - \delta + \frac{f^{(2k)}(\xi)\,\delta^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow \alpha - \delta < f(\alpha-\delta) < \alpha.$$

από τις οποίες προκύπτει ασυμπτωτική κάτω ημιευστάθεια. Η απόδειξη για την περίπτωση $f^{(2k)}(\alpha) < 0$ είναι παρόμοια.

(ii) Στην περίπτωση αυτή έχουμε για κάποιο $\delta > 0$:

$$f(\alpha+\delta) = \alpha + \delta + \frac{f^{(2k+1)}(\xi)\,\delta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

όπου $\xi \in (\alpha, \alpha+\delta)$. Επίσης:

$$f(\alpha-\delta) = \alpha - \delta - \frac{f^{(2k+1)}(\xi)\,\delta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

όπου $\xi \in (\alpha-\delta, \alpha)$. Αν $f^{(2k+1)}(\alpha) < 0$, τότε γιά δ αρκούντως μικρό, $f^{(2k+1)}(\xi) < 0$ γιά κάθε $\xi \in (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$. Οι άνω σχέσεις συνεπάγονται ότι $\alpha < f(\alpha+\delta) < \alpha+\delta$ καί $\alpha-\delta < f(\alpha-\delta) < \alpha$ καί επομένως συνάγουμε ασυμπτωτική ευστάθεια. Η απόδειξη γιά τήν περίπτωση $f^{(2k+1)}(\alpha) > 0$ είναι παρόμοια. □

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση διαφορών: $y_{k+1} = y_k - y_k^3$.
Είναι: $f(x) = x - x^3$ καί λύνοντας τήν εξίσωση $f(x) = x$:
$x - x^3 = x \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$, έχουμε ένα σημείο ισορροπίας, $\alpha = 0$. Επίσης:

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -6x \Rightarrow f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -6 < 0$$

καί άρα από τό προηγούμενο θεώρημα τό σημείο ισορροπίας $\alpha = 0$ είναι ευσταθές.

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση διαφορών: $y_{k+1} = y_k^4 - 2y_k^3 + 3y_k - 1$.
Είναι $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 1$ καί τά σημεία ισορροπίας είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = x$, δηλ.

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) - 2x(x^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(x-1)^2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1)^3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1 \text{ καί } \alpha_2 = 1$$

Επίσης: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3 \Rightarrow f'(-1) = -4 - 6 + 3 = -7$
$\Rightarrow \alpha_1 = -1$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας

$f'(1) = 4-6+3 = 1$

$f''(x) = 12x^2 - 12x \Rightarrow f''(1) = 0$

$f'''(x) = 24x - 12 \Rightarrow f'''(1) = 12 > 0$

καί επομένως $\alpha_2 = 1$ είναι επίσης ασταθές.

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση διαφορών: $y_{k+1} = y_k^2 + 5y_k + 4$. Είναι $f(x) = x^2 + 5x + 4$ καί $f(x) = x \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$ $\Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Άρα έχουμε ένα σημείο ισορροπίας, τό $x = -2$. Επίσης: $f'(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'(-2) = 1$, $f''(x) = 2 > 0$ καί επομένως τό σημείο ισορροπίας είναι κάτω ημιευσταθές.

Η τελευταία περίπτωση είναι η: $f'(a) = -1$. Η γραμμικοποίηση της εξίσωσης $y_{k+1} = f(y_k)$ σε αυτή την περίπτωση γύρω από τό σημείο ισορροπίας δίνει τήν ~~γραμμική εξίσωση~~ προσέγγιση:

$$u_{k+1} = -u_k \left(+ \frac{f''(a)}{2!} u_k^2 + \frac{f'''(a)}{3!} u_k^3 + \dots \right)$$

όπου $u_k = y_k - a$. Παρατηρούμε ότι γιά αρκούντως μικρό $|u_k|$ έχουμε προσεγγιστικά ταλάντωση γύρω από τό σημείο ισορροπίας. Θα αναλύσουμε τίς ιδιότητες ευστάθειας από τίς δύο υποακολουθίες που αντιστοιχούν σέ άρτια καί περιττή τιμή του k. Θέτουμε:

$$g(x) := (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

οπότε από την εξίσωση $y_{k+1} = f(y_k)$ έχουμε:

$$y_{k+2} = f(y_{k+1}) = f(f(y_k)) = g(y_k)$$

Λήμμα:

Έστω $f \in C^1(\mathbb{R})$ καί $g = f \circ f$. Τότε

(i) Αν α σταθερό σημείο της f, τότε είναι καί σταθερό σημείο της g.

(ii) Έστω α κοινό σημείο ισορροπίας της f καί g. Τότε, αν τό α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας της ~~y_k~~ $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, τότε είναι καί ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας της $y_{k+1} = g(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Απόδειξη:

(i) Έστω ότι $\alpha = f(\alpha)$. Τότε καί $g(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$, δηλ. τό α είναι καί σταθερό σημείο της g.

(ii) Εφόσον τό α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι της $y_{k+1} = f(y_k)$, τότε είναι καί ευσταθές κατά Lyapunov, δηλ.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_{2k} - \alpha| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

καί άρα η $y_{k+1} = g(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, είναι ευσταθής κατά Lyapunov. Η ασυμπτωτική ευστάθεια του α γιά την εξίσωση $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ ισοδυναμεί μέ την συνθήκη:

$$\exists \eta > 0 : |y_0 - \alpha| < \eta \Rightarrow \lim_{k \to \infty} |y_k - \alpha| = 0.$$

καί επομένως από συνεπάγεται ότι:

$$\exists \eta > 0 : |y_0 - \alpha| < \eta \Rightarrow \lim_{k \to \infty} |y_{2k} - \alpha| = 0$$

δηλαδή τό α είναι καί ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας καί γιά την $y_{k+1} = g(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Θεώρημα: Έστω α σημείο ισορροπίας της εξίσωσης $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, δηλ $\alpha = f(\alpha)$ και έστω ότι $f'(\alpha) = -1$. Τότε:

(i) $-2f'''(\alpha) - 3[f''(\alpha)]^2 < 0 \Rightarrow \alpha$ ασυμπτωτικά ευσταθές

(ii) $-2f'''(\alpha) - 3[f''(\alpha)]^2 > 0 \Rightarrow \alpha$ ασταθές σ.ι.

Απόδειξη: Ορίζουμε την συνάρτηση $g = f \circ f$ και την εξίσωση διαφορών $y_{k+1} = g(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε (προηγούμενο Λήμμα) τὸ α είναι ~~ασυμπτωτικά ευσταθές~~ σημείο ισορροπίας της g, ~~Έχουμε~~ (αν είναι σ.ι. της f). Έχουμε:

$$g'(x) = [f(f(x))]' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(\alpha) = f'(\alpha) \cdot f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}) = f'(\alpha) \cdot f'(\alpha) = [f'(\alpha)]^2 = (-1)^2 = 1$$

και μπορούμε νά εφαρμόσουμε την προηγούμενη ανάλυση (γιά $f(\alpha)=1$)
Είναι:

$$g''(x) = (f'(x) f'(f(x)))' = f''(x) f'(f(x)) + f'(x)[f'(x) f''(f(x))]$$

$$= f''(x) f'(f(x)) + [f'(x)]^2 f''(f(x))$$

$$\Rightarrow g''(\alpha) = f''(\alpha) f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}) + [f'(\alpha)]^2 f''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})$$

$$= f''(\alpha) \underbrace{f'(\alpha)}_{-1} + [\underbrace{f'(\alpha)}_{-1}]^2 f''(\alpha)$$

$$= -f''(\alpha) + f''(\alpha) = 0$$

Υπολογίζουμε την τρίτη παράγωγο:

$$g'''(x) = f'''(x) f'(f(x)) + f''(x) \cdot f'(x) f''(f(x)) + 2f'(x) f''(x) f''(f(x)) + [f'(x)]^2 f'(x) f'''(f(x)).$$

$$\Rightarrow g'''(x) = f'''(x)\, f'(f(x)) + 3 f'(x) f''(x) f''(f(x)) + $$
$$+ [f'(x)]^3 f'''(f(x)).$$

$$\Rightarrow g'''(\alpha) = f'''(\alpha)\, \underbrace{f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})}_{-1} + 3 \underbrace{f'(\alpha)}_{-1} f''(\alpha) f''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})$$
$$+ [\underbrace{f'(\alpha)}_{-1}]^3 f'''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow g'''(\alpha) = -f'''(\alpha) - 3[f''(\alpha)]^2 - f'''(\alpha)$$
$$= -2 f'''(\alpha) + 3 [f''(\alpha)]^2$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από προηγούμενο Θεώρημα. □

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω η εξίσωση διαφορών: $y_{k+1} = y_k^2 + 3y_k$, $k \in \mathbb{N}_0$

Τα σημεία ισορροπίας είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=x$ όπου $f(x) = x^2 + 3x$. Έχουμε:

$$x^2 + 3x = x \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -2$$

$f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow f'(0) = 3 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ ασταθή σημείο ισορροπίας

$f'(x) = 2x+3 \Rightarrow f'(-2) = 2(-2) + 3 = -1.$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Θεώρημα: $f''(x) = 2$, $f'''(x) = 0$ και

$$-2f'''(-2) - 3[f''(-2)]^2 = -3 \cdot 2^2 = -12 < 0$$

και συνεπώς $\alpha_2 = -2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθή σημείο ισορροπίας.

Ικανή συνθήκη γιά καθολική ασυμπτωτική ευστάθεια της εξίσωσης $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, διατυπώνεται μέ τό Θεώρημα Καθολικής Συστολής (Contraction mapping theorem).

<u>Ορισμός:</u> Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση καθολικής συστολής αν υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < 1$: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \beta |x_1 - x_2|$ γιά κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Η σταθερά β λέγεται σταθερά συστολής.

<u>Θεώρημα:</u> (καθολικής συστολής). Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση καθολικής συστολής μέ σταθερά συστολής β. Έστω $y_0 \in \mathbb{R}$ καί έστω $\{y_k\}$ η ακολουθία πού ορίζεται από τήν απεικόνιση $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε:

(i) $\forall k \in \mathbb{N}_0$: $|y_{k+1} - y_k| \leq \beta^k |y_1 - y_0|$

(ii) Η ακολουθία $\{y_k\}$ είναι ακολουθία Cauchy στό $\mathbb{R}$ καί επομένως συγκλίνει σέ κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) Τό α είναι (τό μόνο) σταθερό σημείο της f, δηλ. $f(\alpha) = \alpha$.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Έχουμε $(k=1)$:

$$|y_2 - y_1| = |f(y_1) - f(y_0)| \leq \beta |y_1 - y_0|$$

Έστω ότι η σχέση ισχύει γιά κάποιο $k \in \mathbb{N}$, δηλ. $|y_{k+1} - y_k| \leq \beta^k |y_1 - y_0|$
Τότε:

$$|y_{k+2} - y_{k+1}| = |f(y_{k+1}) - f(y_k)| \leq \beta |y_{k+1} - y_k| \leq \beta \cdot \beta^k |y_1 - y_0|$$

$$= \beta^{k+1} |y_1 - y_0|$$

καί επομένως η σχέση αποδεικνύεται επαγωγικά γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $m,n \in \mathbb{N}$, $m>n$:

$$|y_m - y_n| = |y_m - y_{m-1} + y_{m-1} - y_{m-2} + \cdots + y_{n+1} - y_n|$$

$$\leq |y_m - y_{m-1}| + |y_{m-1} - y_{m-2}| + \cdots + |y_{n+1} - y_n|$$

$$\leq \beta^{m-1}|y_1 - y_0| + \beta^{m-2}|y_1 - y_0| + \cdots + \beta^{n}|y_1 - y_0|$$

$$= \beta^n (1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{m-n-1}) \cdot |y_1 - y_0|$$

$$\leq \beta^n (1+\beta+\beta^2+\cdots) \cdot |y_1 - y_0|$$

$$= \frac{\beta^n}{1-\beta} |y_1 - y_0|$$

Αν $\varepsilon>0$ αυθαίρετο, τότε μπορεί νά βρεθεί $N \in \mathbb{N}$:

$$\beta^N < \frac{\varepsilon(1-\beta)}{|y_1 - y_0|}$$

οπότε, γιά $m>n>N$:

$$|y_m - y_n| \leq \frac{\beta^n |y_1 - y_0|}{1-\beta} \leq \frac{\beta^N |y_1 - y_0|}{1-\beta}$$

$$< \frac{\varepsilon(1-\beta)}{|y_1 - y_0|} \frac{|y_1 - y_0|}{1-\beta} = \varepsilon$$

Επομένως, η ακολουθία $\{y_k\}$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνει, έστω στό $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) Παίρνοντας όρια στή σχέση $y_{k+1} = f(y_k)$:

$$\lim_{k\to\infty} y_{k+1} = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} y_k\right)$$

(λόγω ιδιότητας Lipschitz από ιδιότητα καθολικής συστολής) και επομένως: $\alpha = f(\alpha)$. Αν το $\hat{\alpha}$ είναι επίσης σταθερό σημείο της f:

$$0 \leq |\hat{\alpha} - \alpha| = |f(\hat{\alpha}) - f(\alpha)| \leq \beta\, |\hat{\alpha} - \alpha|$$

$$\Rightarrow (1-\beta)\,|\hat{\alpha} - \alpha| \leq 0 \Rightarrow \hat{\alpha} = \alpha$$

(αφού $0<\beta<1$). Άρα το σταθερό σημείο της f είναι μοναδικό. □

Παράδειγμα: Έστω $a>0$ και $f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ όπου $x \geq \sqrt{a}$. Έχουμε:

$$f(x) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - \sqrt{a} = \frac{x^2+a}{2x} - \sqrt{a} = \frac{x^2 - 2\sqrt{a}x + a}{2x}$$

$$= \frac{(x-\sqrt{a})^2}{2x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{a} + \frac{(x-\sqrt{a})^2}{2x} \geq \sqrt{a}.$$

Συνεπώς $f: [\sqrt{a}, \infty) \to [\sqrt{a}, \infty)$. Η f είναι συνάρτηση καθολικής συστολής στο $[\sqrt{a}, \infty)$: Αν $x_1, x_2 \geq \sqrt{a}$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right)\right|$$

$$= \left| \frac{1}{2}(x_1 - x_2) + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\right| = \left| \frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{a}{2}\,\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \underbrace{\left(1 - \frac{a}{x_1 x_2}\right)}_{\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < 1$$

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

και συνεπώς f είναι συνάρτηση καθολικής συστολής στο $[\sqrt{a}, \infty)$

μέ σταθερά συστολής $\beta = \frac{1}{2}$. Η εξίσωση διαφορών

$$(*) \qquad y_{k+1} = \frac{1}{2}\left(y_k + \frac{a}{y_k}\right) \quad , \; y_0 \geq \sqrt{a} \; (\text{αλλά αυθαίρετο})$$

έχει σημεία ισορροπίας τις ρίζες της εξίσωσης:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow x = \frac{x^2+a}{2x} \Rightarrow 2x^2 = x^2+a$$

$$\Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Και επομένως στο διάστημα $[\sqrt{a}, \infty)$ η f έχει σταθερό σημείο $x = \sqrt{a}$. Επομένως ο αλγόριθμος (*) παράγει ακολουθία y_k τέτοια ώστε

$$y_k \to \sqrt{a}$$

καθώς $k \to \infty$, ανεξάρτητα από την επιλογή του $y_0 \geq \sqrt{a}$.

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών

Εξετάζουμε την εξίσωση

$$y_{k+n} + a_1(k)\, y_{k+n-1} + \cdots + a_n(k) = R_k \qquad [MO]$$

και την αντίστοιχη ομογενή [OM] όταν $R_k = 0 \ \forall k$.

<u>Πρόταση:</u> Έστω $y_k^{(1)}, \dots y_k^{(n)}$ λύσεις της [OM] και $c_1, c_2, \dots, c_n$ σταθερές. Τότε $y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_k^{(1)}$ είναι επίσης λύση της [OM].

<u>Απόδειξη:</u> Προκύπτει άμεσα λόγω γραμμικότητας. □

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $y_k^{(1)}$ μία λύση της [OM] και Y_k μία λύση της [MO]. Τότε η $y_k = y_k^{(1)} + Y_k$ είναι λύση της [MO].

<u>Απόδειξη:</u> Εφόσον $y_k^{(1)}$ λύση της [OM] και Y_k λύση της [MO]:

$$y_{k+n}^{(1)} + a_1(k)\, y_{k+n-1}^{(1)} + \cdots + a_n(k)\, y_k^{(1)} = 0$$

$$Y_{k+n} + a_1(k)\, Y_{k+n-1} + \cdots + a_n(k)\, Y_k = R_k$$

Προσθέτοντας κατά μέλη δείχνει ότι $y_k^{(1)} + Y_k$ είναι λύση της [MO]. □

<u>Θεώρημα:</u> Η εξίσωση [MO] έχει ακριβώς μία λύση γιά κάθε αυθαίρετη n-άδα συνθηκών $y_0 = A_0, y_1 = A_1, \dots, y_{n-1} = A_{n-1}$.

<u>Απόδειξη:</u> Προφανής!

Γραμμική ανεξαρτησία - Ορίζουσα Casorati

<u>Ορισμός:</u> Ένα σύνολο συναρτήσεων $f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$ θα λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_n$, όχι όλες μηδέν, έτσι ώστε: $c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) + \dots + c_n f_n(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$. Σε αντίθετη περίπτωση το σύνολο των συναρτήσεων είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

<u>Ορισμός:</u> Έστω συναρτήσεις $f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$. Η ορίζουσα Casorati των συναρτήσεων ορίζεται ως εξής:

$$C(k) := \begin{vmatrix} f_1(k) & f_2(k) & \cdots & f_n(k) \\ f_1(k+1) & f_2(k+1) & & f_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(k+n-1) & f_2(k+n-1) & \cdots & f_n(k+n-1) \end{vmatrix}$$

<u>Θεώρημα:</u> Αν οι συναρτήσεις $f_1(k), f_2(k), \dots, f_n(k)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε $C(k) = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $f_1(k), \dots, f_n(k)$ γραμμικά εξαρτημένες. Τότε $\exists (c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots 0)$ έτσι ώστε $c_1 f_1(k) + \dots + c_n f_n(k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Γιά k αυθαίρετο αλλά σταθερό:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) + \dots + c_n f_n(k) = 0 \\ c_1 f_1(k+1) + c_2 f_2(k+1) + \dots + c_n f_n(k+1) = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_1(k+n-1) + c_2 f_2(k+n-1) + \dots + c_n f_n(k+n-1) = 0 \end{array}\right\}$$

που αποτελεί ομογενές σύστημα εξισώσεων μέ αγνώστους $c_1, c_2, \dots c_n$. Αν $C(k) \neq 0$ τότε τό σύστημα θά έχει τη μοναδική μηδενική λύση $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ (άτοπο). Άρα $C(k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Θεώρημα:

Θεωρούμε τήν ομογενή [ΟΜ] εξίσωση:

$$L[y(k)] =: y_{k+n} + a_1(k)\, y_{k+n-1} + \cdots + a_n(k)\, y_k = 0 \quad , k \in \mathbb{N}_0$$

όπου $a_n(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Απόδειξη: Εστω $\hat{y}_i(k)$ οἱ λύσεις των n - ΠΑΤ:

$$(\Pi AT)_i : \quad L[\hat{y}_i(k)] = 0 , \quad \hat{y}_i(k) = \delta_{i,k+1} \quad , i \in \{1,2,\dots n\}, \ k \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

οπου $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Απὸ προηγούμενο θεώρημα οι λύσεις υπάρχουν και ορίζονται μονοσήμαντα. Εστω ότι οι $\{\hat{y}_i(k)\}_{i=1}^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Τότε $\exists\, c_1, c_2, \dots, c_n$ (οχι ολες μηδεν) ετσι ώστε:

$$c_1 \hat{y}_1(k) + c_2 \hat{y}_2(k) + \cdots + c_n \hat{y}_n(k) = 0 \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ειδικά γιά $k = 0, 1, \dots, n$ εχουμε τό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(0) & \hat{y}_2(0) & \cdots & \hat{y}_n(0) \\ \hat{y}_1(1) & \hat{y}_2(1) & \cdots & \hat{y}_n(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{y}_1(n-1) & \hat{y}_2(n-1) & \cdots & \hat{y}_n(n-1) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{\underline{c}} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow I_n \underline{c} = \underline{0} \Rightarrow \underline{c} = \underline{0}, \text{ δηλ. } c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \quad (\text{άτοπο})$$

Άρα οι $\{\hat{y}_i(k)\}_{i=1}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. □

Γενική λύση ομογενούς γραμμικής με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε την εξίσωση (n-τάξης):

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = 0 \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

όπου $a_n \neq 0$. Η εξίσωση γράφεται:

$$\underbrace{\left(E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n I\right)}_{f(E)} y_k = 0 \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

όπου $f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n$ είναι το "χαρακτηριστικό πολυώνυμο" (και $f(r)=0$ η χαρ. εξίσωση). Έστω ότι:

$$f(r) = (r-r_1)^{m_1} \cdots (r-r_e)^{m_e} (r^2+\beta_1 r+\gamma_1)^{n_1} \cdots (r^2+\beta_s r+\gamma_s)^{n_s}$$

όπου $r_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots e)$ διακεκριμμένες πραγματικές ρίζες και $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$ $(i=1,2,\dots s)$ αντιστοιχούν στις 2s μιγαδικές συζυγείς ρίζες. Επομένως:

$$f(E)y_k = 0 \Leftrightarrow (E-r_1)^{m_1} \cdots (E-r_e)^{m_e} (E^2+\beta_1 E+\gamma_1)^{n_1} \cdots (E^2+\beta_s E+\gamma_s)^{n_s} y_k = 0$$

Κάθε λύση της εξίσωσης $(E-r_j)^{m_j} y_k = 0$ $(j=1,2,\dots e)$ και της εξίσωσης $(E^2+\beta_j E+\gamma_j)^{n_j} y_k = 0$ $(j=1,2,\dots s)$ είναι λύση της $f(E)y_k = 0$

Θεώρημα: Η εξίσωση $(E-r)^m y_k = 0$ $(r \neq 0)$ έχει γενική λύση:

$$y_k = A_1 r^k + A_2 k r^k + \dots A_m k^{m-1} r^k$$

όπου $A_i \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots m)$.

Απόδειξη:

Θα δείξουμε πρώτα ότι:

$$(E-r)^m y_k = r^{k+m} \Delta^m \left(\frac{y_k}{r^k} \right)$$

Επαγωγικά, αρχίζοντας από $m=1$:

$$(E-r)\, y_k = E y_k - r y_k = y_{k+1} - r y_k$$

$$= r^{k+1} \left(\frac{y_{k+1}}{r^{k+1}} - \frac{y_k}{r^k} \right) = r^{k+1} \Delta \left(\frac{y_k}{r^k} \right)$$

Έστω ότι η σχέση ισχύει για $m=p$, δηλ.

$$(E-r)^p y_k = r^{k+p} \Delta^p \left(\frac{y_k}{r^k} \right)$$

Τότε: $(E-r)^{p+1} y_k = (E-r)^p (E-r)\, y_k = (E-r)^p \left(y_{k+1} - r y_k \right)$

$$= r^{k+p} \Delta^p \left[\frac{1}{r^k} \left(y_{k+1} - r y_k \right) \right].$$

$$= r^{k+p} \Delta^p \left[\frac{1}{r^k} \underbrace{(E-r)\, y_k} \right].$$

$$= r^{k+p} \Delta^p \left[\frac{1}{r^k} r^{k+1} \Delta \left(\frac{y_k}{r^k} \right) \right]$$

$$= r^{k+p+1} \Delta^{p+1} \left(\frac{y_k}{r^k} \right).$$

Άρα η εξίσωση έχει τη μορφή:

$$r^{k+m} \Delta^m \left(\frac{y_k}{r^k} \right) = 0 \Rightarrow \Delta^m \left(\frac{y_k}{r^k} \right) = 0 \qquad (r \neq 0)$$

Η εξίσωση $\Delta^m (x_k) = 0$ έχει γενική λύση $x_k = A_1 + A_2 k + \dots + A_m k^{m-1}$

Άρα: $$\frac{y_k}{r^k} = A_1 + A_2 k + \cdots + A_m k^{m-1}$$

$$\Rightarrow y_k = (A_1 + A_2 k + \cdots + A_m k^{m-1}) r^k$$

όπου $A_i \in \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις $\{r^k, kr^k, \ldots, k^{m-1} r^k\}$ αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων διότι έχουν μή μηδενική ορίζουσα Casorati:

$$C(k) = \begin{vmatrix} r^k & k r^k & \cdots & k^{m-1} r^k \\ r^{k+1} & (k+1) r^{k+1} & & (k+1)^{m-1} r^{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r^{k+m-1} & (k+m-1) r^{k+m-1} & & (k+m-1)^{m-1} r^{k+m-1} \end{vmatrix}$$

$$= r^k \cdot r^{k+1} \cdots r^{k+m-1} \begin{vmatrix} 1 & k & \cdots & k^{m-1} \\ 1 & k+1 & & (k+1)^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & k+m-1 & & (k+m-1)^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$= r^k r^{k+1} \cdots r^{k+m-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & & \beta_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_1^{m-1} & \beta_2^{m-1} & & \beta_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

όπου $\beta_1 = k$, $\beta_2 = k+1, \ldots \beta_m = k+m-1$. Η τελευταία ορίζουσα είναι η ορίζουσα Vandermonde και ισούται μέ $\prod_{i<j} (\beta_j - \beta_i)$. Επομένως, αφού στήν περίπτωση μας $\beta_i \neq \beta_j$ για $i \neq j$ έχουμε $C(k) \neq 0$ □

Παράδειγμα: Θεωρούμε τήν εξίσωση:

$$y_{k+3} - 9 y_{k+2} + 27 y_{k+1} - 27 y_k = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$r^3 - 9r^2 + 27r - 27 = 0$$

$$\Rightarrow (r-3)(r^2+3r+9) - 9r(r-3) = 0$$

$$\Rightarrow (r-3)(r^2-6r+9) = 0 \Rightarrow (r-3)^3 = 0$$

και επομένως: $y_k = c_1 3^k + c_2 k 3^k + c_3 k^2 3^k$ είναι η γενική λύση.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω ότι οι n-ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $f(r)=0$ της: $y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_n y_k = 0$ είναι πραγματικές και διακεκριμμένες, δηλ $f(r) = (r-r_1)\cdots(r-r_n)$ με $r_i \neq r_j$ γιά $i \neq j$. Τότε οι συναρτήσεις $y_k^{(i)} = r_i^k$, $i=1,2,\dots n$, αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων και επομένως η γενική λύση είναι:

$$y_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k + \cdots + c_n r_n^k \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

<u>Απόδειξη:</u> Η εξίσωση έχει τη μορφή:

$$(E-r_1)(E-r_2)\cdots(E-r_n)y_k = 0$$

και επομένως οι $y_k = r_i^k$ $(i=1,2,\dots,n)$ είναι λύσεις. Η ορίζουσα Casorati $C(k)$:

$$C(k) = \begin{vmatrix} r_1^k & r_2^k & \cdots & r_n^k \\ r_1^{k+1} & r_2^{k+1} & & r_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{k+n-1} & r_2^{k+n-1} & & r_n^{k+n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right)^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

καθώς $r_i \neq 0$ και $r_i \neq r_j$ γιά $i \neq j$. $\square$

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε τήν εξίσωση $y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 0$ μέ χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$. Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι $y_k^{(1)} = 1^k = 1$ καί $y_k^{(2)} = 2^k$. Αρα η γενική λύση είναι: $y_k = c_1 + c_2 2^k \quad (k \geq 0)$.

<u>Θεώρημα</u> Η εξίσωση: $(E^2 - 2\rho\cos\theta \cdot E + \rho^2)^m y_k = 0$ έχει γενική λύση:

$$y_k = A_1 \rho^k \cos(\theta k) + A_2 k \rho^k \cos(\theta k) + \cdots + A_m k^{m-1} \rho^k \cos(\theta k)$$
$$+ B_1 \rho^k \sin(\theta k) + B_2 k \rho^k \sin(\theta k) + \cdots + B_m k^{m-1} \rho^k \sin\theta k$$

$$= (A_1 + A_2 k + \cdots + A_m k^{m-1}) \rho^k \cos\theta k +$$
$$+ (B_1 + B_2 k + \cdots + B_m k^{m-1}) \rho^k \sin\theta k$$

<u>Απόδειξη:</u> Η εξίσωση γράφεται:

$$(E - \rho e^{i\theta})^m (E - \rho e^{-i\theta})^m y_k = 0$$

Καί σέ αναλογία μέ τήν περίπτωση πού έχουμε πραγματικές ρίζες: ενα θ.σ.λ. αποτελείται από τίς συναρτήσεις:

$$(\rho e^{i\theta})^k, \ k(\rho e^{i\theta})^k, \ldots, k^{m-1}(\rho e^{i\theta})^k,$$
$$(\rho e^{-i\theta})^k, \ k(\rho e^{-i\theta})^k, \ldots \ k^{m-1}(\rho e^{-i\theta})^k$$

(Η ορίζουσα Casorati δείχνει ότι οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες). Επομένως η γενική λύση είναι:

$$y_k = \rho^k \left(c_1 e^{i\theta k} + c_2 k e^{i\theta k} + \cdots + c_m k^{m-1} e^{i\theta k} \right)$$

$$+ \rho^k \left(d_1 e^{-i\theta k} + d_2 k e^{-i\theta k} + \cdots + c_m k^{m-1} e^{-i\theta k} \right).$$

$$= \rho^k \Big[(c_1+d_1)\cos\theta k + i(c_1-d_1)\sin\theta k +$$

$$(c_2+d_2) k \cos\theta k + i(c_2-d_2) k \sin\theta k + \cdots$$

$$+ \cdots + (c_m+d_m) k^{m-1} \cos\theta k + i(c_m-d_m) k^{m-1} \sin\theta k \Big].$$

Θέτοντας $\alpha_i = c_i + d_i$, $\beta_i = i(c_i - d_i)$ έχουμε

$$y_k = (\alpha_1 + \alpha_2 k + \cdots + \alpha_m k^{m-1}) \rho^k \cos\theta k +$$

$$(\beta_1 + \beta_2 k + \cdots + \beta_m k^{m-1}) \rho^k \sin\theta k. \qquad \square$$

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε την εξίσωση: $y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_k = 0$. Χαρ. πολυώνυμο: $r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 + 1^2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow r_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{\pm i\pi/4}$. Η γενική λύση είναι

$$y_k = c_1 (\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + c_2 (\sqrt{2})^k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε την εξίσωση $y_{k+4} - y_k = 0$ με χαρ. εξίσωση $r^4 - 1 = 0 \Rightarrow (r^2+1)(r^2-1) = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = 1,$ $r_{3,4} = \pm i = 1 \cdot e^{\pm i\pi/2}$. Η γενική λύση είναι

$$y_k = c_1 (-1)^k + c_2 + c_3 \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + c_4 \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Παράδειγμα: Μία εξίσωση διαφορών $9^{ης}$ τάξης έχει χαρακτηριστική εξίσωση με ρίζες $r_1 = r_2 = r_3 = 6$, $r_4 = -1$, $r_5 = -\frac{1}{2}$

$r_{6,7} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i 2\pi/3}$, $r_{8,9} = 2\sqrt{2} \pm i\, 2\sqrt{2} = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4e^{\pm i\pi/4}$

Η γενική λύση είναι:

$$y_k = c_1 6^k + c_2 k 6^k + c_3 k^2 6^k + c_4 (-1)^k + c_5 \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$+ c_6 \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + c_7 \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + c_8 4^k \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

$$+ c_9 4^k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right).$$

Παράδειγμα: Οι διαδοχικοί όροι $f(n), f(n+1), f(n+2)$ μιάς ακολουθίας συνδέονται από την σχέση: $f(n+2) + \lambda f(n+1) + \mu f(n) = 0$, $n = 0,1,2,\dots$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 2$ νά βρεθεί αναλυτική έκφραση της $f(n)$;

$n = 0 \Rightarrow f(2) + \lambda f(1) + \mu f(0) = 0 \Rightarrow 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

$n = 1 \Rightarrow \underbrace{f(3)}_{2} - 2\cdot 2 + \mu \cdot 1 = 0 \Rightarrow \mu = 2$

Επομένως η εξίσωση είναι: $f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0$, μέ χαρακτηριστική εξίσωση $p(r) = r^2 - 2r + 2 = (r-1)^2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{\pm i\pi/4} \Rightarrow f(n) = A(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + B(\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right).$

Επομένως

$$n = 0 \Rightarrow f(0) = A = 0$$

$$n = 1 \Rightarrow f(1) = B\sqrt{2}\sin(\pi/4) = B\sqrt{2}(1/\sqrt{2}) = B = 1$$

Καί επομένως: $f(n) = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$, $n \geq 0$.

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι αν $y_{k+2} - 2\lambda y_{k+1} + \lambda^2 y_k = 0$ τότε $\lim_{k\to\infty} (y_{k+1}/y_k) = \lambda$ ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $r^2 - 2\lambda r + \lambda^2 = 0 \Rightarrow (r-\lambda)^2 = 0$ $\Rightarrow r = \lambda$ (διπλή ρίζα) και επομένως:

$$y_k = c_1 \lambda^k + c_2 k \lambda^k$$

$$\Rightarrow \frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{c_1 \lambda^{k+1} + c_2 (k+1) \lambda^{k+1}}{c_1 \lambda^k + c_2 k \lambda^k} = \frac{\lambda^{k+1} [c_1 + c_2 (k+1)]}{\lambda^k [c_1 + c_2 k]}$$

$$= \lambda \left(1 + \frac{c_2}{c_1 + c_2 k}\right) \to \lambda \quad \text{καθώς } k \to \infty.$$

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών.

Θεωρούμε την ομογενή:

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_n y_k = R_k$$

$a_i \in \mathbb{R}$, R_k συνάρτηση του k, $a_n \neq 0$. Έστω ότι R_k είναι της μορφής: a^k, $\sin(bk)$, $\cos(bk)$, k^p ($p \in \mathbb{N}_0$), ή γραμμικός συνδιασμός των συναρτήσεων ή των γινομένων τους, π.χ.

$$a^k \sin(ck) \ , \ k^p a^{2k} \cos(ck) + k^p a^{2k} \sin(ck) \ , \ \text{κλ.π.}$$

Ορισμός: Ονομάζουμε οικογένεια ενός όρου R_k το σύνολο των συναρτήσεων $f_1(k), f_2(k), \ldots$ οι γραμμικοί συνδιασμοί των οποίων παράγουν τον R_k και τους $E^m R_k = R_{k+m}$ για κάθε $m \geq 1$ (συμβολισμός $[f_1(k), f_2(k), \ldots]$).

Παράδειγμα: Αν $R_k = a^k$ τότε $E^m R_k = R_{k+m} = a^{k+m} = a^m a^k$ πού προέρχονται από γραμμικούς συνδιασμούς της R_k (πολλαπλάσια σε αυτή την περίπτωση). Άρα $[a^k] = \{a^k\}$

Παράδειγμα: Αν $R_k = k^p$ τότε $R_{k+m} = E^m R_k = (k+m)^p$ που γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των $1, k, k^2, \ldots, k^p$. Άρα $[k^p] = \{1, k, \ldots, k^p\}$

Παράδειγμα: Αν $R_k = \cos(ck)$, τότε

$$R_{k+m} = \cos(c(k+m)) = \cos(ck+cm) = \cos(ck)\cos(cm) - \\ - \sin(ck)\sin(cm)$$

δηλ. $E^m(R_k)$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των $\cos(ck)$ και $\sin(ck)$. Άρα $[\cos(ck)] = \{\cos(ck), \sin(ck)\}$. Παρόμοια γιά $R_k = \sin(ck)$.

Αν ο όρος R_k είναι γινόμενο τότε η οικογένειά του αποτελείται από όλα τά δυνατά γινόμενα μελών από τίς οικογένειες κάθε παράγοντα.

Παράδειγμα: $R_k = k^p a^k$. Έχουμε $[k^p] = \{1, k, \ldots, k^p\}$ καί $[a^k] = \{a^k\}$. Επομένως $[k^p a^k] = \{a^k\} \times \{1, k, \ldots k^p\} =$
$= \{a^k, ka^k, \ldots, k^p a^k\}$

Παράδειγμα: Έστω $R_k = k^p \cos(ck)$. Έχουμε

$$[k^p \cos(ck)] = [k^p] \times [\cos(ck)] = \{1, 2, \ldots, k^p\} \times \{\cos ck, \sin ck\}$$

$$= [\cos ck, k\cos ck, \ldots, k^p \cos ck, \sin ck, k \sin ck, \ldots, k^p \sin ck\}.$$

Έστω ότι $R_k = R_k^1 + R_k^2$. Τότε αν y_k^1 καί y_k^2 είναι ειδικά λύσεις ~~ενός~~ των εξισώσεων

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_n y_k = R_k^1$$

καί

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_n y_k = R_k^2$$

αντίστοιχα, τότε $y_k^1 + y_k^2$ είναι λύση της εξίσωσης:

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_n y_k = R_k^1 + R_k^2$$

Η μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών είναι διαδικασία προσδιορισμού μιας ειδικής λύσης της μή ομογενούς εξίσωσης: $y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \cdots + a_n y_k = R_k$ (γιά τίς συγκεκριμένες μορφές της R_k πού αναφέρθηκαν παραπάνω) πού ακολουθεί τά επόμενα βήματα:

(i) Ορίζουμε τήν οικογένεια του όρου R_k

(ii) Αν η οικογένεια δέν περιέχει όρους πού εμφανίζονται στή γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς τότε γράφουμε την λύση σάν γραμμικό συνδιασμό όλων των μελών της οικογένειας $[R_k]$. Αν αντίθετα η οικογένεια περιέχει όρους πού εμφανίζονται στή γενική λύση της ομογενούς τότε πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος της οικογένειας με την ελάχιστη δύναμη του k (k^σ) ωστε κανένας όρος της νέας οικογένειας νά μήν είναι όρος που εμφανίζεται στην γενική λύση της ομογενούς. Πάλι γράφουμε τήν ειδική λύση ως γραμμικό συνδιασμό της (νέας) οικογένειας.

(iii) Προσδιορίζουμε τους συντελεστές του γραμμικού συνδιασμού μέ αντικατάσταση στήν μη-ομογενή εξίσωση.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η εξίσωση: $y_{k+2} - 5y_{k+1} + 6y_k = 2 + 4k$

Η αντίστοιχη ομογενής έχει χαρακτηριστική εξίσωση:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r-2)(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 3$$

καί επομένως η γενική λύση της ομογενούς: $y_k^{(op)} = c_1 2^k + c_2 3^k$. Η οικογένειες $[2] = [1]$, $[4k] = [1, k] \Rightarrow [2+4k] = \{1, k\} =$ $(= [2] \cup [4k])$. Επομένως αναζητούμε ειδική λύση (της μή ομογενούς) της μορφής $y_k = A + Bk \Rightarrow y_{k+1} = A + B(k+1) \Rightarrow$ $\Rightarrow y_{k+2} = A + B(k+2)$. Συνεπώς

$$(A+2B) + Bk - 5\left[(A+B) + Bk\right] + 6(A+Bk) = 2 + 4k$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2A - 3B)}_{2} + \underbrace{2B}_{4}k = 2 + 4k.$$

$$\Rightarrow B = 2,\quad 2A = 3B + 2 = 8 \Rightarrow A = 4$$

$\Rightarrow y_k = 4 + 2k$ είναι (ειδική) λύση της (μή-ομογενούς) εξίσωσης.

Η γενική λύση της μή ομογενούς είναι επομένως:

$$y_k = c_1 2^k + c_2 3^k + 4 + 2k \qquad (k \geq 0).$$

$$\Rightarrow \underbrace{(3A-4B-2C)}_{2} + \underbrace{(3B-8C)}_{0} k + \underbrace{3C}_{3} k^2 - \underbrace{D}_{5} \cdot 3^k = 2+3k^2-5\cdot 3^k$$

$$\Rightarrow C=1,\ D=5,\ 3B=8C=8 \Rightarrow B=8/3 \quad \text{και}$$

$$3A = 4B+2C+2 = 32/3+2+2 = 44/3$$

$$\Rightarrow A = 44/9$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι:

$$y_k = c_1 2^k + c_2 4^k + \frac{44}{9} + \frac{8}{3}k + k^2 + 5\cdot 3^k, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση: $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = k4^k$

Η αντίστοιχη ομογενής έχει χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2-4r+3=0$
$\Rightarrow (r-1)(r-3)=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=3$ και επομένως η γενική λύση της ομογενούς: $y_k^{(h)} = c_1 + c_2 3^k$ όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Έχουμε $R_k = k4^k$
$\Rightarrow [R_k] = [k]\times[4^k] = \{1,k\}\times\{4^k\} = \{4^k, k4^k\}$.
Εφόσον 4^k και $k4^k$ δεν είναι λύσεις της ομογενούς, αναζητούμε λύση της μορφής: $y_k = A4^k + Bk4^k \Rightarrow y_{k+1} = A4^{k+1} + B(k+1)4^{k+1}$
$\Rightarrow y_{k+2} = A4^{k+2} + B(k+2)4^{k+2}$. Επομένως:

$$y_{k+1} = 4A\cdot 4^k + 4B(k+1)\cdot 4^k = (4A+4B)4^k + 4Bk\cdot 4^k$$

$$y_{k+2} = 16A\cdot 4^k + 16B(k+2)4^k = (16A+32B)4^k + 16Bk4^k$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση:

$$(16\cancel{A}+32B)4^k + 16B\cancel{k}4^k - 4\left[(4\cancel{A}+4B)\cdot 4^k + 4B\cancel{k}\cdot 4^k\right] + 3A4^k + 3Bk\cdot 4^k = k4^k$$

Παράδειγμα:

Έστω η εξίσωση διαφορών:

$$y_{k+2} - 6y_{k+1} + 8y_k = \underbrace{2+3k^2-5\cdot 3^k}_{R_k}$$

Η αντίστοιχη ομογενής έχει χαρ. εξίσωση: $r^2-6r+4=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (r-2)(r-4)=0 \Rightarrow r_1=2,\ r_2=4$ και συνεπώς:

$$y_k = c_1 2^k + c_2 4^k$$

είναι η γενική λύση της ομογενούς. Οι οικογένειες των όρων 2, $3k^2$ και $5\cdot 3^k$ είναι $\{1\}$, $\{1,k,k^2\}$ και $\{3^k\}$ αντίστοιχα. Επομένως:

$$[R_k] = \{1\}\cup\{1,k,k^2\}\cup\{3^k\} = \{1,k,k^2,3^k\}$$

και αναζητούμε ειδική λύση της μορφής:

$$y_k = A+Bk+Ck^2+D\cdot 3^k$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1} = A+B(k+1)+C\underbrace{(k+1)^2}_{k^2+2k+1}+D\cdot 3^{k+1}$$

$$= (A+B+C)+(B+2C)k+Ck^2+(3D)\cdot 3^k$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+2} = A+B(k+2)+C\underbrace{(k+2)^2}_{k^2+4k+4}+D\cdot 3^{k+2}$$

$$= (A+2B+4C)+(\cancel{2}B+4C)k+Ck^2+9D\cdot 3^k.$$

$$\Rightarrow (A+2B+4C)+(B+4C)k+Ck^2+9D\cdot 3^k$$
$$-6\left[(A+B+C)+(B+2C)k+Ck^2+3D\cdot 3^k\right]+$$
$$+8\left[A+Bk+Ck^2+D\cdot 3^k\right] = 2+3k^2-5\cdot 3^k.$$

$$\Rightarrow \underbrace{(16B+3A)}_{0} 4^k + \underbrace{3B}_{1} k 4^k = k 4^k$$

$$\Rightarrow B = 1/3 \quad , \quad A = -(16/3)B = -16/9$$

$$\Rightarrow y_k = -\frac{16}{9} 4^k + \frac{1}{3} k 4^k$$ ειδική λύση και

$$y_k = c_1 + c_2 3^k - \frac{16}{9} 4^k + \frac{1}{3} k 4^k \qquad (k \geq 0).$$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η εξίσωση διαφορών τρίτης τάξης

$$y_{k+3} - 7y_{k+2} + 16y_{k+1} - 12y_k = k2^k$$

Η αντίστοιχη ομογενής έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = (r-2)^2(r-3) = 0$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = 2 \ , \ r_3 = 3 \Rightarrow y_k^{o\mu} = c_1 2^k + c_2 k 2^k + c_3 3^k \ , \ c_i \in \mathbb{R}.$$

$$R_k = k2^k \Rightarrow [R_k] = [k] \times [2^k] = \{1, k\} \times \{2^k\} = \{2^k, k2^k\}$$

Αναζητούμε ειδική λύση της μορφής:

$$y_k^* = Ak^2 2^k + Bk^3 2^k$$

$$\Rightarrow y_{k+1}^* = A(k+1)^2 2^{k+1} + B(k+1)^3 2^{k+1} =$$

$$= 2A(k^2+2k+1)2^k + 2B(k^3+3k^2+3k+1)2^k$$

$$\Rightarrow y_{k+2}^* = A(k+2)^2 2^{k+2} + B(k+2)^3 2^{k+2} =$$

$$= 4A(k^2+4k+4)2^k + 4B(k^3+\underset{6}{\cancel{12}}k^2+12k+8)2^k$$

$$\Rightarrow y^{*}_{k+3} = A(k+3)^2 2^{k+3} + B(k+3)^3 2^{k+3}$$

$$= 8A(k^2+6k+9) + 8B(k^3+9k^2+27k+27)$$

$$\Rightarrow 8A(\cancel{k^2}+\cancel{6k}+9) + 8B(\cancel{k^3}+\cancel{9k^2}+27k+27)$$

$$-7\left[4A(\cancel{k^2}+\cancel{4k}+4) + 4B(\cancel{k^3}+\cancel{12}\,6k^2+12k+8)\right]$$

$$+16\left[2A(\cancel{k^2}+\cancel{2k}+1) + 2B(\cancel{k^3}+\cancel{3k^2}+3k+1)\right]$$

$$-12\left[\cancel{Ak^2}+\cancel{Bk^3}\right] = k$$

$$\Rightarrow \cancel{72A/+27\cdot 8B/-10\,2A} \qquad A = -1/8, \; B = -1/24.$$

$$\Rightarrow y_k = c_1 2^k + c_2 k 2^k + c_3 3^k - \frac{1}{8}k^2 2^k - \frac{1}{24}k^3 2^k$$

<u>Μέθοδος μεταβολής παραμέτρων</u>

Μέθοδος εύρεσης ειδικής λύσης της εξίσωσης:

$$y_{k+n} + a_1(k)\, y_{k+n-1} + \dots + a_n(k) = R_k$$

κάτω από την υπόθεση ότι είναι γνωστή η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Έστω $\{y_k^{(1)}, \dots, y_k^{(n)}\}$ ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ομογενούς και η γενική λύση

$$c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} + \dots + c_n y_k^{(n)}$$

Με την μεθοδολογία της μεθόδου θέτουμε $c_1 = c_1(k)$, $c_2 = c_2(k)$, ..., $c_n = c_n(k)$ και επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις αυτές ώστε

$$Y_k := c_1(k)y_k^{(1)} + c_2(k)y_k^{(2)} + \cdots + c_n(k)\,y_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\,y_k^{(i)}$$

νά είναι ειδική λύση της εξίσωσης (μή ομογενούς). Αυξάνοντας τον δείκτη κατά 1:

$$Y_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k+1)\,y_{k+1}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\left[c_i(k) + \Delta c_i(k)\right] y_{k+1}^{(i)}$$

$$\Rightarrow \underline{Y_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\,y_{k+1}^{(i)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k)\,y_{k+1}^{(i)}}_{0}$$

Θέτουμε $\sum_i \Delta c_i(k)\,y_{k+1}^{(i)} = 0$, οπότε $Y_{k+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\,y_{k+1}^{(i)}$.
Αυξάνοντας τον δείκτη κατά 1:

$$Y_{k+2} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k+1)\,y_{k+2}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n}\left[c_i(k) + \Delta c_i(k)\right] y_{k+2}^{(i)}$$

$$\Rightarrow \underline{Y_{k+2} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\,y_{k+2}^{(i)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k)\,y_{k+2}^{(i)}}_{0}.$$

Θέτοντας πάλι $\sum_i \Delta c_i(k)\,y_{k+2}^{(i)} = 0$ έχουμε $Y_{k+2} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\,y_{k+2}^{(i)}$
Συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι:

$$\underline{Y_{k+n-1} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\,y_{k+n-1}^{(i)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k)\,y_{k+n-1}^{(i)}}_{0}$$

και τελικά:

$$Y_{k+n} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k+1)\,y^{(i)}_{k+n} = \sum_{i=1}^{n}\left[c_i(k) + \Delta c_i(k)\right] y_{k+n}^{(i)}$$

$$\Rightarrow \underline{Y_{k+n} = \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\,y_{k+n}^{(i)}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k)\,y_{k+n}^{(i)}}_{R_k},$$

Παρατηρούμε ότι

$$Y_{k+n} + a_1(k)\, Y_{k+n-1} + \cdots + a_n(k)\, Y_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\, y_{k+n}^{(i)} + a_1(k) \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\, y_{k+n-1}^{(i)} + \cdots + a_n(k) \sum_{i=1}^{n} c_i(k)\, y_k^{(i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i(k) \cancelto{0}{\left[y_{k+n}^{(i)} + a_1(k)\, y_{k+n-1}^{(i)} + \cdots + a_n(k)\, y_k^{(i)} \right]}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k)\, y_{k+n}^{(i)} = R_k$$

Δηλ. η Y_k είναι λύση της μη ομογενούς, υπό την προϋπόθεση ότι:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k)\, y_{k+1}^{(i)} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k)\, y_{k+2}^{(i)} = 0 \\
&\qquad \vdots \\
&\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k)\, y_{k+n-1}^{(i)} = 0 \\
&\sum_{i=1}^{n} \Delta c_i(k)\, y_{k+n}^{(i)} = R_k
\end{aligned}\right\}$$

που γράφεται στη μορφή:

$$\begin{bmatrix} y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} & \cdots & y_{k+1}^{(n)} \\ y_{k+2}^{(1)} & y_{k+2}^{(2)} & \cdots & y_{k+2}^{(n)} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ y_{k+n}^{(1)} & y_{k+n}^{(2)} & \cdots & y_{k+n}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_1(k) \\ \Delta c_2(k) \\ \vdots \\ \\ \Delta c_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ R_k \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα $C(k+1) \neq 0$ (ορίζουσα Casorati) καθώς $\{ y_k^{(i)} \}_{i=1}^{n}$ θεμελιώδες σύστημα λύσεων. Λύνοντας το σύστημα:

$$\Delta c_i(k) = \frac{f_i(k)}{C(k+1)} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

όπου $f_i(k)$ είναι η ορίζουσα Casorati με την στήλη i να έχει αντικατασταθεί από την στήλη $[0\ 0 \cdots 0\ R_k]^T$. Επομένως

$$c_i(k+1) - c_i(k) = \frac{f_i(k)}{C(k+1)} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

την οποία λύνουμε (με την μέθοδο απροσδιόριστων συντελεστών) ως προς $c_i(k)$.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η εξίσωση διαφορών

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 4^k$$

Η αντίστοιχη ομογενής έχει χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 - 3r + 2 = 0$ $\Rightarrow (r-1)(r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1$ οπότε $\{y_k^{(1)}, y_k^{(2)}\} = \{2^k, 1\}$ είναι ένα θ.σ. λύσεων. Έστω $Y_k = c_1(k)2^k + c_2(k)$. Τότε:

$$Y_{k+1} = c_1(k+1)2^{k+1} + c_2(k+1)$$

$$= c_1(k)2^{k+1} + c_2(k) + \underbrace{\Delta c_1(k)2^{k+1} + \Delta c_2(k)}_{0}.$$

$$\Rightarrow Y_{k+2} = c_1(k+1)2^{k+2} + c_2(k+1)$$

$$= c_1(k)2^{k+2} + c_2(k) + \underbrace{\Delta c_1(k)2^{k+2} + \Delta c_2(k)}_{4^k}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2^{k+1} & 1 \\ 2^{k+2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_1(k) \\ \Delta c_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4^k \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα Casorati $C(k+1) = 2^{k+1} - 2^{k+2} = -2^{k+1}$. Επομένως έχουμε:

$$\Delta c_1(k) = \frac{D_1}{C(k+1)} \qquad \Delta c_2(k) = \frac{D_2}{C(k+1)}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4^k & 1 \end{vmatrix} = -4^k \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 2^{k+2} & 4^k \end{vmatrix}$$

$$= 4^k \cdot 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow \Delta c_1(k) = \frac{-4^k}{-2^{k+1}} = \frac{2^k \cdot 2^k}{2^k \cdot 2} = 2^{k-1}$$

$$\Rightarrow c_1(k) = d_1 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i-1} = d_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = d_1 + \frac{1}{2}\,\frac{2^k-1}{2-1}$$

$$= d_1 + \frac{1}{2}(2^k-1) = d_2 + 2^{k-1} \qquad \left(d_2 =: d_1 - \tfrac{1}{2}\right).$$

και

$$\Delta c_2(k) = \frac{4^k \cdot 2^{k+1}}{-2^{k+1}} = -4^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_2(k) = d_3 - \sum_{i=0}^{k-1} 4^i = d_3 - \frac{4^k-1}{4-1} = d_3 - \frac{1}{3}(4^k-1)$$

$$= -\frac{1}{3}4^k + d_4 \qquad \left(d_4 = d_3 + \tfrac{1}{3}\right)$$

Επομένως:

$$y_k = \left(d_2 + 2^{k-1}\right)2^k + d_4 - \frac{1}{3}4^k$$

$$= d_2 \cdot 2^k + 2^{2k-1} + d_4 - \frac{1}{3}4^k.$$

$$= d_2 2^k + d_4 + \frac{1}{2}4^k - \frac{1}{3}4^k$$

$$= d_2 2^k + d_4 + \frac{1}{6}4^k$$

Επειδή $d_2 2^k + d_4$ είναι λύση της ομογενούς μια αντίστοιχη ειδική λύση της μη ομογενούς είναι $y_k^* = \frac{1}{6}4^k$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

Αποτελούνται από εξίσωση διαφορών, αρχική και τελικές συνθήκες.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το πρόβλημα:

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 5, \qquad y_0 = 1, \ y_{10} = 1$$

Η γενική λύση της ομογενούς βρίσκεται από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$, δηλ. $y_k^{o\mu} = c_1 + c_2 2^k$. Στη συνέχεια βρίσκουμε ειδική λύση της εξίσωσης. Έχουμε $[R_k] = \{1\}$ πού είναι λύση της ομογενούς, συνεπώς ψάχνουμε για λύση $y_n^* = Ak \Rightarrow y_{k+1}^* = A(k+1) \Rightarrow y_{k+2}^* = A(k+2)$

$$\Rightarrow A(\cancel{k}+2) - 3A(\cancel{k}+1) + 2\cancel{Ak} = 5.$$

$$\Rightarrow -A = 5 \Rightarrow A = -5$$

Επομένως η γενική λύση είναι: $y_k = c_1 + c_2 2^k - 5k$. Οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Είναι:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= c_1 + c_2 - \cancel{50} = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = \cancel{5}\,1 \\ y_{10} &= c_1 + c_2 2^{10} - 50 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 2^{10} = \cancel{5}\,51 \end{aligned}\right\}.$$

$$\Rightarrow c_2(2^{10} - 1) = 50 \Rightarrow c_2 = \frac{50}{2^{10}-1} \Rightarrow c_1 = 1 - \frac{50}{2^{10}-1}.$$

$$= \frac{2^{10} - 51}{2^{10}-1}$$

$$\Rightarrow y_k = \left(\frac{2^{10}-51}{2^{10}-1}\right) + \left(\frac{50}{2^{10}-1}\right) 2^k + 5k.$$

<u>Παράδειγμα</u> : Θεωρούμε το πρόβλημα

$$y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k = 0, \qquad y_1 = 0, \quad y_{20} = 1$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς :

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y_k^{o\mu} = c_1 + c_2 k := y_k$$

Αντικαθιστώντας τις συνοριακές τιμές :

$$y_1 = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$y_{20} = c_1 + 20c_2 = 1 \Rightarrow 19c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1/19.$$

$$c_1 = -1/19$$

$$\Rightarrow y_k = -\frac{1}{19} + \frac{1}{19}k \qquad (k \geq 1).$$

Οριακή συμπεριφορά και ευστάθεια

Συνήθως επιθυμούμε να μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά των λύσεων, κυρίως σε συνάρτηση με τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Παράδειγμα. Έστω η ομογενής 2ης τάξης: $y_{k+2}-3y_{k+1}+2y_k=0$ με χαρακτηριστική εξίσωση $r^2-3r+2=(r-1)(r-2)=0$ $\Rightarrow y_k=c_1+c_2 2^k$. Η γενική λύση εκφράζεται ως συνάρτηση των y_0 και y_1 ως εξής:

$$y_0=c_1+c_2 \quad , \quad y_1=c_1+2c_2$$

$$\Rightarrow y_1-y_0=c_2 \quad , \quad c_1=y_0-(y_1-y_0)=2y_0-y_1.$$

Άρα: $y_k=(2y_0-y_1)+(y_1-y_0)\,2^k$.

Αν $y_1-y_0=0$ τότε $y_k=2y_0-y_1=y_0 \quad \forall k\in\mathbb{N}_0$

Στην (γενική) περίπτωση που $y_0\neq y_1$, έχουμε:

$$y_k\to+\infty \quad \text{αν} \quad y_1-y_0>0$$

και

$$y_k\to-\infty \quad \text{αν} \quad y_1-y_0<0$$

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση 2ης τάξης $2y_{k+2}+3y_{k+1}-2y_k=0$ με χαρακτηριστική εξίσωση $2r^2+3r-2=(2r-1)(r+2)=0$ $\Rightarrow r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=-2$. Συνεπώς

$$y_k=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^k+c_2(-2)^k.$$

Οι ακολουθίες $\left(\frac{1}{2}\right)^k\to0$ και $(-2)^k$ ταλαντώνεται με αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης και επομένως το όριο $\lim (-2)^k$ δεν ορίζεται. Έχουμε

$$y_0 = c_1 + c_2 \qquad y_1 = \frac{1}{2}c_1 - 2c_2 \Rightarrow 2y_1 = c_1 - 4c_2.$$

$$\Rightarrow y_0 - 2y_1 = 5c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{5}(y_0 - 2y_1)$$

$$\Rightarrow c_1 = y_0 - \frac{1}{5}(y_0 - 2y_1) = \frac{4}{5}y_0 + \frac{2}{5}y_1.$$

Συνεπώς $\quad y_k = \frac{1}{5}(4y_0 + 2y_1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{5}(y_0 - 2y_1)(-2)^k.$

Αν $y_0 = 2y_1 \Rightarrow y_k \to 0$, ενώ αν $y_0 \neq 2y_1$ η y_k δεν είναι φραγμένη και το όριο της δεν ορίζεται. Συνεπώς, αν $y_0 = 2y_1$ και οι συνθήκες διαταραχθούν ελάχιστα μπορεί να έχουμε δραματική αλλαγή στην οριακή συμπεριφορά της λύσης. (τεράστια ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες).

Ευστάθεια εξισώσεων διαφορών $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές

Εξετάζουμε εξισώσεις της μορφής:

$$y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_2 y_k = R \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2 + \alpha_1 r + \alpha_2 = 0$. Αν $r=1$ ήταν ρίζα η εξίσωση δεν θα είχε σημείο ισορροπίας (αν το A ήταν σημείο ισορροπίας, τότε $A = R/(1+\alpha_1+\alpha_2)$, αλλά τότε $1+\alpha_1+\alpha_2 = P(1) = 0$).

Έστω $r_1 \neq r_2$, $r_1 \neq 1$, $r_2 \neq 1$. Τότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι

$$y_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k + \underbrace{\frac{R}{1+\alpha_1+\alpha_2}}_{A}$$

- Αν $|r_1|<1$ και $|r_2|<1$, τότε $r_1^k \to 0$, $r_2^k \to 0$ και $y_k \to A$ (ανεξάρτητα από τις αρχικές τιμές y_0, y_1).
- Αν $r_1 = r_2$, $|r_1|<1$, τότε η γενική λύση είναι:

$$y_k = c_1 r_1^k + c_2 k r_1^k + A$$

Ο όρος $r_1^k \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Έστω $x_k = k r_1^k$. Τότε

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = \frac{(k+1)|r_1|^{k+1}}{k\,|r_1|^k} = \frac{k+1}{k}|r_1| = \left(1+\frac{1}{k}\right)|r_1|$$

Άρα

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)|r_1| = |r_1| < 1$$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |x_k| = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Επομένως $\lim_{k\to\infty} y_k = A$.

- Αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες $r_1 = \rho e^{i\theta}$, $r_2 = \bar{r}_1 = \rho e^{-i\theta}$ τότε

$$y_k = c_1 \rho^k \cos k\theta + c_2 \rho^k \sin k\theta + A$$

$$|y_k - A| \le |c_1|\rho^k |\cos k\theta| + |c_2|\rho^k |\sin k\theta|$$

$$\le (|c_1|+|c_2|)\rho^k \to 0 \quad \text{καθώς} \quad k\to\infty$$

δηλ. $y_k \to A$. Συμπέρασμα: Αν $|r_1|<1$ και $|r_2|<1$, $y_k \to A$ (και στις τρεις περιπτώσεις και ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες).

Αν για μία τουλάχιστον ρίζα ισχύει $|r_i|>1$, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές και η συμπεριφορά της λύσης εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Εξετάζουμε τις "οριακές" καταστάσεις:

(i) $r_1 = r_2 = -1$: $y_k = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k + A$, $c_i \in \mathbb{R}$

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} y_{2n} = c_1 + c_2 k + A &\to \operatorname{sign}(c_2)\cdot\infty \quad (c_2 \neq 0) \\ &\to c_1 + A \quad (c_2 = 0) \end{aligned}\right\}.$$

$$\begin{aligned} y_{2n+1} = -c_1 - c_2 k + A &\to -\operatorname{sign}(c_2)\cdot\infty \quad (c_2 \neq 0) \\ &\to -c_1 + A \quad (c_2 = 0). \end{aligned}$$

Αν $c_2 \neq 0$ δεν υπάρχει όριο καθώς $k \to \infty$ (ταλάντωση με αυξανόμενο πλάτος). Αν $c_2 = 0$ και $c_1 \neq 0$ πάλι δεν υπάρχει όριο (ταλάντωση με σταθερό πλάτος).

(ii) Αν $r_1 = -1$, $|r_2| < 1$ τότε η γενική λύση είναι

$$y_k = c_1(-1)^k + c_2 r_2^k + A$$

Αν $k = 2n$: $y_{2n} = c_1 + c_2 r_2^{2n} + A \to c_1 + A$

" $k = 2n+1$: $y_{2n+1} = -c_1 + c_2 r_2^{2n+1} + A \to -c_1 + A$.

(Ταλάντωση με σταθερό πλάτος γύρω από το σημείο ισορροπίας A, εκτός αν $c_1 = 0$).

(iii) $r_1 = \rho e^{i\theta}$, $r_2 = \bar{r}_1 = \rho e^{-i\theta}$, $\rho = 1$: $y_k = c_1 \cos(k\theta + c_2) + A$.

$$\Rightarrow |y_k - A| = |c_1|\,|\cos(k\theta + c_2)| \leq |c_1|$$

(Ταλάντωση με σταθερό πλάτος γύρω από το σημείο ισορροπίας A).
A ευσταθές (κατά Lyapunov) αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

Συστήματα εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης:

$$\underline{y}_{k+1} = A\underline{y}_k + \underline{b}_k \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \underline{b}_k, \underline{y}_k \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{N}_0$$

Αν $\underline{b}_k \neq \underline{0}$ το σύστημα είναι μη ομογενές. Αν $\underline{b}_k = \underline{0}$ $\forall k$ το σύστημα είναι ομογενές.

$$k=0 \Rightarrow \underline{y}_1 = A\underline{y}_0 + \underline{b}_0$$

$$k=1 \Rightarrow \underline{y}_2 = A\underline{y}_1 + \underline{b}_1 = A(A\underline{y}_0 + \underline{b}_0) + \underline{b}_1 = A^2\underline{y}_0 + A\underline{b}_0 + \underline{b}_1$$

Επαγωγικά:

$$\underline{y}_k = A^k \underline{y}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} \underline{b}_j \qquad k=0,1,2,\dots$$

Ο πρώτος όρος εξαρτάται αποκλειστικά από την αρχική συνθήκη $\underline{y}_0$, ο δεύτερος από τα $\underline{b}_k$. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε τα A^k και μάλιστα με τρόπο που δίνει πληροφορίες για την συμπεριφορά της λύσης. Έστω ότι ο πίνακας A είναι απλής δομής με ιδιοτιμές $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{\underline{u}_i\}$ (γραμμικά ανεξάρτητα). Αν $P = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \dots \underline{u}_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, τότε

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$$\Rightarrow P^{-1}A^kP = \mathrm{diag}\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}$$

Η λύση του ομογενούς συστήματος έχει τη μορφή:

$$\underline{y}_k = A^k\underline{y}_0 = P\,\mathrm{diag}\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}\underbrace{P^{-1}\underline{y}_0}_{\underline{c}}$$

$$\Rightarrow \underline{y}_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k \underline{u}_i$$

όπου c_i αυθαίρετες σταθερές.

<u>Παράδειγμα:</u> Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1}^{(1)} &= 2y_k^{(1)} - 4y_k^{(2)} \\ y_{k+1}^{(2)} &= -y_k^{(1)} + 5y_k^{(2)} \\ y_0^{(1)} &= 1, \quad y_0^{(2)} = -2 \end{aligned}\right\}$$

Το πρόβλημα γράφεται ως:

$$\underline{y}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underline{y}_k \qquad \underline{y}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}.$$

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-2 & 4 \\ 1 & \lambda-5 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-6) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 6.$$

Ιδιοδιανύσματα:

$\lambda=1$: $$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\underline{u}_1} = \underline{0} \Rightarrow x = 4y, \quad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda=6$ $$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\underline{u}_2} = \underline{0} \Rightarrow x + y = 0 \qquad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς $$\underline{y}_k = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} 1^k + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} 6^k = \begin{bmatrix} 4c_1 - c_2 6^k \\ c_1 + c_2 6^k \end{bmatrix}.$$

$$k=0 \Rightarrow \underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 4c_1 - \cancel{8}c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow 5c_1 = -1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{5} \qquad c_2 = -2 - c_1 = -2 + \frac{1}{5} = -\frac{9}{5}.$$

$$\Rightarrow \underline{y}_k = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} + \frac{9}{5} 6^k \\ -\frac{1}{5} \cancel{+} - \frac{9}{5} 6^k \end{bmatrix}. \qquad (k \geq 0).$$

Στην περίπτωση που ο A δεν είναι απλής δομής τότε, ~~ας~~ $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1} \cdots (\lambda - \lambda_\rho)^{\tau_\rho}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j, \ i \neq j)$ και $d_i = \dim N_r(\lambda_i I - A) := n - r_i$ όπου $r_i = \mathrm{Rank}(\lambda_i I - A)$, όπου ~~$\alpha$~~ τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i και d_i η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i. Ισχύει:

$1 \leq d_i \leq \tau_i \quad \forall \ i=1,2,\dots,\rho$ και εφόσον ο πίνακας A είναι μη απλής δομής έχουμε $d_i < \tau_i$ για ένα τουλάχιστον $i=1,2,\dots \rho$. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i ορίζουμε d_i ιδιοδιανύσματα και $\tau_i - d_i$ γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Η μορφή Jordan του πίνακα A είναι

$$J = \mathrm{bdiag}\{J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_\rho(\lambda_\rho)\}$$

όπου $\quad J_i(\lambda_i) = \mathrm{bdiag}\{J_{i1}(\lambda_i), J_{i2}(\lambda_i), \dots J_{id_i}(\lambda_i)\}.$

όπου τα $\dim[J_{ij}(\lambda_i)]$ καθορίζονται ως εξής: Θέτουμε

$$r_{i1} = \mathrm{Rank}(\lambda_i I - A), \quad r_{i2} = \mathrm{Rank}(\lambda_i I - A)^2, \quad r_{ij} = \mathrm{Rank}(\lambda_i I - A)^j$$

Έχουμε $r_{ij} \geq r_{i,j+1}$. Έστω ℓ_i ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο $\quad r_{i1} > r_{i2} > \dots > r_{i\ell_i} = r_{i,\ell_i+1}$. Ορίζουμε την χαρακτηριστική Segré:

καί $J_1(\lambda_1) = \mathrm{diag}\{J_{11}(\lambda_1), J_{12}(\lambda_1), J_{13}(\lambda_1), J_{14}(\lambda_1), J_{15}(\lambda_1)\}$

όπου:

$$J_{11}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_{12}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{13}(\lambda_1) = J_{14}(\lambda_1) = J_{15}(\lambda_1) = [\lambda_1].$$

(Επίσης $J_{21} = [\lambda_2]$, $d_2 = r_2 = 1$). Άρα

$$A\left[\underline{u}_{11}^{(1)}\ \underline{u}_{12}^{(1)}\ \underline{u}_{13}^{(1)}\ \underline{u}_{14}^{(1)}\ \cancel{\underline{u}_{15}}\ \vdots\ \underline{u}_{21}^{(1)}\ \underline{u}_{22}^{(1)}\ \vdots\ \underline{u}_{31}^{(1)}\ \vdots\ \underline{u}_{41}^{(1)}\ \vdots\ \underline{u}_{51}^{(1)}\ \Big|\ \underline{u}_{11}^{(2)}\right] =$$

$$= \left[\underline{u}_{11}^{(1)}\ \underline{u}_{12}^{(1)}\ \underline{u}_{13}^{(1)}\ \underline{u}_{14}^{(1)}\ \vdots\ \underline{u}_{21}^{(1)}\ \underline{u}_{22}^{(1)}\ \vdots\ \underline{u}_{31}^{(1)}\ \vdots\ \underline{u}_{41}^{(1)}\ \vdots\ \underline{u}_{51}^{(1)}\ \Big|\ \underline{u}_{11}^{(2)}\right] \cdot$$

$$\cdot\ \mathrm{diag}\{J_{11}(\lambda_1), J_{12}(\lambda_1), J_{13}(\lambda_1), J_{14}(\lambda_1), J_{21}(\lambda_2)\}. \quad \square$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή

$$P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}\{J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_e(\lambda_e)\}$$

$$\Rightarrow A = PJP^{-1} \Rightarrow A^k = PJ^kP^{-1} \quad \text{όπου:}$$

$$J^k = \mathrm{diag}\{J_1^k(\lambda_1), \dots, J_e^k(\lambda_e)\}$$

καί $J_i^k(\lambda_i) = \mathrm{diag}\{J_{i1}^k(\lambda_i), \dots, J_{id_i}^k(\lambda_i)\}$.

όπου $$J_{ij}^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}^k$$

$$S_i = [\, n - r_{i1},\ r_{i1} - r_{i2}, \dots,\ r_{i,l_i-1} - r_{i,l_i} \,] \quad (r_{i,l_i} - r_{i,l_i+1} = 0)$$

Τότε: $n - r_{i1}$ = # ιδιοδιανυσμάτων (γενικευμένης) τάξης 1
$r_{i1} - r_{i2}$ = # γεν. ιδιοδιανυσμάτων τάξης 2
⋮
$r_{i,l_i-1} - r_{i,l_i}$ = # " " τάξης l_i

Τα μήκη των αλυσίδων ($\dim \mathcal{J}_{ij}(\lambda_i)$, $j=1,2,\dots d_i$) καθορίζονται από το διάγραμμα Ferrer

1^{η} τάξη : $\overbrace{(n - r_{i1})}^{d_i}$: * * * * * *
2^{η} τάξη : $(r_{i1} - r_{i2})$: * * * *
⋮
l_i τάξη : $(r_{i,l_i-1} - r_{i,l_i})$: * *

Το άθροισμα στοιχείων κάθε στήλης δίνει το μήκος της αντίστοιχης αλυσίδας ($= \dim(\mathcal{J}_{ij})$).

Παράδειγμα: Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ με $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^9 (\lambda - \lambda_2)$ και
$r_{11} = 5$, $r_{12} = 3$, $r_{13} = 2$, $\underbrace{r_{14}}_{l_1} = 1$, $r_{15} = 1$

Έχουμε: $l_1 = \cancel{3}4$ ($\cancel{d_1 = 5}$). Χαρακτηριστική Segré

$$S_1 = [\, n - r_{11},\ r_{11} - r_{12},\ r_{12} - r_{13},\ r_{13} - r_{14} \,]$$
$$= [\ 5,\ 2,\ 1,\ 1\ ].$$

$n - r_{11}$: * * * * *
$r_{11} - r_{12}$: * *
$r_{12} - r_{13}$: *
$r_{13} - r_{14}$: *

Έστω $J_{ij} \in \mathbb{R}^{m_{ij} \times m_{ij}}$. Τότε

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_i^{k-2} & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-m_{ij}+1)}{(m_{ij}-1)!}\lambda_i^{k-m_{ij}+1} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-m_{ij}+2)}{(m_{ij}-2)!}\lambda_i^{k-m_{ij}+2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

(Για παράδειγμα: Αν $J_{ij}(\lambda_i) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_i^{k-2} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}, \text{ κλ.π}).$$

Έχουμε: $J_{ij} = \lambda_i I_3 + H$ όπου $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ο πίνακας H είναι μηδενοδύναμος, δηλ. $H^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H^3 = 0$

Επομένως $J_{ij}^k = (\lambda_i I_3 + H)^k = \lambda_i^k I + k\lambda_i^{k-1} H + \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_i^{k-2} H^2$

$$= \lambda_i^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + k\lambda_i^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_i^{k-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2!}\lambda_i^{k-2} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix})$$

Παράδειγμα. Έστω το σύστημα $\underline{y}_{k+1} = A\,\underline{y}_k$ όπου ο A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = (\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2) \qquad \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Έστω ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_1 είναι $d_1=1$. Τότε στο λ_1 αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα $\underline{u}_1$ και ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $2^{ης}$ τάξης $\underline{u}_2$ (και στην ιδιοτιμή λ_2 ένα ιδιοδιάνυσμα $\underline{w}_1$). Επομένως, αν $P = [\,\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{w}\,]$

$$AP = PJ \quad , \quad J = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A = PJP^{-1} \Rightarrow A^k = PJ^kP^{-1} =$$

$$= P\left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1^k & k\lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2^k \end{array}\right]P^{-1}$$

Και η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$\underline{y}_k = A^k\underline{y}_0 = PJ^k\underbrace{P^{-1}\underline{y}_0}_{\underline{c}} =$$

$$= \left[\,\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \,\middle|\, \underline{w}_1\right]\begin{bmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \cancel{c_1\lambda_1^k\underline{u}_1} \cancel{+} \cancel{c_2\lambda_1^k(k\underline{u}_1+\underline{u}_2)} \cancel{+c_3\lambda_2^k\underline{w}_1}$$

$$= c_1\lambda_1^k\underline{u}_1 + c_2\left[k\lambda_1^{k-1}\underline{u}_1 + \lambda_1^k\underline{u}_2\right] + c_3\lambda_2^k\underline{w}_1$$

$$= (c_1\lambda_1^k + c_2k\lambda_1^{k-1})\underline{u}_1 + c_2\lambda_1^k\underline{u}_2 + c_3\lambda_2^k\underline{w}_1$$

Παράδειγμα Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$\underline{y}_{k+1} = A\,\underline{y}_k \qquad \underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Έχουμε $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda) = (\lambda-2)^3 \Rightarrow \lambda = 2 \quad (\tau=3).$$

Ιδιοδιανύσματα: $(\lambda=2)$

$$(\lambda I - A)\underline{u}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 + 3z_1 = 0, \quad z_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0, \quad \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $d=1$ και υπάρχει επίσης ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $2^{ης}$ τάξης και ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $3^{ης}$ τάξης, έστω $\underline{u}_2$ και $\underline{u}_3$. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A\underline{u}_2 &= \lambda \underline{u}_2 + \underline{u}_1 = 2\underline{u}_2 + \underline{u}_1 \\ A\underline{u}_3 &= \lambda \underline{u}_3 + \underline{u}_2 = 2\underline{u}_3 + \underline{u}_2 \end{aligned}\right\}.$$

Ισοδύναμα:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(\lambda I - A)} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{u}_1}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -y_2 - 3z_2 = -1 \\ z_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} y_2 = 1 \\ z_2 = 0, \end{matrix} \quad , x_2 \text{ αυθαίρετο.}$$

Θέτουμε: $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(\lambda I - A)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}}_{u_3} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_2}.$$

$$\Rightarrow -y_3 - 3z_3 = 0 \quad , z_3 = -1 \qquad \underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y_3 = -3z_3 = 3 \qquad (x_3 \text{ αυθαίρετο}).$$

Άρα $P = [\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \underline{u}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$\underline{y}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^k}_{J^k} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{y}_0}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k + 5k2^{k-1} - \frac{1}{2} k(k-1) 2^{k-2} \\ 5 \cdot 2^k - k2^{k-1} \\ -2^k \end{bmatrix}$$

$$\cancel{= \begin{bmatrix} 2^k - 5k \cdot 2^{k-1} - \frac{1}{2} k(k-1) 2^{k-3} \\ 2^k + 5k2^{k-1} - \frac{1}{2} k(k-1) 2^{k-2} + 15 \cdot 2^k - 3k2^{k-1} \\ 2^k \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{= \begin{bmatrix} 2^{k-3}\left[8 - 20k - k^2 + k\right]. \\ \\ \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{k-3}\left[8 + 20k - k^2 + k\right] \\ 2^{k-1}\left[10 - k\right] \\ -2^k \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (8 + 21k - k^2) 2^{k-3} \\ (10 - k) 2^{k-1} \\ -2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (8 + 21k - k^2) 2^{k-3} \\ \cancel{(8 + 21k - k^2) 2^{k-3} + 3(10-k)2^{k-1}} \quad (10-k)2^{k-1} - 6 \cdot 2^{k-1} \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (8 + 21k - k^2) 2^{k-3} \\ (4 - k) 2^{k-1} \\ 2^k \end{bmatrix}.$$

Μελέτη γραμμικής εξίσωσης διαφορών n-τάξης μέσω ισοδύναμου συστήματος $1^{ης}$ τάξης.

Έστω γραμμική εξίσωση n-τάξης:

$$x_{k+n} + a_1 x_{k+n-1} + a_2 x_{k+n-2} + \cdots + a_{n-1} x_{k+1} + a_n x_k = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$$a_n \neq 0.$$

Θέτοντας:

$$\left.\begin{aligned} y_k^{(1)} &= x_k \\ y_k^{(2)} &= x_{k+1} \\ &\vdots \\ y_k^{(n)} &= x_{k+n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_{k+1}^{(1)} &= x_{k+1} = y_k^{(2)} \\ y_{k+1}^{(2)} &= x_{k+2} = y_k^{(3)} \\ &\vdots \\ y_{k+1}^{(n)} &= x_{k+n} = -a_n \cancel{x} y_1 - a_{n-1} y_2 - \cdots \\ &\quad - a_1 \cancel{y_k} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{k+1}^{(1)} \\ y_{k+1}^{(2)} \\ \vdots \\ y_{k+1}^{(n)} \end{bmatrix}}_{\underline{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_k^{(1)} \\ y_k^{(2)} \\ \vdots \\ y_k^{(n)} \end{bmatrix}}_{\underline{x}_k}$$