ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεωρία Ελέγχου: Ασκήσεις Ανάδραση καταστάσεων, Παρατηρητές

Άσκηση 1: Έστω εξίσωση Sylvster: $AX - XB = 0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Αν είναι γνωστό ότι υπάρχει λύση $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ με $\mathrm{Rank}(X) = 1$, βρείτε κοινή ιδιοτιμή των πινάκων A και B.

Λύση: Έστω $X = uv'$ λύση με $\mathrm{Rank}(X) = 1$. Τότε $u \neq 0$ και $v \neq 0$. Επομένως:

$$Auv' = uv'B \Rightarrow Auv'v = uv'Bv \Rightarrow Au = \left(\frac{v'Bv}{\|v\|^2}\right) u := \lambda_1 u$$

και u δεξιό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1. Επίσης:

$$Auv' = uv'B \Rightarrow u'Auv' = u'uv'B \Rightarrow v'B = \left(\frac{u'Au}{\|u\|^2}\right) v' := \lambda_2 v'$$

και v' αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2. Επίσης:

$$v'B = \left(\frac{u'Au}{\|u\|^2}\right) v' \Rightarrow v'Bv = \left(\frac{u'Au}{\|u\|^2}\right) v'v \Rightarrow \lambda_1 = \frac{v'Bv}{\|v\|^2} = \frac{u'Au}{\|u\|^2} = \lambda_2$$

Άσκηση 2: Έστω $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λύση της Αλγεβρικής Εξίσωσης Riccati (AEP): $A^T P + PA + Q - PBB^T P = 0$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ορίζουμε $K = -B^T P$. Λέμε ότι ο πίνακας $P = P^T$ είναι σταθεροποιητική λύση της AEP αν ο πίνακας $A + BK = A - BB^T P$ είναι Hurwitz. Δείξτε ότι υπάρχει το πολύ μία σταθεροποιητική λύση της AEP. [Υπόδειξη: Υποθέστε ότι P_1 και P_2 είναι δύο διακριτές σταθεροποιητικές λύσεις. Εκφράστε την διαφορά των αντίστοιχων AEP σε μορφή εξίσωσης Sylvester και καταλήξτε σε αντίφαση].

Λύση: Έστω ότι P_1 και P_2, $P_1 \neq P_2$, είναι και οι δύο σταθεροποιητικές λύσεις. Τότε

$$A^T P_1 + P_1 A + Q - P_1 BB^T P_1 = 0 \;\text{ και }\; A^T P_2 + P_2 A + Q - P_2 BB^T P_2 = 0$$

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$A^T(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A - P_1 BB^T P_1 + P_2 BB^T P_2 = 0 \Rightarrow (A + BK_2)^T (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)(A + BK_1) = 0$$

και εφόσον $A + BK_1$ και $A + BK_2$ Hurwitz (και επομένως $\lambda_i(A + BK_1) + \lambda_j(A + BK_2) \neq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε $P_1 - P_2 = 0$ δυλαδή $P_1 = P_2$.

Άσκηση 3: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},\; A_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n},\; i = 1, 2 \text{ και } j = 1, 2$$

Έστω ότι $\mathcal{V} = \mathcal{R}(M)$ είανι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2n}$ τέτοιος ώστε:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} X,\;\; M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix},\;\; M_1, M_2, X \in \mathbb{R}^{n\times n},\; \det(M_1) \neq 0$$

Δείξτε ότι $P = M_2 M_1^{-1}$ είναι λύση της τετραγωνικής πινακο-εξίσωσης: $PA_{11} - A_{22}P + PA_{12}P - A_{21} = 0$.

Λύση: Έχουμε:

$$A_{11}M_1 + A_{12}M_2 = M_1 X, \ \ A_{21}M_1 + A_{22}M_2 = M_2 X$$

Με απαλειφή του πίνακα X_1 από την πρώτη εξίσωση:

$$X = M_1^{-1}A_{11}M_1 + M_1^{-1}A_{12}M_2$$

Αντικαθιστώντας στην δεύτερη εξίσωση:

$$A_{21}M_1 + A_{22}M_2 = M_2[M_1^{-1}A_{11}M_1 + M_1^{-1}A_{12}M_2]$$

Πολλαπλασιάζοντας με M_1^{-1} από τα δεξιά:

$$A_{21} + A_{22}M_2M_1^{-1} = M_2M_1^{-1}A_{11} + M_2M_1^{-1}A_{12}M_2M_1^{-1}$$

από όπου προκύπτει το αποτέλεσμα από τον ορισμό του πίνακα $P = M_2M_1^{-1}$.

Άσκηση 4: Δίνεται το σύστημα $x' = Ax + Bu$, όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί πίνακας F ώστε $\sigma(A + BF) = \{-1 \pm i, -2 \pm i\}$.

Λύση: Επιλέγουμε:

$$F = e_2 f^T = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \right]$$

και επομένως

$$A_c = A + BF = A + Be_2f^T = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+f_0 & 1+f_1 & -3+f_2 & 4+f_3 \end{array} \right]$$

Άρα

$$\begin{aligned} \phi_{A_c}(\lambda) &= \lambda^4 - (4+f_3)\lambda^3 + (3-f_2)\lambda^2 - (1+f_1)\lambda - (1+f_0) \\ &= [(\lambda+1)^2+1][(\lambda+2)^2+1] = \lambda^2 + 6\lambda^3 + 15\lambda^2 + 18\lambda + 10 \end{aligned}$$

και επομένως $f_0 = -11$, $f_1 = -19$, $f_2 = -12$ και $f_3 = -10$.

Άσκηση 5: Σχεδιάστε παρατηρητή για το σύστημα ταλάντωσης $x'(t) = v(t)$, $v'(t) = -\omega_0^2 x(t)$ όταν η μέτρηση είναι η μεταβλητή ταχύτητας $v(t)$. Επιλέξτε και τις δύο ιδιοτιμές του παρατηρητή ως $s = -\omega_0$.

Λύση: Οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται:

$$\left[\begin{array}{c} x' \\ v' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ v \end{array} \right], \ \ y = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ v \end{array} \right]$$

Οι εξισώσεις του παρατηρητή:

$$e = x - \hat{x},\ \hat{x}' = A\hat{x} - LC(x - \hat{x}),\ \ e' = (A + LC)e$$

Επομένως

$$A + LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & l_1 + 1 \\ -\omega_0^2 & l_2 \end{bmatrix}$$

και επομένως:

$$\phi_{A+LC}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -(l_1+1) \\ \omega_0^2 & \lambda - l_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - l_2\lambda + \omega_0^2(l_1+1) = (\lambda + \omega_0)^2 = \lambda^2 + 2\omega_0\lambda + \omega_0^2$$

και επομένως: $l_1 = 0$, $l_2 = -2\omega_0$.

Άσκηση 6: Έστω σύστημα ταλαντωτή χωρίς απόσβεση: $x_1' = x_2$, $x_2' = -\omega_0^2 x_1 + u$. Χρησιμοποιώντας ως μέτρηση την μεταβλητή ταχύτητας, $y = x_2$, σχεδιάστε αντισταθμιστή παρατηρητή/ανάδρασης καταστάσεων ώστε να ελέγξετε το σύστημα και σχεδιάστε το διάγραμμα βαθμίδων τού συστήματος. Επιλέξτε ιδιοτιμές ανάδρασης $\{-\omega_0 \pm i\omega_0\}$ και την ιδιοτιμή του παρατηρητή ως $s = -\omega_0$ (πολλαπλότητας δύο).

Λύση: Οι εξισώσεις του συστήματος είναι:

$$x' = Ax + bu,\ y = Cx,\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης για τον παρατηρητή και την ανάδραση εκτίμησης:

$$\hat{x}' = A\hat{x} + bu - L(y - \hat{y}),\ \hat{y} = C\hat{x},\ e = x - \hat{x} \Rightarrow e' = (A + LC)e,\ u = f^T\hat{x}$$

Ο παρατηρητής έχει ήδη σχεδιαστεί (προηγούμενη άσκηση):

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\omega_0 \end{bmatrix}$$

Επίσης

$$x' = Ax + bu = Ax + bf^T\hat{x} = Ax + bf^T(x - e) = (A + bf^T)x - bf^Te$$

όπου

$$A_c := A + bf^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_0 - \omega_0^2 & f_1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A_c είναι

$$\phi_{A_c}(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \omega_0^2 - f_0 & \lambda - f_1 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - f_1\lambda + (\omega_0^2 - f_0) = (\lambda + \omega_0)^2 + \omega_0^2 = \lambda^2 + 2\omega_0\lambda + 2\omega_0^2$$

από όπου προκύπτει ότι $f_0 = -\omega_0^2$ και $f_1 = -2\omega_0$.

Άσκηση 7: Δείξτε ότι το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι ανιχνεύσιμο αν και μόνο αν $y(t) = 0$, $t \geq 0$, συνεπάγεται ότι $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ για κάθε $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Λύση: Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι σε κανονική μορφή παρατηρησιμότητας Kalman:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ \ y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$ και $\Sigma_o(A_{11}, C_1)$ παρατηρήσιμο. Επομένως έχουμε: $x_1'(t) = A_{11}x_1(t)$, $y(t) = C_1x_1(t) = 0$, $t \geq 0$, και εφόσον $\Sigma_o(A_{11}, C_1)$ είναι παρατηρήσιμο έχουμε $x_1(t) = 0$, $t \geq 0$. Άρα: $x_2'(t) = A_{22}x_2(t) \Rightarrow x_2(t) = e^{A_{22}t}x_2(0)$ και $x(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$ για κάθε $x_2(0) \in \mathbb{R}^{n-n_0}$ αν και μόνο αν A_{22} είναι πίνακας Hurwitz.