Θεωρία Ελέγχου (Εισαγωγή)

"**Σύστημα**": "Σύνολο αλληλοσχετιζόμενων και ανεξάρτητων αντικειμένων που σχηματίζουν μιά πολύπλοκη ενότητα". Διακρίνουμε: Φυσικά Συστήματα (Μηχανικά, Ηλεκτρικά, Αεροδυναμικά, κλπ) Οικονομικά, Φυσιολογίας (αναπνευστικό, νευρικό, κλπ), μεταφορών, οικολογικό, ... Διακρίνουμε επίσης στατικά και δυναμικά συστήματα.

Δυν. Συστήματα περιγράφονται από μαθηματικά μοντέλα μέσω μαθηματικών εξισώσεων. Διακρίνουμε:

1.1. Ντετερμινιστικά
1.2 Στοχαστικά (περιγράφονται από στοχαστικές ανελίξεις).

2.1 Χρονικά συνεχή (continuous-time): Περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις
2.2 Χρονικά διακριτά (discrete-time): Περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών
2.3 Υβριδικά (hybrid): Μικτές διαφορικές εξισώσεις / εξισώσεις διαφορών

3.1 Μή-γραμμικά (Nonlinear): Μή γραμμικές εξισώσεις (διαφορικές / διαφορών)
3.2 Γραμμικά (Linear): Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις / εξισώσεις διαφορών.

4.1 Χρονικά μεταβαλλόμενα (time-varying): Μεταβλητή χρόνου είναι ανεξάρτητη μεταβλητή.
4.2 Χρονικά ανεξάρτητα (time-invariant): Δυναμικές εξισώσεις δεν εξαρτώνται άμεσα από μεταβλητή χρόνου.

5.1 Απείρων Διαστάσεων (distributed / infinite-dimensional):
Δυναμικές εξισώσεις περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις / εξισώσεις διαφορών

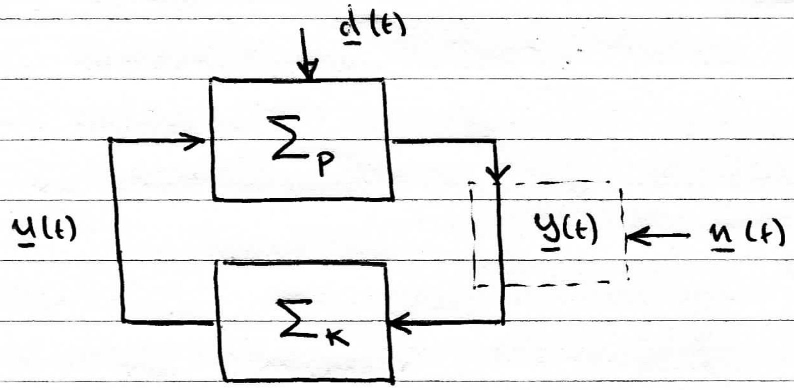
5.2 Πεπερασμένων διαστάσεων (finite-dimensional, "lumped")
Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις / εξισώσεις διαφορών

6.1 Ομογενή / Αυτόνομα

6.2 Μή ομογενή (Forced)

Συστήματα Ελέγχου

Ένα σύστημα ελέγχου είναι συνήθως σύνθετο σύστημα μέ ανάδραση ("κλειστού βρόγχου") που αποτελείται από την σύνδεση του "συστήματος υπό έλεγχο" (plant) καί σύστημα αντιστάθμισης ("compensator, controller)



Γιά την περίπτωση μή-γραμμικού, χρονικά συνεχούς καί χρονικά ανεξάρτητου συστήματος Σ_p οι εξισώσεις είναι της μορφής:

$$\Sigma_p: \quad \begin{aligned} \underline{x}' &= f(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{d}(t)), \qquad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \\ \underline{y} &= h(\underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{n}(t)) \end{aligned}$$

$$\Sigma_K: \quad \begin{aligned} \underline{\xi}' &= p(\underline{\xi}(t), \underline{y}(t)), \qquad \underline{\xi}(t_0) = \underline{\xi}_0 \\ \underline{u} &= q(\underline{\xi}(t), \underline{y}(t)) \end{aligned}$$

όπου:

$\underline{x}(t)$: Διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης Σ_p
$\underline{u}(t)$: Διάνυσμα μεταβλητών εισόδου Σ_p
$\underline{y}(t)$: Διάνυσμα μεταβλητών εξόδου Σ_p
$\underline{\xi}(t)$: Διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης Σ_K
$\underline{d}(t)$: Διάνυσμα σήματος διαταραχής από περιβάλλον.
$n(t)$: Διάνυσμα σήματος θορύβου από αισθητήρες.

Το σύστημα Σ_p γενικά είναι "δοσμένο", το σύστημα Σ_K υπό σχεδίαση.

Γενικό πρόβλημα: Ο σχεδιασμός του Σ_K ώστε νά επιτυγχάνεται:

(1) Δυναμική "ευστάθεια" συστήματος ανάδρασης.
(2) Δυναμική "Επίδοση" συστήματος ανάδρασης (περιγράφεται από τα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων $\underline{y}(t)$ καί $\underline{u}(t)$ π.χ. tracking εξωτερικού σήματος, απόσβεση ταλαντώσεων, μικρή ευαισθησία σε $\underline{d}(t)$ καί $\underline{n}(t)$, κλπ).
(3) Ευρωστεία: "Μικρή" επίδραση σφάλματος του μαθηματικού μοντέλλου του Σ_p στις ιδιότητες (1) καί (2).

Συστήματα εισόδου-εξόδου

Θεωρούμε το σύστημα ως τελεστή $H: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ όπου $\mathcal{U}$ είναι χώρος συναρτήσεων που αντιπροσωπεύει σήματα "εισόδου" καί $\mathcal{Y}$ χώρος συναρτήσεων που αντιπροσωπεύει σήματα "εξόδου". Συνήθεις χώροι συναρτήσεων: Συνεχείς, Τμηματικά συνεχείς, τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, φραγμένες, κλπ.

Διαγραμματικά:

$$u \in \mathcal{U} \longrightarrow \boxed{H(\cdot)} \longrightarrow y \in \mathcal{Y}$$

$$y = H(u)$$

Συνήθως $\underline{u}(t)$ καί $\underline{y}(t)$ ορίζονται σέ όλο το $\mathbb{R}$.

<u>Συστήματα "καταστάσεως χώρου"</u>

Συστήματα μέ "εσωτερικές" μεταβλητές. Ορίζονται ως: $(T, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi, \mathcal{Y})$, όπου:

(1) T διάστημα του $\mathbb{R}$ που αναπαριστά χρόνο.

(2) $\mathcal{X}$ διανυσματικός χώρος "κατάστασης" (states - εσωτερικές μεταβλητές συστήματος).

(3) $\forall\, t_0 \in T$, $x_0 \in \mathcal{X}$ καί $u \in \mathcal{U}$ (ορισμένη γιά $t \geq t_0$) (~~ορισμένη γιά t≥0~~) τά διανύσματα κατάστασης χώρου ορίζονται από την συνάρτηση μετάβασης (transition map)

$$\Phi : T \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$$

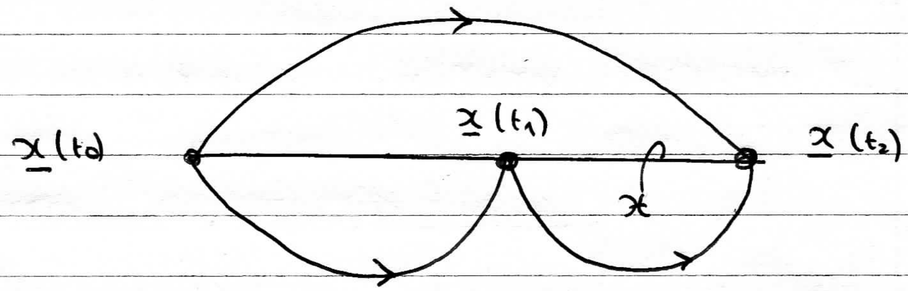
$$\Phi(t_1 ; t_0, \underline{x}(t_0), \underline{u}(t)) = \underline{x}(t_1)$$

μέ τίς παρακάτω ιδιότητες:

(α) Ταυτοτική ιδιότητα: $\Phi(t_0; t_0, \underline{x_0}, \underline{u}) = \underline{x_0}$, καί (β) Μεταβατική ιδιότητα (ιδιότητα ημιομάδας)

$$\Phi(t_2; t_0, \underline{x}(t_0), \underline{u}(t)) = \Phi(t_2; t_1, \underbrace{\Phi(t_1; t_0, \underline{x}(t_0), \underline{u}(t))}_{\underline{x}(t_1)}, \underline{u}(t))$$

Διαγραμματικά:



(4) Η έξοδος του συστήματος ορίζεται από συνάρτηση της μορφής:

$$h: T \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$$

όπου $\mathcal{Y}$ ο χώρος εξόδου.

Εάν επιπλέον:

(5) $\Phi(t_1; t_0, \underline{x_0}, \underline{u}(t)) = \Phi(t_1+\tau; t_0+\tau, \underline{x_0}, \underline{u}(t-\tau))$

~~για $\tau \geq 0$, $t_1 \geq t_0$, ($t_0 \in T$, $t_1 \geq t_0 \in T$)~~ τό σύστημα είναι χρονικά ανεξάρτητο. ($t_0, t_1, t_1+\tau, t_0+\tau \in T$).

(6) Εάν $\forall\, t_1 > t_0 \in T$ η συνάρτηση $\Phi(t_1; t_0, \underline{x}(t_0), \underline{u}(t))$ είναι ανεξάρτητη της $\underline{u}(t)$, $t_1 < t < \infty$, τότε τό σύστημα λέγεται "causal".

Παράδειγμα: Δυναμικό σύστημα χωρίς είσοδο περιγράφεται από τό πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ)

$$x'(t) = a\,x(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

όπου $x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}$. Η (μοναδική) λύση είναι:

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 \qquad \cancel{(t \geq t_0)}$$

Τό σύστημα ορίζεται ως $(T, \mathcal{X}, \Phi)$ όπου: $\Phi : T \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ η συνάρτηση μετάβασης:

$$\Phi(t\,;\, t_0, x(t_0)) = e^{a(t-t_0)} x_0$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής καί ικανοποιεί τήν μεταβατική ιδιότητα:

$$\cancel{\Phi(t_2; t_0, x(t_0)) =}$$

$$\Phi(t_2;\, t_1,\, \underbrace{\Phi(t_1;\, t_0, x(t_0))}_{x(t_1)}) = e^{a(t_2-t_1)} \left(e^{a(t_1-t_0)} x(t_0) \right)$$

$$= e^{a(t_2-t_0)} x(t_0)$$

$$= \Phi(t_2;\, t_0, x(t_0)).$$

Ταυτοτική ιδιότητα: $\Phi(t_0;\, t_0, x(t_0)) = e^{a(t_0-t_0)} x(t_0) = x(t_0)$

Σύστημα είναι χρονικά ανεξάρτητο:

$$\Phi(t_1, t_0, x(t_0)) = e^{a(t_1-t_0)} x(t_0) = e^{a(t_1+\tau-(t_0+\tau))} x(t_0)$$
$$= \Phi(t_1+\tau;\, t_0+\tau, x(t_0)).$$

Δυναμικά γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα.

(1) Μή γραμμικά συστήματα:

$$S: \quad \begin{rcases} \underline{x}'(t) = \underline{f}(x(t), u(t), t) \\ \underline{y}(t) = \underline{g}(x(t), u(t), t) \end{rcases}.$$

όπου $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ (διάνυσμα κατάστασης), $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$ (διάνυσμα εισόδου) $\underline{y} \in \mathbb{R}^p$ (διάνυσμα εξόδου), $t \in [t_0, \infty)$ καί

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (Lipschitz ως προς $\underline{x}$, συνεχής ως πρός u, τμηματικά συνεχής ως προς t).

$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ (συνεχής ως πρός $\underline{x}$ και $\underline{u}$, τμηματικά συνεχής ως προς t).

Από τήν Θεωρία διαφορικών εξισώσεων, $\forall\, \underline{x}(t_0) = \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ καί κάθε τμηματικά συνεχή $\underline{u}$, τό $\underline{x}(t)$ καί $\underline{u}(t)$ ορίζονται μονοσήμαντα στό διάστημα $[t_0, \infty)$. Επιπλέον $\forall\, t_1 \geq t_0$ τό $\underline{x}(t_1)$ (καί τό $\underline{y}(t_1)$) εξαρτάται μόνο από τό $\underline{x_0}$ καί την είσοδο $u_{[t_0, t_1]}$.

Μή-γραμμικά, χρονικά ανεξάρτητα συστήματα είναι της μορφής:

$$S: \quad \begin{rcases} \underline{x}'(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \\ y(t) = \underline{g}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \end{rcases}.$$

δηλ ~~δέν εξαρτω~~ οι εξισώσεις δέν εξαρτώνται άμεσα από την μεταβλητή του χρόνου.

(2) <u>Γραμμικά συστήματα.</u>

$$S(A(t), B(t), C(t), D(t)): \quad \left.\begin{aligned} \underline{x}'(t) &= A(t)\,\underline{x}(t) + B(t)\,\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= C(t)\,\underline{x}(t) + D(t)\,\underline{u}(t) \end{aligned}\right\}.$$

(χρονικά μεταβαλλόμενα εφόσον οι πίνακες είναι συναρτήσεις της μεταβλητής t). Συνήθως όλοι οι πίνακες είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς t.

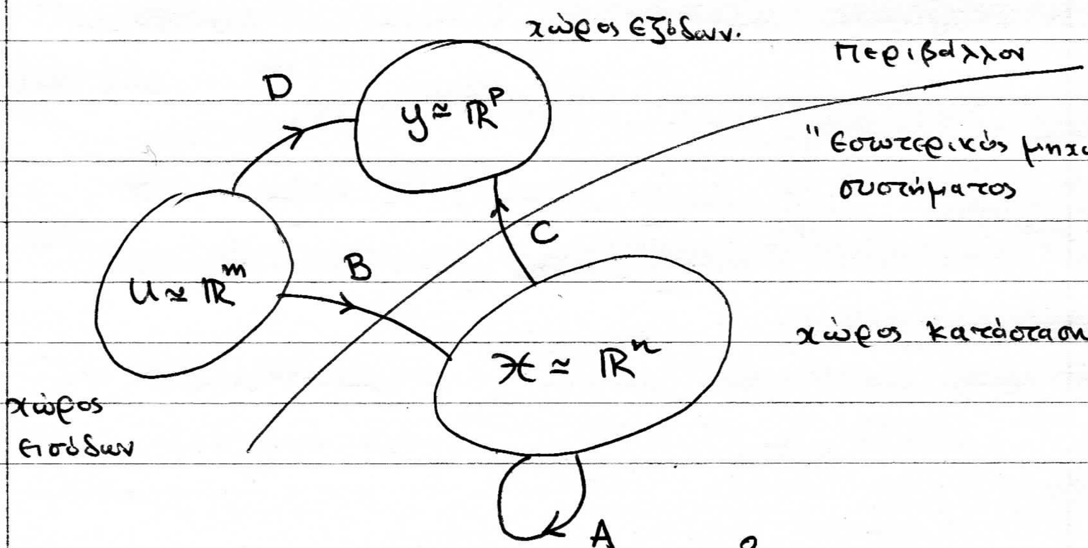
Σημαντική ιδιότητα γραμμικών συστημάτων είναι η <u>αρχή διαχωρισμού</u> της απόκρισης (έξοδος) στο μέρος που οφείλεται στην αρχική κατάσταση και στο μέρος που οφείλεται στην είσοδο:

$$y_{[t_0,\infty)} = H(x(t_0), u_{[t_0,\infty)}) = H(x(t_0), 0) + H(0, u_{[t_0,\infty)})$$

Ειδική κατηγορία: Γραμμικά χρονικά ανεξάρτητα συστήματα

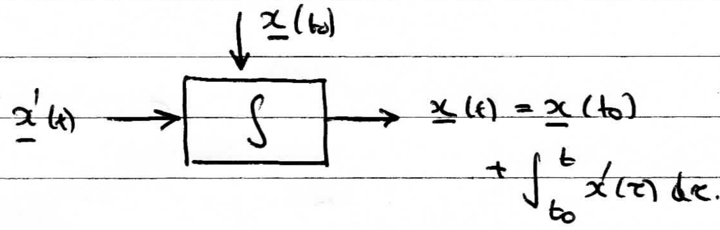
$$S(A,B,C,D): \quad \left\{\begin{aligned} \underline{x}'(t) &= A\,\underline{x}(t) + B\,\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= C\,\underline{x}(t) + D\,\underline{u}(t) \end{aligned}\right.$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

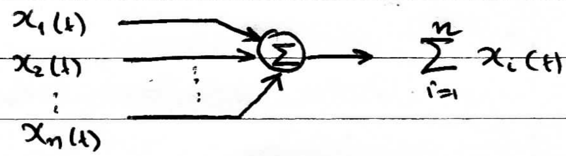


Αναπαράσταση / προσομοίωση μέσω αναλογικού υπολογιστή με βασικά στοιχεία:

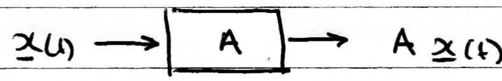
Ολοκληρωτής (Integrator)



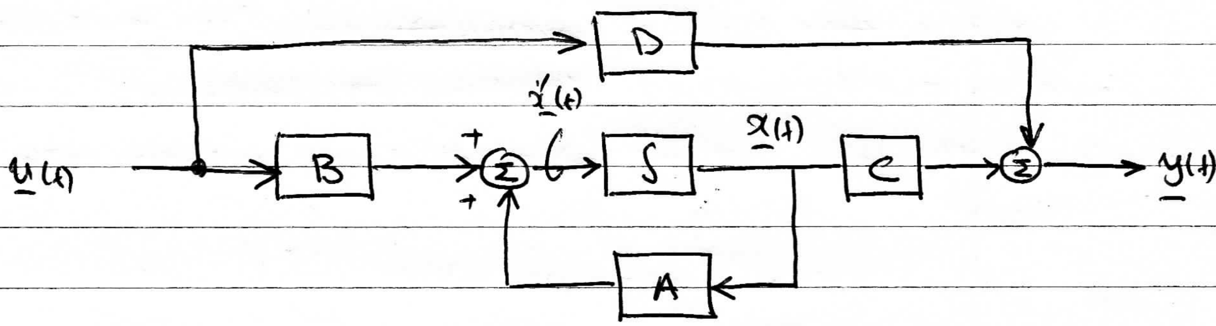
Αθροιστές



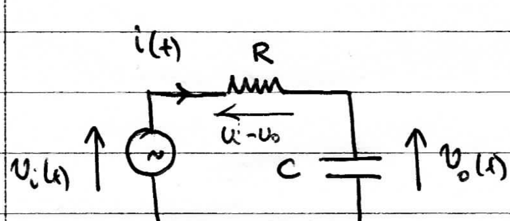
Πολλαπλασιαστή



Σχεδιάγραμμα προσομοίωσης γενικού γραμμικού χρονικά ανεξάρτητου συστήματος:



<u>Παράδειγμα</u> : Κύκλωμα RC



$i(t)$: Ηλεκτρικό ρεύμα

$v_i(t)$: Τάση εισόδου

$v_o(t)$: Τάση εξόδου (πυκνωτή)

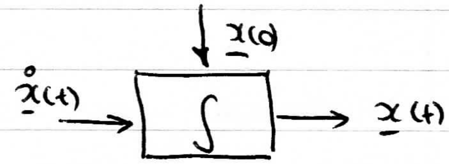
Από τον νόμο Kirchoff:

$$i(t) = \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R} = C\,\frac{dv_o}{dt}$$

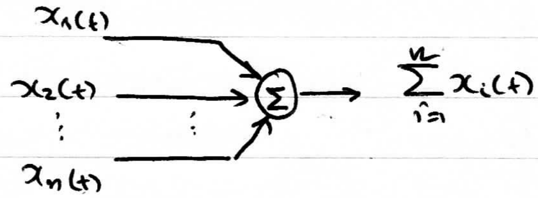
$$\Rightarrow \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC}\,v_o(t) = \frac{1}{RC}\,v_i(t)$$

Αναπαράσταση/προσομοίωση μέσω αναλογικού υπολογιστή με βασικά στοιχεία:

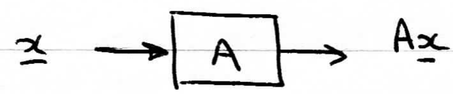
Ολοκληρωτής :



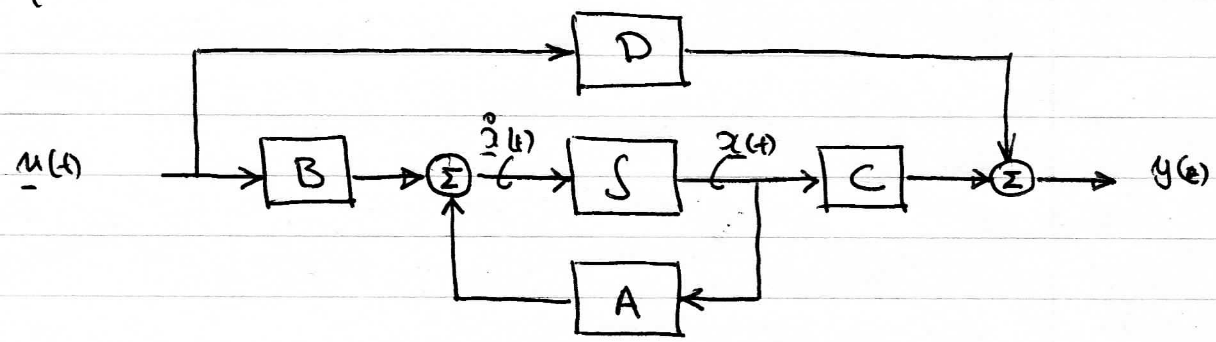
Αθροιστές :



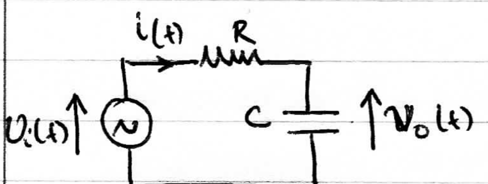
Πολλ/στής :



Σχεδιάγραμμα προσομοίωσης γενικού γραμμικού ανεξάρτητου συστήματος:



<u>Παράδειγμα:</u> Κύκλωμα RC



$i(t)$: Ηλεκτρικό ρεύμα

$v_i(t)$: Τάση εισόδου

$v_o(t)$: Τάση εξόδου (πυκνωτή)

Από τον νόμο Kirchoff έχουμε:

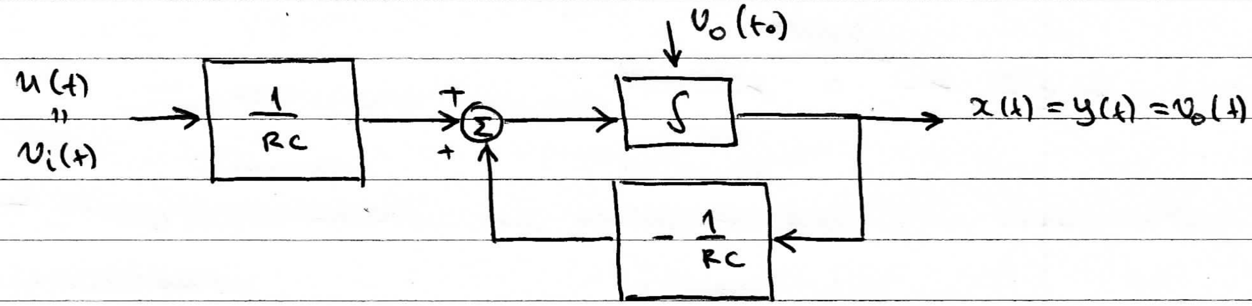
$$i(t) = \frac{v_i(t) - v_o(t)}{R} = C\frac{dv_o}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC} v_o(t) = \frac{1}{RC} v_i(t).$$

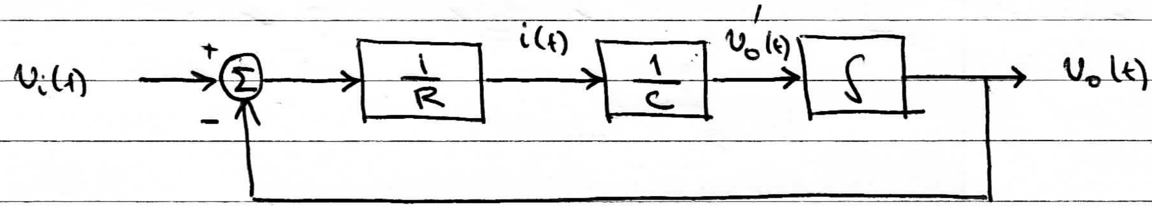
Ορίζουμε: $y(t) = x(t) = v_o(t)$, $u(t) = v_i(t)$.

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{1}{RC}\, x(t) + \frac{1}{RC}\, u(t) \\ y(t) &= 1 \cdot x(t) + 0\, u(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

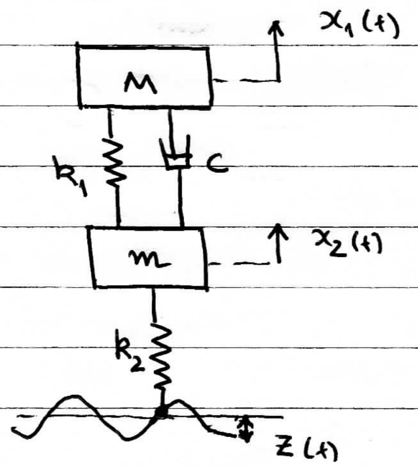
$$\Rightarrow (A, B, C, D) = \left(-\frac{1}{RC}, \frac{1}{RC}, 1, 0\right)$$



Ισοδύναμα οι εξισώσεις περιγράφονται με διάγραμμα ανάδρασης:



<u>Παράδειγμα</u>: Μηχανικό σύστημα ανάδρασης



$$\begin{cases} M x_1'' = -k_1(x_1 - x_2) - c\,(x_1' - x_2') \\ m x_2'' = k_1(x_1 - x_2) + c\,(x_1' - x_2') \\ \qquad\quad - k_2(x_2 - z) \end{cases}$$

k_1, k_2 σταθερή Hook ελατηρίων

c συντελεστής απόσβεσης (damper)

Οι εξισώσεις γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} M x_1'' &= -c x_1' - k_1 x_1 + c x_2' + k_1 x_2 \\ m x_2'' &= c x_1' + k_1 x_1 - c x_2' - (k_1+k_2) x_2 + k_2 z \end{aligned}\right\}.$$

Ορίζουμε μεταβλητές κατάστασης (x_1, x_1', x_2, x_2'):

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_2' \\ x_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1/M & -c/M & k_1/M & c/M \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1/m & c/m & -(k_1+k_2)/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m} \end{bmatrix} z$$

$$\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{z}$$

Έστω ότι μετράμε τις δύο μετατοπίσεις x_1 και x_2:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} z$$

Αν η μέτρηση μας ήταν η σχετική μετατόπιση $x_1 - x_2$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 - x_2 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} z$$

Αν η μέτρηση μας ήταν η επιτάχυνση x_1''

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1'' \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{c}{M} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} z$$