Θεωρία Ελέγχου: Εισαγωγικά

1. Μαθηματικά μοντέλα δυναμικών συστημάτων

Ως σύστημα ορίζουμε "ένα σύνολο αλληλοσχετιζόμενων και ανεξάρτητων αντικειμένων που σχηματίζουν μία πολύπλοκη ενότητα". Μία πρόχειρη ταξινόμηση δυναμικών συστημάτων που περιγράφονται από δυναμικά μοντέλα μέσω μαθηματικών εξισώσεων είναι η παρακάτω:

1.1 Ντετερμινιστικά, αιτιοκρατικά (Deterministic): Η αρχική συνθήκη και το εξωτερικό ερέθισμα απο το πελιβάλλον (συνάρτηση εισόδου) καθορίζουν πλήρως τη έξοδο (απόκριση του συστήματος).

1.2 Στοχαστικά (Stochastic): Περιγράφονται απο στοχαστικές ανελίξεις.

2.1 Συνεχούς χρόνου (continuous-time): Περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις.

2.2 Διακριτού χρόνου (discrete-time): Περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών.

2.3 Υβριδικά (hybrid): Περιγράφονται από μείγμα διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών.

3.1 Μη-γραμμικά (non-linear): Περιγράφονται από μη γραμμικές εξισώσεις (διαφορικές η διαφορών)

3.2 Γραμμικά (linear): Περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις (διαφορικές η διαφορών)

4.1 Χρονικά μεταβαλλόμενα (time-varying): Η μεταβλητή του χρόνου εμφανίζεται στις εξισώσεις ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

4.2 Χρονικά αναλλόιωτα (time-invariant): Η μεταβλητή του χρόνου δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

5.1 Άπειρης διάστασης (distributed, infinite-dimensional): Περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις

5.2 Πεπερασμένων διαστάσεων (finite-dimensional, l'umped): Περιγράφονται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

Τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή δυναμικών συστημάτων ελέγχου είναι δύο ειδών: (α) Μοντέλα εισόδου-εξόδου (input-output) και μοντέλα καταστάσεως χώρου (state-space). Εδώ ως είσοδο σε ένα σύστημα εννοούμε το σύνολο των εξωτερικών ερεθισμάτων που ασκούνται στο σύστημα από το εξωτερικό περιβάλλον και ως έξοδο την αντίστοιχη απόκριση του συστήματος στα ερεθίσματα αυτά. Ένα σύστημα χαρακτηρίζεται ως δυναμικό όταν έχει μνήμη, δηλ. όταν η απόκριση του συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή δεν εξαρτάται μόνο από την είσοδο εκείνη την συγκεκριμένη χρονική στιγμή αλλά και από την είσοδο του συστήματος σε χρονικές στιγμές του παρελθόντος. (Εφόσον το μοντέλο συνήθως αναπαριστά ένα φυσικό σύστημα, υποθέτουμε ότι είναι αιτιατό, δηλαδή ότι η απόκριση του συστήματος σε μία χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητη από την είσοδο του συστήματος σε όλους τους μελλοντικούς χρόνους). Δυναμικά συστήματα συνεχούς χρόνου μοντελοποιούνται συνήθως μέσω διαφορικών εξισώσεων, ενώ δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου από εξισώσεις διαφορών.

Σε μοντέλα εισόδου-εξόδου το σύστημα περιγράφεται μαθηματικά ως ένας τελεστής που απεικονίζει συναρτήσεις εισόδου $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ σε συναρτήσεις εξόδου $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$. Γιά παράδειγμα, ένα σύστημα εισόδου-εξόδου συνεχούς χρόνου μπορεί να οριστεί από τα σύνολα συναρτήσεων $\mathcal{U} = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ (το σύνολο συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων διάστασης m που ορίζονται στο χρονικό διάστημα $\mathbb{R}$) και $\mathcal{Y} = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$. Στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του συστήματος ορίζεται από το σύνολο που περιέχει όλα τα επιτρεπτά ζεύγη $(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$.

Τα μοντέλα εισόδου-εξόδου είναι πολύπλοκα και δεν παρέχουν καμμία πληροφορία για τον εσωτερικό μηχανισμό του συστήματος που ανανεώνει τις τιμές των εσωτερικών μεταβλητών κατάστασης και τις μεταβλητές εξόδου με την πάροδο του χρόνου. Και τα δύο αυτά μειονεκτήματα παύουν να ισχύουν σε μοντέλα καταστάσεων χώρου. Το διάνυσμα κατάστασης την χρονική στιγμή t_0, $\mathbf{x}(t_0)$, συμπυκνώνει όλη την πληροφορία της εξέλιξης του συστήματος σε παρελθόντες χρόνους ($t \leq t_0$) που χρειάζεται (μαζί με την μελοντική συνάρτηση εισόδου στο διάστημα $[t_0, t]$, $\mathbf{u}_{[t_0,t]} = \{\mathbf{u}(\tau) : t_0 \leq \tau \leq t\}$) για την πρόβλεψη της μελλοντικής κατάστασης του συστήματος, $\mathbf{x}(t)$, $t > t_0$. Επόμένως, η εξέλιξη της εσωτερικής κατάστασης του συστήματος καθορίζεται από μία απεικόνιση της μορφής $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ ο χώρος καταστάσεων, ενώ η έξοδος του συστήματος από μία απεικόνιση της μορφής $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$.

2.1 Συστήματα ελέγχου καταστάσεων χώρου (state control)

Η Μαθηματική Θεωρία Ελέγχου είναι επέκταση της Θεωρίας των Διαφορικών Εξισώσεων (όπως επίσης των Εξισώσεων Διαφορών και των Δυναμικών Συστημάτων) με εφαρμογές σε σχεδόν όλους τους κλάδους της Μηχανικής, καθώς και των Οικονομικών, της Βιολογίας, της Μαθηματικής Οικολογίας και άλλων πεδίων Φυσικών Επιστημών. Η θεωρία εξετάζει συστήματα διαφορικών εξισώσεων με βαθμούς ελευθερίας ως προς ορισμένες μεταβλητές. Γιά παράδειγμα, έστω το σύστημα δ.ε. που γράφεται σε διανυσματική μορφή ως:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0$$

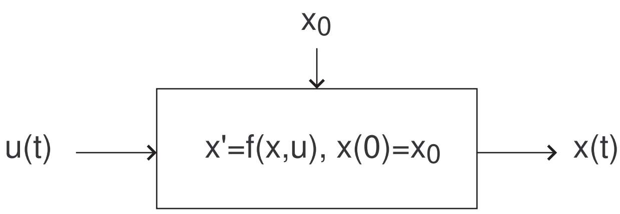
όπου $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ορίζονται, αντίστοιχα, ως το διάνυσμα κατάστασης χώρου και το διανύσμα εισόδου (ελέγχου). Ισοδύναμα το σύστημα γράφεται στη μορφή των βαθμωτών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
x_1' &= f_1(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m),\ \ x_1(0) = x_1^0 \in \mathbb{R},\ \ t \geq 0 \\
x_2' &= f_2(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m,\ \ x_2(0) = x_2^0 \in \mathbb{R},\ \ t \geq 0 \\
&\vdots \\
x_n' &= f_n(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m),\ \ x_n(0) = x_n^0 \in \mathbb{R},\ \ t \geq 0
\end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \end{bmatrix},\ \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}\ \text{και}\ \mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_m \end{bmatrix}$$

Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ είναι διάνυσμα βαθμωτών συναρτήσεων u_i τις οποίες μπορούμε να επιλέξουμε ελεύθερα (η σχεδόν ελεύθερα κάτω απο ορισμένους περιορισμούς). Κάθε διαφορετική επιλογή των συναρτήσεων αυτών δίνει μια διαφορετική λύση στο αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών ως προς τις μεταβλητές κατάστασης $x_1, \ldots, x_n$. (Υποθέτουμε ότι όλες οι μεταβλητές ανήκουν σε κατάλληλη κλάση συναρτήσεων που μαζί με τις ιδιότητες των f_i εγγυώνται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του ΠΑΤ σε όλο το διάστημα $[0, \infty)$). Διαγραμματικά:



Το βασικό πρόβλημα της Θεωρίας Ελέγχου (με γενικούς όρους που θα συγκεκριμενοποιηθούν αργότερα) είναι η επιλογή κατάλληλης συνάρτησης εισόδου $\mathbf{u} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ ώστε το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}(t)$ που είναι η λύση του ΠΑΤ να έχει επιθυμητές ιδιότητες (ποιοτικές/ποσοτικές). Παρατηρούμε ότι αυτό είναι πρόβλημα σύνθεσης και αφορά την κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων εισόδου ώστε η λύση του συστήματος να ικανοποιεί τους στόχους σχεδίασης.

Παράδειγμα: Έστω ότι ο πληθυσμός ψαριών $x(t)$ σε κάποιο οικοσύστημα (π.χ. λίμνη) την χρονική στιγμή t ικανοποιεί την δ.ε. (παραλλαγή του λογιστικού μοντέλου):

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) - x(t)u(t), \;\; x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

όπου r, M θετικές σταθερές και $u(t)$ η συνάρτηση συγκομιδής (ένταση αλιείας), η οποία είναι η συνάρτηση ελέγχου του συστήματος. Πώς πρέπει να επιλέξουμε την συνάρτηση u ώστε να έχουμε αρκούντως μεγάλο ρυθμό συγκομιδής (δηλ. μεγάλο $u(t)$) αλλά και βιωσιμότητα του οικοσυστήματος (δηλαδή να μήν μειωθεί δραματικά ο πληυθυσμός σε κάποιο χρόνο στο μέλλον); Παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα οι δύο στόχοι είναι αντίθετοι και επομένως απαιτείται κάποιος συμβιβασμός μεταξύ τους, κάτι που είναι σύνηθες φαινόμενο σε πολλά πρακτικά προβλήματα ελέγχου (π.χ. ύπαρξη αντικρουόμενων στόχων σχεδίασης ως προς την ευστάθεια και την επίδοση του συστήματος).

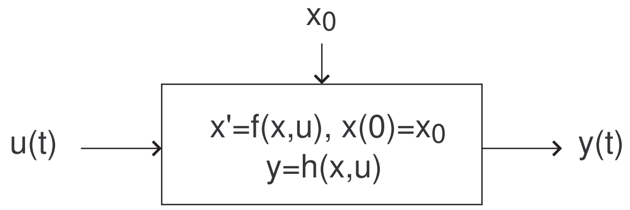
2.2 Συστήματα ελέγχου εξόδου (output control)

Ένα σημαντικό μειονέκτημα του προηγούμενου είδους ελέγχου είναι η απαίτηση ότι όλες οι εσωτερικές μεταβλητές κατάστασης είναι μετρήσιμες. Στην πράξη, η απαίτηση αυτή είναι πολύ ισχυρή, καθώς απαιτεί έναν αισθητήρα για κάθε εσωτερική μεταβλητή (state), και επομένως συνεπάγεται αυξημένη πολυπλοκότητα και κόστος γιά συστήματα με μεγάλη διάσταση του χώρου κατάστασης. Πολλές φορές, μόνο ένας μικρός αριθμός από τις εσωτερικές μεταβλητές χρειάζεται γιά τον επιτυχή έλεγχο του συστήματος, ακόμα και αν η διάσταση του χώρου κατάστασης είναι άπειρη, όπως αυτό συμβαίνει, π.χ., σε προβλήματα απόσβεσης μηχανικών ταλαντώσεων που περιγράφονται από συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Σε συστήματα εξόδου, υποθέτουμε ότι το διάνυσμα καταστάσεων του συστήματος δεν είναι απαραίτητα προσβάσιμο και η πληροφορία για τον εσωτερικό μηχανισμό του συστήματος δίνεται έμμεσα από κάποιο διάνυσμα εξόδου της μορφής:

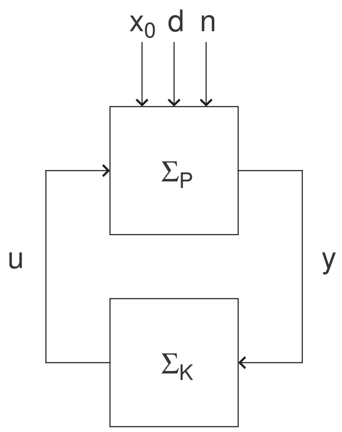
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \;\; t \geq 0$$

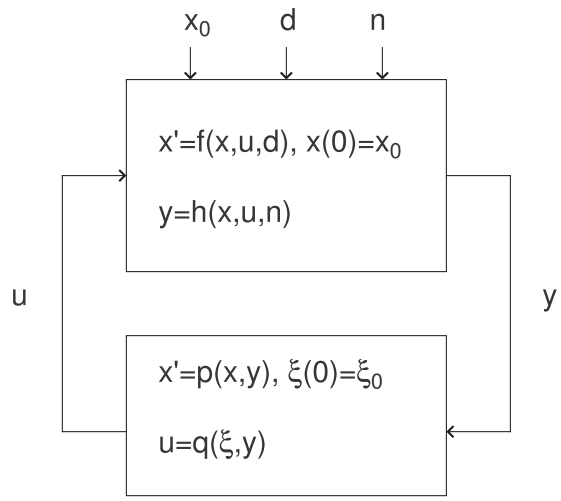
Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα εξόδου $\mathbf{y}(t)$ είναι μετρήσιμο σε πραγματικό χρόνο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει κατάλληλο διάνυσμα εισόδου $\mathbf{u}(t)$ (ελέγχου) έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\mathbf{x}_i(t)$ που προκύπτουν από την επίλυση του ΠΑΤ: $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ και οι αντίστοιχες συναρτήσεις εξόδου $\mathbf{y}_i(t)$ που προκύπτουν απο το (αλγεβρικό) σύστημα εξισώσεων $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ να έχουν επιθυμητές ιδιότητες. Διαγραμματικά το σύστημα περιγράφεται ως εξής:



2.3 Συστήματα ανάδρασης εξόδου (output feedback) και δυναμικοί αντισταθμιστές

Γιά λόγους που συνδέονται κυρίως με την ύπαρξη αβεβαιότητας στο μοντέλο του συστήματος που θέλουμε να ελέγξουμε (plant Σ_P), π.χ. αβεβαιότητα στις παραμέτρους των δ.ε. του Σ_P, συνήθως υλοποιούμε το σύστημα ελέγχου μέσω αντισταθμιστή ανάδρασης εξόδου, δηλ. δεν εφαρμόζουμε την (προ-υπολογισμένη) συνάρτηση ελέγχου $\mathbf{u}(t)$ στην είσοδο του Σ_P, αλλά την δημιουργούμε σε πραγματικό χρόνο από την έξοδο δυναμικού συστήματος που σχεδιάζουμε (αντισταθμιστής Σ_K), η είσοδος του οποίου ($\mathbf{y}$) ταυτίζεται με την έξοδο του του Σ_P. Με τον τρόπο αυτό, πιθανή απόκλιση των μεταβλητών του συστήματος από την προβλεπόμενη τροχιά τους (που μπορεί να προκύψει, π.χ. λόγω σφαλμάτων των παραμέτρων του μοντέλου, η λόγω εξωτερικών διαταραχών) παρακολουθείται συνεχώς και μπορεί να διορθωθεί από το σύστημα ανάδρασης. Το σύστημα (Σ_P, Σ_K) που προκύπτει από τα δύο επιμέρους συστήματα μέσω συνδεσμολογίας ανάδρασης αναφέρεται συνήθως ως σύστημα κλειστού βρόγχου. Σε αντίθεση, το σύστημα ανοιχτού βρόγχου στο οποίο εφαρμόζουμε προ-υπολογισμένη συνάρτηση στην είσοδο του Σ_P είναι τυφλό σε διαταραχές η λανθασμένες παραμέτρους, εξ' αιτίας των οποίων το σύστημα μπορεί να αποκλίνει από την πορεία του, όπως αυτή καταγράφεται στις προσομοιώσεις, χωρίς να μπορεί να την διορθώσει.





Στις εξισώσεις του συστήματος προσθέσαμε συνάρτησης διαταραχής (disturbance, $\mathbf{d}(t)$) και συνάρτησης θορύβου (noise, $\mathbf{n}(t)$) που προέρχεται από τους αισθητήρες του Σ_P. Οι διαταραχές αναφέρονται σε μη επιθυμητά σήματα είσοδου που προέρχονται από το εξωτερικό περιβάλλον, π.χ. ριπές ανέμου που επηρεάζουν την κατεύθυνση και την ταχύτητα εναέριου οχήματος, κ.λ.π.

Το γενικό πρόβλημα τηε Θεωρίας Ελέγχου επομένως είναι ο σχεδιασμός του αντισταθμοστη Σ_k ώστε να επιτυγχάνεται:

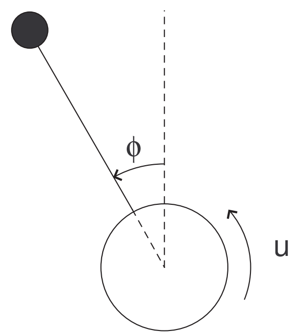
- Δυναμική Ευστάθεια του Συστήματος Κλειστού Βρόγχου (Σ_P, Σ_K).
- Δυναμική Επόδοση του Συστήματος Κλειστού Βρόγχου (Σ_P, Σ_K) που συνήθως ορίζεται από τα χαρακτηρηριστικά των συναρτήσεων $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ και $\mathbf{u}(t)$ και αφορά στόχους σχεδίασης όπως: η παρακολούθηση (tracking) εξωτερικού σήματος με μικρό σφάλμα, ταχεία απόκριση, ταχεία απόσβεση ταλαντώσεων, μικρός υπερακοντισμός, μικρή ευαισθησία σε εξωτερικές διαταραχές και σήματα θορύβου, κ.λ.π.
- Ευρωστία: Μικρή επίδραση σφαλματος μαθηματικού μοντέλου στις παραπάνω δύο ιδιότητες (εύρωστη ευστάθεια, εύρωστη επίδοση).

Παράδειγμα: Εξετάζουμε το δυναμικό σύστημα που ορίζεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\phi''(t) - \phi(t) = u(t) + d(t)$$

με αρχικές συνθήκες $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = -1$ (γραμμικοποιημένο σύστημα ανεστραμμένου εκκρεμούς που ελέγχεται με κινητήρα, όπου ϕ η γωνία που σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο, u είναι η συνάρτηση ελέγχου (ροπή που ασκεί ο κινητήρας) και $d(t)$ συνάρτηση διαταραχής).
Ισοδύναμα οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται σε μορφή καταστάσεως χώρου:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) + B_d d(t), \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \phi(0) \\ \phi'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



και

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι η έξοδος του συστήματος ταυτίζεται με το διάνυσμα κατάστασης, δηλαδή ότι και οι δύο μεταβλητές ϕ και ϕ' είναι μετρήσιμες. Έστω επίσης ότι η διαταραχή $d(t)$ είναι ο παλμός:

$$d(t) = \begin{cases} \epsilon \text{ αν } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 \text{ διαφορετικά} \end{cases}$$

Έστω επίσης ότι η συνάρτηση ελέγχου ορίζεται μέσω ανάδρασης καταστάστεων:

$$u(t) = -\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{bmatrix} = -\alpha\phi(t) - \beta\phi'(t) \text{ όπου } \alpha = \beta = 3$$

Μπορεί αυτή η συνάρτηση να φέρει το σύστημα ασυμπτωτικά στο σημείο ισορροπίας $\phi' = \phi = 0$ (παρά την διαταραχή $d(t)$);

Αναλύουμε αρχικά το σύστημα με μηδενική διαταραχή. Οι εξίσωση κλειστού βρόγχου είναι:

$$\phi'' - \phi = u = -3\phi - 3\phi' \Rightarrow \phi'' + 3\phi' + 2\phi = 0$$

Η εξίσωση είναι ομογενής με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda = -1,\ \lambda = -2$$

Άρα η γενική λύση είναι:

$$\phi(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} \Rightarrow \phi'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

Επομένως

$$\phi(0) = A + B = 1 \text{ και } \phi'(0) = -A - 2B = -1$$

Προσθέτοντας

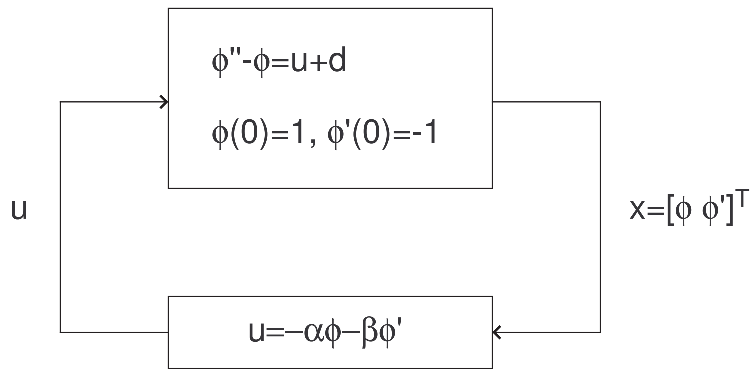
$$-B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = 1$$

Άρα

$$\phi(t) = e^{-t},\ \phi'(t) = -e^{-t} \text{ και συνεπώς } u(t) = -3(\phi(t) + \phi'(t)) = 0$$

δηλαδή το σύστημα κλειστού βρόγχου είναι (ασυμπτωτικά) ευσταθές και $\phi(t) \to 0$, $\phi'(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$.

Στην συνέχεια αναλύουμε το σύστημα με διαταραχή:



Α. Διάστημα $0 \le t \le 1$: Στο διάστημα αυτό $d(t) = 0$ και επομένως $\phi(t) = e^{-t}$, $\phi'(t) = -e^{-t}$ και $u(t) = 0$ όπως προηγουμένως. Στο τέλος του διαστήματος: $\phi(1) = e^{-1}$, $\phi'(1) = -e^{-1}$.

Β. Διάστημα $1 \le t \le 2$: Στο διάστημα αυτό $d(t) = \epsilon$. Επομένως:

$$\phi'' - \phi = -3\phi - 3\phi' + \epsilon \Rightarrow \phi'' + 3\phi' + 2\phi = \epsilon$$

Γενική λύση ομογενούς εξίσωσης: $\phi_{\text{ομ}}(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$. Ειδική λύση μη-ομογενούς εξίσωσης: $\phi_{\text{μο}}(t) = \frac{\epsilon}{2}$. Αρα:

$$\phi(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \phi'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

Λόγω συνέχειας οι αρχικές συνθήκες γράφονται:

$$\phi(1) = Ae^{-1} + Be^{-2} + \frac{\epsilon}{2} = e^{-1} \ \text{ και } \ \phi'(1) = -Ae^{-1} - 2Be^{-2} = -e^{-1}$$

Προσθέτοντας έχουμε: $B = \frac{1}{2}\epsilon e^2$ και άρα $A = 1 - \epsilon e$. Άρα:

$$\phi(t) = (1 - \epsilon e)e^{-t} + \frac{\epsilon}{2}e^2 e^{-2t} + \frac{\epsilon}{2}, \ \ \phi'(t) = -(1 - \epsilon e)e^{-t} - \epsilon e^2 e^{-2t}$$

Επίσης:

$$u(t) = -3(\phi + \phi') = -3\left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}e^2 e^{-2t}\right) = -\frac{3\epsilon}{2}\left(1 - e^{-2(t-1)}\right)$$

Στο τέλος του διαστήματος ($t = 2$):

$$\phi(2) = (1 - \epsilon e)e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}, \ \ \phi'(2) = -(1 - \epsilon e)e^{-2} - \epsilon e^{-2}, \ \ u(2) = -\frac{3\epsilon}{2}(1 - e^{-2})$$

Γ. Διάστημα $t \ge 2$: Στο διάστημα αυτό:

$$\phi(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}, \ \ \phi'(t) = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t}$$

Επομένως (λόγω συνέχειας):

$$\phi(2) = Ae^{-2} + Be^{-4} = (1 - \epsilon e)e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}e^{-2} + \frac{\epsilon}{2}, \ \ \phi'(2) = -Ae^{-2} - 2Be^{-4} = -(1 - \epsilon e)e^{-2} - \epsilon e^{-2}$$

Προσθέτοντας και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$B = -\frac{\epsilon e^2}{2}(e^2 - 1) \ \text{ και } \ A = \epsilon e^2 - \epsilon e + 1$$

Επομένως:

$$\phi(t) = (\epsilon e^2 - \epsilon e + 1)e^{-t} - \frac{\epsilon}{2}e^2(e^2-1)e^{-2t}, \;\; \phi'(t) = -(\epsilon e^2 - \epsilon e + 1)e^{-t} + \epsilon e^2(e^2-1)e^{-2t}$$

Επίσης

$$u(t) = -3(\phi(t)+\phi'(t)) = -\frac{3\epsilon}{2}e^2(e^2-1)e^{-2t} \Rightarrow u(t) = -\frac{3\epsilon}{2}(e^2-1)e^{-2(t-1)}$$

και

$$u(t) = -\frac{3\epsilon}{2}(1-e^{-2})e^{-2(t-2)}, \; u(2) = -\frac{3\epsilon}{2}(1-e^{-2})$$

Παρατηρούμε ότι

$$\phi(t) \to 0, \; \phi'(t) \to 0 \text{ και } u(t) \to 0$$

καθώς $t \to \infty$ και επομένως το σύστημα τείνει ασυμπτωτικά στο σημείο ισορροπίας $\phi = \phi' = 0$.

Η παραπάνω ανάλυση απλουστεύεται με χρήση μετασχηματισμού Laplace. Η διαφορική εξίσωση γράφεται ως:

$$\phi''(t) + 3\phi'(t) + 2\phi = d(t) \Rightarrow (s^2\hat{\phi}(s) - s\phi(0) - \phi'(0)) + 3(s\hat{\phi}(s) - \phi(0)) + 2\hat{\phi}(s) = \hat{d}(s)$$

Επομένως:

$$(s^2+3s+2)\hat{\phi}(s) = s+2+\frac{\epsilon e^{-s}}{s} - \frac{\epsilon e^{-2s}}{s} \Rightarrow \hat{\phi}(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} + \frac{\epsilon(e^{-s}-e^{-2s})}{s(s+1)(s+2)}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

και επομένως γιά $t \geq 2$ έχουμε:

$$\phi(t) = e^{-t} + \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right) - \epsilon(e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)}) + \frac{\epsilon}{2}\left(e^{-(t-1)} - e^{-(t-2)}\right) \to 0$$

καθως $t \to \infty$.

Αν εφαρμόσουμε την προ-υπολογισμένη είσοδο $u(t) = 0$ στο Σ_p ταυτόχρονα με την διαταραχή $d(t)$, τότε η έξοδος του Σ_P προκύπτει από την λύση της δ.ε.

$$\phi'' - \phi = 0 + d(t) \Rightarrow (s^2\hat{\phi}(s) - s\phi(0) - \phi'(0)) - \hat{\phi}(s) = \hat{d}(s) \Rightarrow (s^2-1)\hat{\phi}(s) - s + 1 = \hat{d}(s)$$

Επομένως:

$$\hat{\phi}(s) = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} + \frac{\epsilon}{s}\left(\frac{e^{-s}}{(s-1)(s+1)} - \frac{e^{-2s}}{(s-1)(s+1)}\right) = \frac{1}{s+1} + \frac{\epsilon}{s(s-1)(s+1)}(e^{-s} - e^{-2s})$$

Έχουμε:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t} \text{ και } \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-1)(s+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$$

Επομένως αν $t \geq 2$,

$$\phi(t) = e^{-t} + \frac{\epsilon}{2}e^{t-1} - \frac{\epsilon}{2}e^{t-2} + \frac{\epsilon}{2}e^{-(t-1)} - \frac{\epsilon}{2}e^{-(t-2)} = e^{-t} + \frac{\epsilon}{2}(e^{-1} - e^{-2})e^t + \frac{\epsilon}{2}(e - e^2)e^{-t}$$

και άρα $|\phi(t)| \to \infty$ καθώς $t \to \infty$.

Ασκηση: Να επαναλάβετε την ανάλυση του Παραδείγματος στις σελίδες 4-7 αν η εξίσωση του συστήματος υπό έλεγχο (plant) είναι $\phi'' - \phi = u(t) + d(t)$ με αρχικές συνθήκες $\phi(0) = 1$ και $\phi'(0) = -2$ όπου $u(t)$ η είσοδος και $d(t)$ συνάρτηση διαταραχής. Υποθέτουμε ότι: (α) Η είσοδος $u(t)$ του plant παράγεται από την έξοδο αντισταθμιστή ανάδρασης ως $u(t) = -\phi(t) - 2\phi'(t)$, ότι οι μετρήσεις $\phi(t)$ και $\phi'(t)$ παρέχονται στην είσοδο του αντισταθμιστή από την έξοδο του plant και ότι η συνάρτηση διαταραχής είναι ο παλμός $d(t) = \epsilon$, $1 \leq t \leq 2$ (και $d(t) = 0$ διαφορετικά). (β) Υπολογίστε την συνάρτηση $u(t)$ στο (α) αν $d(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. (γ) Υπολογίστε την συνάρτηση $\phi(t)$ αν εφαρμόσουμε την συνάρτηση $u(t)$ που υπολογίσατε στο (β) στην είσοδο του plant με τον αντισταθμιστή αποσυνδεμένο, αλλά υπό την επίδραση της (μη-μηδενικής) διαταραχής που περιγράφεται στο (α).

Ασκηση: Δείξτε ότι αν η διαφορική εξίσωση $\phi''(t) - \phi(t) = 3e^{-2t}$ λυθεί με αρχικές συνθήκες $\phi(0) = 1$ και $\phi'(0) = -2 + \epsilon$ όπου ϵ αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός, τότε $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = +\infty$, ενώ αν $\epsilon < 0$ τότε $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = -\infty$.

2.4 Αξιωματική θεμελίωση συστημάτων καταστάσεων χώρου

Στην παρούσα ενότητα δίνεται ένα σύνολο από ορισμούς αυστηρής θεμελίωσης συστημάτων καταστάσεων χώρου (έτσι ώστε να περιλαμβάνει γενικές κατηγορίες, όπως αυτές των γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων, συστημάτων διακριτού και συνεχούς χρόνου, κλπ).

Η χρονική εξέλιξη του συστήματος ορίζεται μέσω ενός συνόλου $\mathcal{T}$, όπου $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ η $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$. Χρονικά διαστήματα (ανοικτά, κλειστά η άπειρα) περιορίζονται στο $\mathcal{T}$, π.χ $[a, b) = \{t \in \mathcal{T} : a \leq t < b\}$. Για κάθε σύνολο $\mathcal{U}$ και διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T}$ το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το $\mathcal{I}$ στο $\mathcal{U}$ ορίζεται ως: $\mathcal{U}^{\mathcal{I}} = \{\omega : \omega : \mathcal{I} \to \mathcal{U}\}$. Αν το διάστημα $\mathcal{I}$ είναι κενό (π.χ. $\mathcal{I} = [\sigma, \sigma)$) γράφουμε συμβατικά $\mathcal{U}^{\mathcal{I}} = \{\diamond\}$. Έστω ότι $\sigma,\ \tau,\ \mu \in \mathcal{T}$ τέτοια ώστε $\sigma \leq \tau \leq \mu$. Αν $\omega_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ και $\omega_2 \in \mathcal{U}^{[\tau,\mu)}$, η διαδοχική τους συνένωση $\omega_1\omega_2$ είναι η συνάρτηση $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ που ορίζεται ως:

$$\omega(t) := \begin{cases} \omega_1(t) \text{ αν } t \in [\sigma, \tau) \\ \omega_2(t) \text{ αν } t \in [\tau, \mu) \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\omega\diamond = \diamond\omega = \omega$.

Το σύστημα καταστάσεων χώρου ορίζεται ως εξής (στην συνέχεια ο ορισμός θα επενκταθεί για συστήματα με εξόδους):

Ορισμός: Ένα σύστημα καταστάσεων χώρου $\Sigma(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi)$ αποτελείται από:

- Ένα σύνολο χρόνου $\mathcal{T}$.
- Ένα σύνολο $\mathcal{X} \neq \emptyset$ που ονομάζεται χώρος καταστάσεων του Σ.
- Ένα σύνολο $\mathcal{U} \neq \emptyset$ που ονομάζεται σύνολο τιμών ελέγχου (τιμών εισόδου) του Σ.
- Μία απεικόνιση $\phi : \mathcal{D}_\phi \to \mathcal{X}$ που ονομάζεται συνάρτηση μετάβασης του Σ, με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο $\mathcal{D}_\phi$ του $\{(\tau, \sigma, x, \omega) : \sigma \leq \tau, x \in \mathcal{X}, \omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}\}$

με τις παρακάτω ιδιότητες:

- (Μη-τετριμμένη ιδιότητα): Για κάθε κατάσταση $x \in \mathcal{X}$, υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος (σ, τ) με $\sigma < \tau$ στο $\mathcal{T}$ και κάποιο $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ τέτοια ώστε το ω είναι επιτρεπτό για την κατάσταση x, δηλαδή $(\tau, \sigma, x, \omega) \in \mathcal{D}_\phi$
- (Ιδιότητα περιορισμού): Αν $\omega \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ είναι επιτρεπτό για την κατάσταση x, τότε για κάθε $\tau \in [\sigma, \mu)$ ο περιορισμός $\omega_1 := \omega|_{[\sigma,\tau)}$ του ω στο διάστημα $[\sigma, \tau)$ είναι επίσης επιτρεπτός για την κατάσταση x και ο περιορισμός $\omega_2 := \omega|_{[\tau,\mu)}$ είναι επιτρεπτός για την κατάσταση $\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1)$.

- (Ιδιότητα ημιομάδας - μεταβατική): Αν $\sigma, \tau, \mu \in \mathcal{T}$ με $\sigma < \tau < \mu$, αν $\omega_1 \in \mathcal{U}^{[\sigma,\tau)}$ και $\omega_1 \in \mathcal{U}^{[\tau,\mu)}$ και αν το x είναι κατάσταση τέτοια ώστε

$$\phi(\tau, \sigma, x, \omega_1) = x_1 \text{ και } \phi(\mu, \tau, \sigma, x_1, \omega_2) = x_2$$

  τότε $\omega = \omega_1\omega_2$ είναι επιτρεπτό για την κατάσταση x και $\phi(\mu, \sigma, x\omega) = x_2$. (Ιδιότητα ταυρότητας»: Για κάθε $\sigma \in \mathcal{T}$ και κάθε $x \in \mathcal{X}$, η κενή εόσοδος $\diamond \in \mathcal{U}^[\sigma, \sigma)$ είναι επιτρεπτή για την κατάσταση x και $\phi(\sigma, \sigma, x, \diamond) = x$.

Για συστήματα με έξοδο ο ορισμός του συστήματος γενικεύεται ως $\Sigma(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \phi, \mathcal{Y}, h)$ όπου

- $\mathcal{Y}$ είναι το σύνολο των τιμών μετρήσεων (χώρος τιμών εξόδου) και
- $h : \mathcal{T} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ είναι η συνάρτηση μετρήσεων η εξόδου.

Παρατήρηση: Ερμηνεύουμε την συνάρτηση μετάβασης $\phi(\tau, \sigma, x, \omega)$ ως "η κατάσταση σε χρόνο τ που προκύπτει αρχίζοντας σε χρόνο σ στην κατάσταση x και εφαρμόζοντας την συνάρτηση εισόδου ω ". Ο ορισμός επιτέπει μη επιτρεπτες μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων, π.χ. το φαινόμενο έκρηξης της λύσης μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων σε πεπερασμένο χρόνο,

Γ. Χαλικιάς, 10-3-2025