ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεωρία Ελέγχου: Ασκήσεις Γραμμικά Συστήματα

Α. Εκθετική Συνάρτηση

Α1: Η συνάρτηση $\sin(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζεται ως

$$\sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$$

Δείξτε ότι $|A^p_{ij}| \leq n^{p-1}\|A\|^p$ όπου $\|A\| = \max_{i,j=1,2,\ldots,n} |a_{ij}|$ και ότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (A^{2k+1})_{ij}$$

είναι Cauchy. Άρα δείξτε ότι η συνάρτηση $\sin(A)$ είναι καλά ορισμένη.

Α2: Να βρεθεί ο e^{At} αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Α3: Έστω $\lambda = \sigma + i\omega$ ($\sigma, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$) ιδιοτιμή του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και γεωμετρική πολλαπλότητα 1. Έστω $\{v_1, v_2\}$ η αντίστοιχη αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, δηλ.,

$$(A - \lambda I_4)v_1 = 0, \ \ (A - \lambda I_4)v_2 = v_1, \ \ v_1 \neq 0$$

Έστω ότι $x_1 = \mathrm{Re}(v_1)$, $y_1 = \mathrm{Im}(v_1)$, $x_2 = \mathrm{Re}(v_2)$ και $y_2 = \mathrm{Im}(v_2)$. Δείξτε ότι (x_1, x_2, y_1, y_2) είναι γραμμικά ανέξάρτητα και βρείτε τον εκθετικό πίνακα e^{At} (εκφρασμένο με πραγματικές συναρτήσεις).

Α4: Έστω $y = Az$ γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται απο τον πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $\mathcal{E}$ A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, δηλαδη $A\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$. Έστω το σύστημα $z' = Az$, $z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν $z_0 \in \mathcal{E}$ τότε $z(t) \in \mathcal{E}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Α5: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ αν και μόνο αν $AB = BA$.

Α6: Έστω $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων πίνακα A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδη,

$$\left.\begin{aligned} (A - \lambda I)v_k &= v_{k-1} \\ (A - \lambda I)v_{k-1} &= v_{k-2} \\ &\vdots \\ (A - \lambda I)v_2 &= v_1 \\ (A - \lambda I)v_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

όπου

$$(A-\lambda I)^k v_k = 0, \;\; (A-\lambda I)^{k-1} v_k \neq 0$$

Δείξτε ότι τα διανύσματα $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

A7: Να βρεθεί ο εκθετικός πίνακας e^{At} αν:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B. Προβλήματα με σταθερούς συντελεστές

B1: Βρείτε την λύση του Π.Α.Τ.:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

και τον αντίστοιχο ευσταθή, ασταθή και κεντρικό υπόχωρο του συστήματος.

B2: Να λυθεί το ΠΑΤ $x'(t) = Ax(t) + b(t)$, $x(0) = x_0$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \;\; b(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

B3: Να λυθεί το ΠΑΤ $y' = Ay$, $y(0) = y_0$, όπου:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \; y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

B4: Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος: $x_1' = x_1 - 2x_3$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_1 - x_2 - x_3$.

B5: Έστω το σύστημα: $x_1' = x_1$, $x_2' = -x_1 - x_2$. (α) Να βρεθεί η λύση του συστήματος. (β) Να βρεθεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών για τις οποίες $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

B6: Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$y' = Ay + b := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; y(0) = 0$$

B7: Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης:

$$y' = Ay, \;\; A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Β8: Να λυθεί το ΠΑΤ:

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \;\; y(0) = y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Γ. Περιοδικές Λύσεις

Γ1: Δείξτε ότι το σύστημα $x'(t) = 1 + x(t)\cos t$ δεν έχει 2π-περιοδική λύση.

Γ2: Έστω το ΠΑΤ

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + \sin t \\ 2x_2 + \cos^2 t \end{bmatrix}, \;\; x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν τα $x(0) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία το σύστημα έχει 2π-περιοδική λύση.

Γ3: Έστω το σύστημα $y' = Ay + f(t)$ όπου f συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι το σύστημα έχει 2π-περιοδική λύσεις αν και μόνο αν

$$\int_0^{2\pi} x^T(t) f(t) dt = 0$$

για κάθε 2π περιοδική λύση $x(t)$ του συζυγούς συστήματος $x'(t) = -A^T x(t)$.

Δ. Προβλήματα με μη-σταθερούς συντελεστές, Θ.Π.Λ., Πίνακας Μεταφοράς

Δ1: Δείξτε ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος:

$$y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix} := A(t)y(t), \;\; t > 0$$

Δ2: Έστω $\Phi(t)$ θεμελειώδης πίνακας λύσεων του $y'(t) = A(t)y(t)$. Δείξτε ότι η γενική λύση της $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ είναι $y(t) = \Phi(t)c + \int \Phi^{-1}(t)b(t)dt$.

Δ3: Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης: $t^2 x''(t) - 2x(t) = 0$, $t > 0$. Με την χρήση αυτων των λύσεων να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος:

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Δ4: Έστω το σύστημα $y' = A(t)y$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $a_{ij} = [A(t)]_{ij}$ συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό: $x(t) = P(t)y(t)$ όπου $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p_{ij}(t) = [P(t)]_{ij}$ συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $P^{-1}(t)$ είναι καλά ορισμένος πίνακας για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και ότι $P^{-1}(t) = [\hat{p}_{ij}(t)]$ όπου $\hat{p}_{ij}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. (α) Δείξτε ότι $x' = \tilde{A}x$ όπου $\tilde{A} = (P' + PA)P^{-1}$. (β) Αν $\tilde{G}(t, t_0)$ είναι συνάρτηση μεταφοράς που αντιστοιχεί στο $x' = \tilde{A}x$, τότε $\tilde{G}(t, t_0) = P(t)G(t, t_0)P^{-1}(t)$ όπου $G(t, t_0)$ η συνάρτηση μεταφοράς που αντιστοιχεί στο $y' = Ax$.

Δ5: Έστω η εξίσωση $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ όπου $a_0(t)$, $a_1(t)$ συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα $I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$. Έστω ότι $y_1(t)$ είναι μία λύση της εξίσωσης στο διάστημα I και ότι $y_1(t) \neq 0$, $t \in I$. Έστω επίσης ότι $y_2(t) = v(t)y_1(t)$ όπου $v \in C^2(I)$. Δείξτε ότι $y_2(t)$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης στο I, όπου

$$y_2(t) = y_1(t) \int y_1^{-2} \exp\{-\int a_1(t)dt\}dt$$

και ότι $\{y_1(t), y_2(t)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο I. Αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

βρέιτε έναν θ.π.λ. του συστήματος $z' = A(t)z$.

Δ6: Δείξτε ότι $\phi(t) = te^{t^2}$ είναι λύση της εξίσωσης: $x'' - 4tx' + (4t^2 - 2)x = 0$ και βρείτε την λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(1) = e$, $x'(1) = 2e$. Επομένως να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ:

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - 4t^2 & 4t \end{bmatrix}, \quad y(1) = \begin{bmatrix} e \\ 2e \end{bmatrix}$$

Δ7: Δείξτε ότι αν $y' = A(t)y$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{ij}(t)$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ και

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix}$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, τότε ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος είναι:

$$G(t, t_0) = \begin{bmatrix} G_{11}(t, t_0) & G_{12}(t, t_0) \\ 0 & G_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

όπου $G_{ii}(t, t_0)$, $i = 1, 2$, είναι η λύση του ΠΑΤ:

$$G'_{ii}(t, t_0) = A_{ii}(t)G_{ii}(t, t_0), \quad G_{ii}(t_0, t_0) = I_{n_i}$$

και $G_{12}(t, t_0)$ είναι η λύση του ΠΑΤ:

$$G'_{12}(t, t_0) = A_{11}(t)G_{12}(t, t_0) + A_{12}(t)G_{22}(t, t_0), \quad G_{12}(t_0, t_0) = 0$$

Επομένως, βρείτε τον πίνακα μεταφοράς $G(t, t_0)$ αν

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και υπολογίστε το όριο $\lim_{t \to +\infty} y(t)$, αν $y(t) = \phi(t, t_0, y_0)$ όπου $t_0 = 0$ και $y^T(0) = [0\ 1]$.

Ε. Συζυγή Συστήματα

E1: Έστω σύστημα $\Sigma : y' = Ay$, $y(0) = y_0$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Το σύστημα $\Sigma' : x' = -A^T x$, $x(0) = x_0$, ονομάζεται συζυγές του Σ. Δείξτε ότι αν $\phi(t)$ και $\psi(t)$ είναι οι λύσεις των Σ και Σ', αντίστοιχα, τότε $\psi^T(t)\phi(t) = x_0^T y_0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

E2: Δείξτε ότι $\frac{\partial}{\partial \tau} G(t,\tau) = -G(t,\tau)A(\tau)$ όπου $G(t,\tau)$ ο πίνακας μεταφοράς που αντιστοιχεί στο σύστημα $y' = A(t)y$, όπου τα στοιχεία το A είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.

E3: Έστω σύστημα $y' = A(t)y$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A_{ij} συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το συζυγές σύστημα $z' = -A^T(t)z$. Έστω $G(t,t_0)$ και $\hat{G}(t,t_0)$ οι αντίστοιχοι πίνακες μεταφοράς. Δείξτε ότι $\hat{G}(t,t_0) = G^T(t_0,t)$.