

Υπαρξη/Μοναδικότητα λύσης

A1: Έστω το σύστημα

$$x'' + \frac{x'}{1+x^2} + x = 0, \quad x(0) = u_0, \quad x'(0) = u_1, \quad t \geq 0$$

- (α) Δείξτε ότι το σύστημα γράφεται στη μορφή $z' = f(z)$, $z(0) = z_0$, όπου $z = [x \ x']^T \in \mathbb{R}^2$, $z_0 \in \mathbb{R}^2$ και $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- (β) Βρείτε εκτίμηση της $\|f(z)\|$ της μορφής $\|f(z)\| \leq \gamma \|z\|$, $\gamma > 0$, όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα, $\|z\| = \sqrt{z^T z}$.
- (γ) Έστω $J = [0, \beta)$ το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης του συστήματος. Με χρήση της ανισότητας Gronwall δείξτε ότι $\|z(t)\| \leq \|z_0\| e^{\gamma \beta}$ για κάθε $t \in [0, \beta)$. Επομένως δείξτε ότι $\beta = \infty$, δηλαδή ότι η λύση του συστήματος είναι καλά ορισμένη για κάθε $t \geq 0$.

A2: Βρείτε την ροή $\phi_t(x_0)$, $\phi_t(x_0) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ του συστήματος: $x' = \frac{1}{x^2}$ και το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης $J(x_0) = (\alpha, \beta)$. Αν $\alpha > -\infty$ και $\beta < \infty$ δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \phi_t(x_0) \in \bar{E} \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow \beta^-} \phi_t(x_0) \in \bar{E}$$

όπου $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Σχεδιάστε το σύνολο $\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R}^2, t \in J(x_0)\}$. Δείξτε ότι $\phi_t(\phi_s(x_0)) = \phi_{t+s}(x_0)$ για $s \in J(x_0)$ και $s+t \in J(x_0)$.

A3: Έστω το σύστημα $x' = A(t)x + b(t)$, $x(0) = x_0$, όπου $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$ συνεχείς στο $[0, T]$. Δείξτε με χρήση της ανισότητας Gronwall ότι η λύση του συστήματος είναι μοναδική στο διάστημα $[0, T]$.

A4: (α) Δείξτε την παρακάτω επέκταση του Λήμματος Gronwall: Έστω $\lambda : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $\mu : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και μή αρνητική συνάρτηση. Αν η συνεχής συνάρτηση $y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_{\alpha}^t \mu(s)y(s)ds$$

για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$, τότε:

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_{\alpha}^t \lambda(s)\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}ds$$

για κάθε $t \in [\alpha, \beta]$.

(β) Έστω $f(t, x)$ συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς x , τέτοια ώστε

$$\|f(t, x)\| \leq k_1 + k_2\|x\|, \quad \forall (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad k_1, k_2 > 0$$

Δείξτε ότι η λύση του ΠΑΤ $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{k_2(t-t_0)} + \frac{k_1}{k_2} (e^{k_2(t-t_0)} - 1)$$

για κάθε $t \geq t_0$ και ότι επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $t \in [t_0, \infty)$.

(γ) Δείξτε ότι το σύστημα

$$x_1' = -x_1 + \frac{2x_2}{1+x_2^2}, \quad x_2' = -x_2 + \frac{2x_1}{1+x_1^2}, \quad x_1(0) = a, \quad x_2(0) = b$$

έχει μοναδική λύση για κάθε $t \geq 0$.

A5:

(α) Έστω το σύστημα: $x' = f(x)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, όπου $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση τοπικά Lipschitz και φραγμένη. Δείξτε ότι η λύση του συστήματος $x(t)$ υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το $\mathbb{R}$.

(β) Έστω $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 + \|g(x)\|^2}, \quad \text{όπου } \|g(x)\| = \sqrt{g^T(x)g(x)}$$

Δείξτε ότι: (i) $\|f(x)\| \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και ότι, (ii) η λύση του συστήματος $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το $\mathbb{R}$.

A6: Έστω $f : X \rightarrow Y$ τοπικά Lipschitz και $A \subseteq X$ συμπαγές. Δείξτε ότι η f είναι Lipschitz στο A .

A7: Δείξτε ότι αν οι συναρτήσεις $f_1 \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπικά Lipschitz, τότε $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$ και $f_2 \circ f_1$ είναι τοπικά Lipschitz.

A8: Έστω το ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ όπου η $f : \bar{B}_b(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $L > 0$. Ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα δώστε μία διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος Picard-Lindelof (Θεώρημα 1, σελ. 12) έτσι ώστε το διάστημα $J_a = [t_0 - a, t_0 + a]$ στο οποίο έχουμε μοναδική λύση να μην εξαρτάται από την σταθερά Lipschitz L .

(i) Ορίζουμε τον διανυσματικό χώρο με νόρμα $\mathcal{X} = (C^0(J_a, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Εξετάζουμε τις δύο νόρμες: $\|x\|_C = \max_{t \in J_a} \|x(t)\|$ (sup-νόρμα) και $\|x\|_K = \max_{t \in J_a} (\|x(t)\|e^{-K|t-t_0|})$ (νόρμα Bielecki) όπου $K > L$. Δείξτε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες. Άρα δείξτε ότι το σύνολο $C^0(J_a, \bar{B}_b(x_0))$ (δηλ. το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : J_a \rightarrow \bar{B}_b(x_0)$), εφοδιασμένο με την νόρμα $\|\cdot\|_K$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (έστω N).

(ii) Έστω ο τελεστής $T(x) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s))ds$, $t \in J_a$. Δείξτε ότι αν $a \leq \frac{b}{M}$ όπου $M = \max_{x \in \bar{B}_b(x_0)} \|f(x)\|$, τότε $T : N \rightarrow N$. Δείξτε επίσης ότι ο T είναι τελεστής συστολής στο N .

(iii) Συμπεράνετε από το Θεώρημα Συστολής ότι αν $a \leq b/M$, ο T έχει μοναδικό σταθερό σημείο $x^* = T(x^*)$ που αντιστοιχεί στην μοναδική λύση του ΠΑΤ.