

Θεωρία Ελέγχου: Ασκήσεις Ελεγχξιμότητα-Παρατηρησιμότητα

A. Προκαταρκτικά

A1: (α) Έστω $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \succeq 0$,

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{pmatrix}$$

και έστω ότι $Q_{11} \succ 0$. Δείξτε ότι $\hat{Q} = Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} \succeq 0$ ($\succ 0$ αν $Q \succ 0$). (Ο πίνακας $\hat{Q}$ ονομάζεται το συμπλήρωμα Schur του Q_{11}).

(β) Έστω η τετραγωνική μορφή:

$$J(u, z) = \begin{bmatrix} u^T & z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}$$

όπου

$$Q = Q^T = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad Q_{11} \succ 0$$

Ορίζουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης: $V(z) = \min_u J(u, z)$. Δείξτε ότι $V(z) = u^T P u$ όπου $P = P^T \succeq 0$ και εκφράστε τον πίνακα P σαν συνάρτηση των Q_{ij} .

A2: Έστω $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Δείξτε ότι:

$$\max_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_{\max}(A), \quad \min_{\|x\|=1} x^T A x = \lambda_{\min}(A)$$

όπου $\lambda_{\max}(A)$ και $\lambda_{\min}(A)$ είναι η μεγαλύτερη και μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα A , αντίστοιχα, και $\|x\| = \sqrt{x^T x}$. Ποιά x μεγιστοποιούν/ελαχιστοποιούν τις παραπάνω συναρτήσεις;

A3: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (α) Έστω $M \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Δείξτε ότι $\mathcal{R}(M)$ είναι A -αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $AM = MX$ για κάποιον πίνακα $X \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Δείξτε επιπλέον ότι αν $\text{Rank}(M) = k$, τότε κάθε ιδιοτιμή του X είναι ιδιοτιμή του A και ότι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ανήκει στον $\mathcal{R}(M)$.
- (β) Έστω σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ και $\Gamma_c = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ ο αντίστοιχος πίνακας ελεγχξιμότητας. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{R}(\Gamma_c)$ είναι A -αναλλοίωτος (σημειώσεις). Βρείτε πίνακα X τέτοιον ώστε $A\Gamma_c = \Gamma_c X$.
- (γ) Δείξτε ότι $\mathcal{N}_r(N)$ είναι A -αναλλοίωτος υπόχωρος αν και μόνο αν $\mathcal{R}(N^T)$ είναι A^T -αναλλοίωτος. Άρα βρείτε συνθήκη ώστε ο υπόχωρος $\mathcal{N}_r(N)$ να είναι A αναλλοίωτος.
- (δ) Έστω σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ και $\Gamma_o = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]^T$ ο αντίστοιχος πίνακας παρατηρησιμότητας. Γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$ είναι A -αναλλοίωτος (σημειώσεις). Βρείτε πίνακα Y τέτοιον ώστε να ισχύει η συνθήκη στο (γ).

A4: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Av = (\sigma + i\omega)v$, $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$. (α) Δείξτε ότι $\langle \operatorname{Re}(v), \operatorname{Im}(v) \rangle$ είναι A -αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. (β) Αν $M = [\operatorname{Re}(v) \mid \operatorname{Im}(v)]$, βρείτε $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ τέτοιον ώστε $AM = MX$.

A5: Δείξτε ότι $\{v_i\}_{i=1}^m$, $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m$, $m \leq n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν ο πίνακας Gramian: $G = [v_i^T v_j]_{i,j=1,2,\dots,m}$ είναι θετικά ορισμένος.

B. Ελεγχιμότητα/Παρατηρησιμότητα

B1: Έστω σύστημα $\Sigma(A, B, C)$:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

(α) Είναι το σύστημα πλήρως ελέγξιμο; Να βρεθεί ο ελέγξιμος υπόχωρος.

(β) Είναι το σύστημα πλήρως παρατηρήσιμο; Να βρεθεί ο μη-παρατηρήσιμος υπόχωρος.

(γ) Εάν το σύστημα δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο να βρεθεί μετασχηματισμός ισοδυναμίας $Q : z = Q^{-1}x$ ώστε

$$z'(t) = \begin{bmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

όπου $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1)$ πλήρως παρατηρήσιμο και σε κανονική μορφή παρατηρησιμότητας:

$$\hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

B2: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $b \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι αν περισσότερα από ένα γραμμικά ανεξάρτητα αριστερά ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή, τότε το σύστημα $\Sigma_i(A, b)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο (ισοδύναμα, αν για ένα σύστημα μίας εισόδου ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή με γεωμετρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη του ένα, τότε το σύστημα δεν είναι πλήρως ελέγξιμο). Υπόδειξη: Έστω v_1^T και v_2^T δύο γραμμικά ανεξάρτητα αριστερά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ . Παρατηρήστε ότι αν $v_1^T b = \alpha_1$ και $v_2^T b = \alpha_2$, τότε $(\alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2)^T b = 0$.

B3: (α) Δείξτε ότι $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A + \alpha I, B)$ πλήρως ελέγξιμο, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. (β) Δείξτε ότι $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A, BB^T)$ πλήρως ελέγξιμο. (γ) Δείξτε ότι $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\Sigma_i(A + BF, BG)$ πλήρως ελέγξιμο, όπου $\det G \neq 0$.

B4: Θεωρούμε το σύστημα: $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$$

και όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το χωρίο του επιπέδου (με άξονες τις παραμέτρους a και b) όπου το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο.

B5: Έστω $\Sigma_i(A, b)$ όπου $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ και $b \in \mathbb{R}^3$. Έστω $\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^3$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και $d = 2$ η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = \lambda_0$. Δείξτε με εφαρμογή κριτηρίου ελεγχιμότητας ότι $\Sigma_i(A, b)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

B6: Έστω συστήματα $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ και $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ με διανύσματα κατάστασης x_1 και x_2 , αντίστοιχα, και συναρτήσεις εξόδου y_1 και y_2 , αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις εισόδου των Σ_1 και Σ_2 είναι $u_1 - y_2$ και $u_2 - y_1$, αντίστοιχα.

- (α) Βρείτε τις εξισώσεις του συστήματος με διάνυσμα κατάστασης: $[x_1^T \ x_2^T]^T$, διάνυσμα εισόδου: $[u_1^T \ u_2^T]^T$ και διάνυσμα εξόδου: $[y_1^T \ y_2^T]^T$.
- (β) Αποδείξτε την παρακάτω πρόταση η δώσει αντιπαράδειγμα: "Το σύστημα ανάδρασης στο (α) είναι πλήρως παρατηρήσιμο (πλήρως ελέγξιμο) αν και μόνο αν κάθε ένα από τα συστήματα $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ και $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο (πλήρως ελέγξιμο)".
- (γ) Έστω ότι $u_2 \equiv 0$ (δηλ. απαλείψτε το u_2 ως συνάρτηση εισόδου από το σύστημα) και επαναλάβετε την ανάλυση σας στο μέρος (β).

B7 (α) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Τότε $\Phi(t) = e^{At}$ είναι η μοναδική λύση του ΠΑΤ:

$$\Phi^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\Phi^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1\Phi'(t) + \alpha_0\Phi(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες: $\Phi(0) = I_n$, $\Phi'(0) = A$, $\Phi''(0) = A^2$, ..., $\Phi^{(n-1)}(0) = A^{n-1}$.

(β) Έστω πίνακας A όπως στο μέρος (α). Τότε:

$$\Phi(t) = e^{At} = \beta_1(t)I_n + \beta_2(t)A + \dots + \beta_n(t)A^{n-1}$$

όπου $\beta_k(t)$, $1 \leq k \leq n$ είναι οι λύσεις των n ΠΑΤ:

$$\beta^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}\beta^{(n-1)}(t) + \alpha_1\beta'(t) + \alpha_0\beta(t) = 0$$

με αρχικές συνθήκες:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1(0) = 1 \\ \beta_1'(0) = 0 \\ \vdots \\ \beta_1^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \beta_2(0) = 0 \\ \beta_2'(0) = 1 \\ \vdots \\ \beta_2^{(n-1)}(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \dots \quad \left. \begin{array}{l} \beta_n(0) = 0 \\ \beta_n'(0) = 0 \\ \vdots \\ \beta_n^{(n-1)}(0) = 1 \end{array} \right\}$$

αντίστοιχα.

B8: Έστω σύστημα $\Sigma_i(A, b)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x(0) = x_0 = 0$. Έστω ότι $u(t + \frac{1}{2}) = u(t)$, $t \geq 0$. Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε την συνάρτηση $u(t)$ έτσι ώστε $x(1) = x_1$ αν και μόνο αν υπάρχει $\eta \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε: $(e^{A/2} + I)\Gamma_c \eta = x_1$, $\Gamma_c = [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$.

B9: Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη και $f'(y) \geq \epsilon > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\det[b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b] \neq 0$ και $t_1 > 0$, τότε η εξίσωση

$$\int_0^{t_1} e^{-At} b f(b^T e^{-A^T t} p) dt = x$$

έχει μοναδική λύση p για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

B10: Δείξτε ότι:

$$\exp \left(\begin{bmatrix} A & BB^T \\ 0 & -A^T \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^{At} & e^{At} W(0, t) \\ 0 & e^{-A^T t} \end{bmatrix}, \text{ όπου } W(0, t) = \int_0^t e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T \tau} d\tau$$

ο πίνακας Gramian ελεγχιμότητας του $\Sigma_i(A, b)$.

B11: Έστω το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ και έστω ότι η έξοδος του συστήματος είναι μετρήσιμη τις χρονικές στιγμές $t = nT$, $n \in \mathbb{N}_0$. Κάτω από ποιές συνθήκες ένας ικανός αριθμός μετρήσεων αρκεί για να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα την αρχική κατάσταση $x(0)$;

B12: Η $(C^2(\mathbb{R}))$ συνάρτηση $x(t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $x''(t) + x(t) = 0$ και οι τιμές της είναι γνωστές για $t = k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$. Μπορούμε να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα τις τιμές $x(0)$ και $x'(0)$ από αυτή την πληροφορία;

B13: Έστω ότι $\Sigma_i(A, b)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ είναι πλήρως ελέγξιμο και $c_1^T (sI_n - A)^{-1} b = c_2^T (sI_n - A)^{-1} b$, $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $c_2 \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι $c_1 = c_2$.

B14: Έστω $\Sigma_i(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, πλήρως ελέγξιμο και $\text{Rank}(B) = m$. Δείξτε ότι τότε $\text{Rank}(A) \geq n - m$.

B15: Έστω $\Sigma_i(A, B)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $\Sigma_i(\hat{A}, \hat{B})$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ με αντίστοιχους πίνακες ελεγχιμότητας

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \text{ και } \hat{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \dots & \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix}$$

όπου $\text{Rank}(\Gamma_c) = \text{Rank}(\hat{\Gamma}_c) = n$. Έστω ότι υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(P) \neq 0$, τέτοιος ώστε $P[\Gamma_c \mid A^n B] = [\hat{\Gamma}_c \mid \hat{A}^n \hat{B}]$. Δείξτε ότι $\hat{B} = PB$ και $\hat{A} = PAP^{-1}$. Υπόδειξη: Δείξτε ότι $(PA - \hat{A}P)\Gamma_c = 0$.

B16: Έστω το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$, $x' = Ax + Bu$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που αντιστοιχεί σε γραμμικοποιημένο μοντέλλο δορυφόρου σε κυκλική τροχιά. Οι μεταβλητές του διανύσματος κατάστασης $x^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$ είναι: x_1 η ακτινική απόκλιση από την ακτίνα ισορροπίας και x_3 η μεταβλητή γωνίας της τροχιάς. Οι μεταβλητές x_2 και x_4 αντιστοιχούν στην γραμμική ταχύτητα στην ακτινική διεύθυνση και στην γωνιακή ταχύτητα, αντίστοιχα. Οι μεταβλητές εισόδου u_1 και u_2 ($u = [u_1 \ u_2]^T$) είναι οι δυνάμεις που ασκούν οι προωθητήρες στην ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση, αντίστοιχα.

- (α) Είναι το σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ πλήρως ελέγξιμο; Αν το διάνυσμα εξόδου είναι $y = [x_1 \ x_3]^T$, είναι το αντίστοιχο σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ παρατηρήσιμο;
- (β) Είναι το σύστημα πλήρως ελέγξιμο αν ο ακτινικός προωθητήρας σταματήσει να λειτουργεί; αν ο εφαπτομενικός προωθητήρας σταματήσει να λειτουργεί;
- (γ) Είναι το σύστημα πλήρως παρατηρήσιμο μόνο απο την έξοδο $y = x_1$; Μόνο από την έξοδο $y = x_3$;

B17: Έστω το σύστημα $\Sigma(A, B, C)$ όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Μετασχηματίστε το σύστημα στην κανονική μορφή Kalman και εντοπίστε τα τέσσερα υποσυστήματα Σ_{co} , $\Sigma_{\bar{co}}$, $\Sigma_{c\bar{o}}$, $\Sigma_{\bar{c}\bar{o}}$. (β) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

B18: Έστω το σύστημα:

$$\Sigma_o(A, C) := \Sigma_o \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \right)$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Δείξτε ότι $\Sigma_o(A, C)$ πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $\Sigma_o(A_{22}, A_{12})$ πλήρως παρατηρήσιμο.

Γ. Χαλικιάς, 7-5-2023