

Θεωρία Ελέγχου: Ασκήσεις Ανάδραση καταστάσεων, Παρατηρητές

Άσκηση 1: Έστω εξίσωση Sylvster: $AX - XB = 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Αν είναι γνωστό ότι υπάρχει λύση $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ με $\text{Rank}(X) = 1$, βρείτε κοινή ιδιοτιμή των πινάκων A και B .

Άσκηση 2: Έστω $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λύση της Αλγεβρικής Εξίσωσης Riccati (AEP): $A^T P + PA + Q - PBB^T P = 0$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ορίζουμε $K = -B^T P$. Λέμε ότι ο πίνακας $P = P^T$ είναι σταθεροποιητική λύση της AEP αν ο πίνακας $A + BK = A - BB^T P$ είναι Hurwitz. Δείξτε ότι υπάρχει το πολύ μία σταθεροποιητική λύση της AEP. [Υπόδειξη: Υποθέστε ότι P_1 και P_2 είναι δύο διακριτές σταθεροποιητικές λύσεις. Εκφράστε την διαφορά των αντίστοιχων AEP σε μορφή εξίσωσης Sylvester και καταλήξτε σε αντίφαση].

Άσκηση 3: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad i = 1, 2 \text{ και } j = 1, 2$$

Έστω ότι $\mathcal{V} = \mathcal{R}(M)$ είναι A -αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2n}$ τέτοιος ώστε:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} X, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad M_1, M_2, X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det(M_1) \neq 0$$

Δείξτε ότι $P = M_2 M_1^{-1}$ είναι λύση της τετραγωνικής πινακο-εξίσωσης: $PA_{11} - A_{22}P + PA_{12}P - A_{21} = 0$.

Άσκηση 4: Δίνεται το σύστημα $x' = Ax + Bu$, όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί πίνακας F ώστε $\sigma(A + BF) = \{-1 \pm i, -2 \pm i\}$.

Άσκηση 5: Σχεδιάστε παρατηρητή για το σύστημα ταλάντωσης $x'(t) = v(t)$, $v'(t) = -\omega_0^2 x(t)$ όταν η μέτρηση είναι η μεταβλητή ταχύτητας $v(t)$. Επιλέξτε και τις δύο ιδιοτιμές του παρατηρητή ως $s = -\omega_0$.

Άσκηση 6: Έστω σύστημα ταλαντωτή χωρίς απόσβεση: $x'_1 = x_2$, $x'_2 = -\omega_0^2 x_1 + u$. Χρησιμοποιώντας ως μέτρηση την μεταβλητή ταχύτητας, $y = x_2$, σχεδιάστε αντισταθμιστή παρατηρητή/ανάδρασης καταστάσεων ώστε να ελέγξετε το σύστημα και σχεδιάστε το διάγραμμα βαθμίδων του συστήματος. Επιλέξτε ιδιοτιμές ανάδρασης $\{-\omega_0 \pm i\omega_0\}$ και την ιδιοτιμή του παρατηρητή ως $s = -\omega_0$ (πολλαπλότητας δύο).

Άσκηση 7: Δείξτε ότι το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι ανιχνεύσιμο αν και μόνο αν $y(t) = 0$, $t \geq 0$, συνεπάγεται ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ για κάθε $x(0) \in \mathbb{R}^n$.